Algebra Lineare 25/10/17

$\boxed{4.4.1}$ Completare a base se possibile

(b) $V = \mathbb{R}^4$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -8 \\ -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Possibile completare se sono lin indip:

$I \neq 0$ ✓ $\quad II \neq k \cdot I$ ✓ $\quad III \in \mathrm{Span}(I, II)$?

$$\alpha + 7\beta = 2 \qquad \alpha = 3/5$$
$$-\alpha + 8\beta = 1 \qquad \beta = 1/5$$

$$\frac{3}{5}(-2) + \frac{1}{5}(-9) = -3 \quad \checkmark$$

$$\frac{3}{5}\cdot 4 + \frac{1}{5}(-2) = -2 \quad \checkmark \qquad \text{Sì}$$

Non è possibile completare a base.

d) $\mathbb{R}^4$ $\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

$\underline{I} \neq 0$ ✓ $\quad \underline{II} \neq k \cdot \underline{I}$ ✓ $\quad \underline{III} \in \mathrm{Span}(\underline{I}, \underline{II})$

2ª $\quad -\alpha + 2\beta = -4 \qquad 3\alpha = 6 \qquad \alpha = 2$

3ª $\quad 2\alpha - \beta = 5 \qquad 3\beta = -3 \qquad \beta = -1$

1ª $\quad 2 \cdot 3 - 1 \cdot 4 = 2$ ✓

4ª $\quad 2 \cdot 5 - 1 \cdot 3 = 7$ ✓

Non è possibile completare

$$(a) \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 8 \\ 13 \\ -1 \end{pmatrix}$$

1° $\quad 3\alpha - 2\beta = 0 \quad\quad \alpha = 5\beta - 13 \quad\quad \beta = 3$

3° $\quad -\alpha + 5\beta = 13 \quad\quad 13\beta = 39 \quad\quad \alpha = 2$

2° $\quad 2 \cdot 2 + 3 \cdot 1 = 7 \neq 8$ È possibile completare

Span(I, II, III) è un sottosp. di dim 3 in $\mathbb{R}^4$

per completare basta $\boxed{IV} \notin$ Span(I, II, III)

dunque un $\boxed{IV}$ a caso va bene.

Però: visto che già le prime tre coordinate danno indip. lineare allora scelgo $IV = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

Verifico che I - IV sono lin. indip.

$$\left\{\begin{array}{l} \_\_\_\_\_\_ = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ = 0 \\ \_\_\_\_\_\_ + \delta = 0 \end{array}\right.$$

eq. in α, β, γ come per indip. lineare di I, II, III

(h) $V = \left\{ x \in \mathbb{R}^4 : \begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 5x_2 - x_3 + x_4 = 0 \end{array} \right\}$

$$\dim(V) = \underbrace{4}_{\dim(\mathbb{R}^4)} - \underbrace{2}_{\#\text{ condiz. indip. poste}} = 2$$

Verifico: $x \in V \iff \begin{cases} x_4 = x_1 + x_2 + x_3 \\ 3x_1 + 6x_2 = 0 \end{cases}$

$\iff \begin{cases} x_1 = -2x_2 \\ x_4 = -x_2 + x_3 \end{cases}$

$$\iff x = x_2 \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

base

$$\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

verifico che sta in V:

$4 - 2 + 1 - 3 = 0$ ✓

$8 - 10 - 1 + 3 = 0$ ✓

E' possibile completare. Devo aggiungere 1 vett:

che sia in V e non mult. di $\begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$:

ad es $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

(k) $V = \mathbb{R}_{\leq 3}[t]$ $\quad\dim(V) = 4$

$-4 + 3t + 5t^3$ ✓

$3 + t^2 - t^3$ ✓

$5 + t + t^2 - t^3$

$t \qquad 3\alpha = 1 \qquad \alpha = 1/3$

$t^2 \qquad \beta = 1 \qquad \beta = 1$

$1 \qquad \frac{1}{3} \cdot (-4) + 1 \cdot 3 = \frac{5}{3} \neq 5$ sono lin. indip

$\Longrightarrow$ Posso completare con un qualsiasi polinomio $\notin \mathrm{Span}(\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III})$

Visto: coeff di $1, t, t^2$ bastano e dico che $\mathrm{I}, \mathrm{II}, \mathrm{III}$ sono lin. indip. $\Longrightarrow \mathrm{IV} = t^3$.

$\boxed{4.4.2}$ Estrarre base se possibile.

