

25/10/17

Es: 4.2.24

$$X = \{ p \in \mathbb{R}_d[t] \mid p(-t) = -p(t) \}$$

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots + a_d t^d, a_i \in \mathbb{R}$$

$$p(-t) = a_0 - a_1 t + a_2 t^2 + \dots + (-1)^d a_d t^d$$

$$p(-t) = -p(t) \Leftrightarrow a_0 = -a_0, a_2 = -a_2, \dots, \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow a_0 = 0, a_2 = 0, \dots,$$

$p(t) \in X \Leftrightarrow$ non contiene monomi di grado pari

Base di X : $t, t^3, t^5, \dots$

t^d se d è dispari
 t^{d-1} se d è pari

- sono indipendenti, perché
 sono un sottoinsieme della base canonica

- convenientemente generano:
 se d è pari

$$\dim X = \begin{cases} \frac{d}{2} & \text{se } d \text{ è pari} \\ \frac{d+1}{2} & \text{se } d \text{ è dispari} \end{cases}$$

Ex: 4.2.26

$$X = \mathcal{F}(\{a, b, c\}, \mathbb{R}) = \{f: \{a, b, c\} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

una $f \in X$ è descritta da:

$$f: \begin{cases} a \mapsto \lambda \\ b \mapsto \mu \\ c \mapsto \nu \end{cases}$$

$$\lambda, \mu, \nu \in \mathbb{R}$$

benivisto:

$$f_1: \begin{cases} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 0 \\ c \mapsto 0 \end{cases}$$

$$f_2: \begin{cases} a \mapsto 0 \\ b \mapsto 1 \\ c \mapsto 0 \end{cases}$$

$$f_3: \begin{cases} a \mapsto 0 \\ b \mapsto 0 \\ c \mapsto 1 \end{cases}$$

$$\lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3 :$$

$$a \mapsto \lambda$$

$$b \mapsto \mu$$

$$c \mapsto \nu$$

$\Rightarrow f_1, f_2, f_3$ generano $\times$

$$\text{Tralza } \lambda f_1 + \mu f_2 + \nu f_3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = \mu = \nu = 0$$

$\Rightarrow f_1, f_2, f_3$ sono indip. $\Rightarrow$ sono una base

$$\Rightarrow \dim \mathcal{F}(\{a, b, c\}, \mathbb{R}) = 3.$$

V sp. vett.

W, Z sottospazi.

Operazioni: $W \cap Z$, $W + Z$ $\leftarrow$ + piccolo $\rightarrow$ spazio che contiene W e Z

Formula di Grassmann:

$$\dim W + \dim Z = \dim(W \cap Z) + \dim(W + Z)$$

Es: 4 - 5 - 2 .

$$V = \mathbb{R}^4$$

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\}$$

$\uparrow$ w_1 $\uparrow$ w_2

$$Z = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$$

$\uparrow$ z_1 $\uparrow$ z_2

W_1 e W_2 non sono uno multiplo dell'altro.
 $\Rightarrow$ sono indipendenti $\Rightarrow \dim W = 2$

lo stesso vale per Z_1 e $Z_2 \Rightarrow \dim Z = 2$

Operazioni sull'insieme dei ^lgeneratori che non
cambiano il sottospazio:

$$X = \text{Span}(W_1, \dots, W_k)$$

- rinumerare i generatori
- moltiplicare uno dei generatori per $c \in \mathbb{R} - \{0\}$
es: $W_1 \rightarrow cW_1$
- aggiungere a un generatore un multiplo
di un altro

È senza?

$w_1, \dots, w_k$

pongo $w'_1 = w_1 + \lambda w_2$
 $\lambda \in \mathbb{R}$

Dico che $\text{Span}(w_1, \dots, w_k) = \text{Span}(w'_1, w_2, \dots, w_k)$
 $i > 1$

$w'_1, \dots, w_k \in X \Rightarrow X' \subseteq X$

D'altra parte $w_1 = w'_1 - \lambda w_2$

$\Rightarrow w_1, \dots, w_k \in X' \Rightarrow X \subseteq X'$

$\Rightarrow X = X'$

Nell'esempio: $w_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix}$

$w_1 \rightarrow w_1 + w_2$

$$W = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -1 \\ -2 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$w_1 \rightarrow w_1$$

$$w_2 \rightarrow 2w_1 + w_2$$

$$Z = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} = \text{Span} \left\{ \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ +2 \\ 0 \\ +1 \end{pmatrix} \right\}$$

$\uparrow$ z_1 $\uparrow$ z_2

$$z_1 \rightarrow z_1$$

$$z_2 \rightarrow z_2 - z_1$$

$W \cap Z$:

$$a \begin{pmatrix} 8 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 19 \\ 8 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = c \begin{pmatrix} 7 \\ 0 \\ 3 \\ 4 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

a, b, c, d
unknown

$$\left\{ \begin{array}{l} 8a + 19b - 7c = 0 \\ 2a + 8b - 2d = 0 \\ b + 3c = 0 \\ a - 4c - d = 0 \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b = -3c \\ 8a + 19(-3c) - 7c = 0 \quad 8a = 64c \\ \vdots \\ \vdots \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} b = -3c \\ a = 8c \\ 2(8c) + 8(-3c) - 2d = 0 \\ 8c - 4c = d \end{array} \right. \quad \left\{ \begin{array}{l} b = -3c \\ a = 8c \\ d = 4c \\ d = -4c \end{array} \right. \Leftrightarrow \begin{array}{l} a = b - c \\ = d = 0 \end{array}$$

$W \cap Z = \{0\}$, $W + Z = V = \mathbb{R}^4$
 perché il calcolo mostra
 che i 4 vettori sono combinati
 sono ind.