(b) $\mathbb{R}^3$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 7 \end{pmatrix} \checkmark \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \times \quad \begin{pmatrix} -4 \\ 2 \\ -14 \end{pmatrix} \times \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -5 \end{pmatrix} \checkmark \quad \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \times_{\mathrm{I}+\mathrm{II}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 19 \end{pmatrix} \times \quad \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \checkmark \quad \begin{pmatrix} 8 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \times$$

$$2\alpha + 3\beta = 1$$
$$-\alpha + 2\beta = -4$$

$7\alpha = 14 \qquad \alpha = 2$

$\beta = -1$

$$2\alpha + 3\beta = 6 \qquad 7\alpha = 9$$
$$-\alpha + 2\beta = 1 \qquad 7\beta = 8$$

$$\frac{9}{7}\cdot 7 + \frac{8}{7}\cdot(-5) \neq -1$$

(c) $V = \{ x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + x_2 = x_3 + x_4 \}$ $\qquad \dim(V) = 3$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -7 \\ 1 \\ -5 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 9 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 32 \\ 25 \\ 7 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 6 \\ -1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 7 \\ 8 \\ -5 \\ 20 \end{pmatrix}$$

$\checkmark \qquad \checkmark \qquad \times \; -2\cdot \mathrm{I} + 3\cdot \mathrm{II} \qquad \checkmark \qquad \times$

$1^a \quad 3\alpha + 2\beta = 6 \qquad 7\alpha = -14 \qquad \alpha = -2$

$4^a \quad +5\alpha + \beta = -4 \qquad\qquad \beta = 6$

$2^a \quad (-2)\cdot(-7) + 6\cdot 6 \neq -1 \qquad III \notin Span(I, II)$

Lezione extra (recupero):

domani 12:30-13:30 B33

<u>Ricordo:</u> $X \xrightarrow{f} Y \xrightarrow{g} X$

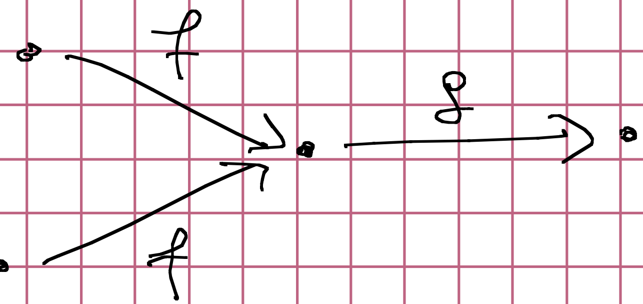
$$g \circ f = id_X \not\Rightarrow g = f^{-1}$$

(f può non essere invertibile)

<u>Però:</u>

- f è iniettiva ;

- g surjettiva



Teor : $f: V \to W$ lineare tra sp. vett.
può essere invertibile solo se
$\dim(V) = \dim(W)$; in tal caso
f iniettiva $\Longleftrightarrow$ f surgettiva

Cor : se $\dim(V) = \dim(W)$ e ho
$f: V \to W$ lin. $g: W \to V$ lin.
t.c. $g \circ f = id_V$ allora f

è invertibile e $g = f^{-1}$

(cioè $f \circ g = id_W$).

Applicazioni lineari associate a matrici

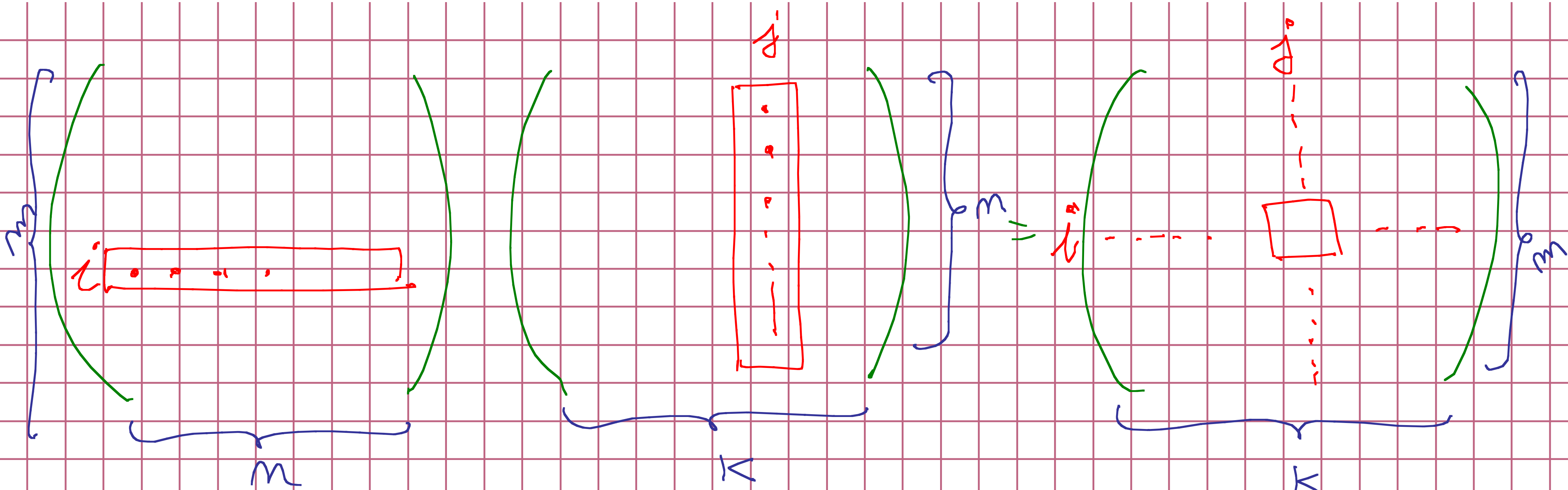
Def (Prodotto righe $\times$ colonne di matrici):

$A \in M_{m \times n}(\mathbb{R}) \qquad B \in M_{n \times k}(\mathbb{R})$

(cioè: A ha tante colonne quante B ha righe)

definisco $A \cdot B \in M_{m \times k}(\mathbb{R})$

$$(A \cdot B)_{ij} = \sum_{h=1}^{n} (A)_{ih} \cdot (B)_{hj}$$



Es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5 & 1 \\ 6 & -2 \\ \pi & 8 \end{pmatrix}$$

Non è definito

Es:

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 4 & 9 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & 0 & 2 & 9 \\ 2 & 1 & 5 & -1 \\ 4 & -3 & 7 & \pi \end{pmatrix} =$$

$$\underbrace{2 \times 3 \qquad 3 \times 4}_{2 \times 4}$$

$$= \begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \boxed{\cdot} & \cdot \\ \cdot & \boxed{\cdot} & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

$4 \cdot 0 + 9 \cdot 1 + (-1) \cdot (-3)$ $\quad 2 \cdot 2 + 3 \cdot 5 + 5 \cdot 7$

Prop: la funzione

$$\mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R}) \times \mathcal{M}_{n \times k}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{M}_{m \times k}(\mathbb{R})$$

$$(A, B) \longmapsto A \cdot B$$

è lineare in ciascuno dei due argomenti fissato l'altro, cioè:

$$A \cdot (\lambda \cdot B + \mu \cdot C) = \lambda \cdot (A \cdot B) + \mu \cdot (A \cdot C)$$

(lineare a dx)

$$(\lambda \cdot A + \mu \cdot B) \cdot C = \lambda \cdot (A \cdot C) + \mu \cdot (B \cdot C)$$

(lineare a sin)

<u>Oss</u>: per $m = n = k$ è la distributività in $\mathbb{R}$ –

Dim (a dx)

$$\underbrace{\underbrace{A}_{m\times m}\cdot(\underbrace{\lambda \underbrace{B}_{m\times k} + \mu \underbrace{C}_{m\times k}}_{m\times k})}_{m\times k} \overset{?}{=} \underbrace{\lambda\underbrace{(\underbrace{A}_{m\times m}\cdot \underbrace{B}_{m\times k})}_{m\times k} + \mu\cdot\underbrace{(\underbrace{A}_{m\times m}\cdot\underbrace{C}_{m\times k})}_{m\times k}}_{m\times k}$$

Sono della stessa taglia: resta da vedere che nel posto ij hanno stesso coeff $\quad \forall i = 1 \ldots m \quad \forall j = 1 \ldots K$:

$$\left(A \cdot (\lambda B + \mu \cdot C)\right)_{ij} \overset{?}{=} \left(\lambda \cdot (A B) + \mu \cdot (A C)\right)_{ij}$$

$$= \qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$$

$$\sum_{h=1}^{m} a_{ih} (\lambda B + \mu C)_{hj} \qquad\qquad \lambda \cdot (A \cdot B)_{ij} + \mu \cdot (A \cdot C)_{ij}$$

$$= \qquad\qquad\qquad\qquad \shortparallel$$

$$\sum_{h=1}^{m} a_{ih} \left(\lambda \cdot b_{hj} + \mu \cdot c_{hj}\right) \qquad\qquad \lambda \cdot \sum_{h=1}^{m} a_{ih} b_{hj} + \mu \cdot \sum_{h=1}^{m} a_{ih} \cdot c_{hj}$$

Uguali per le proprietà delle operaz. in $\mathbb{R}$ $\boxed{///}$

Oss: $\mathbb{R}^n = \mathcal{M}_{n \times 1}(\mathbb{R})$

Cor: Se fisso $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{R})$ la funzione $f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$

$x \longmapsto A \cdot x$ è lineare.

$m \times 1$ $\qquad \underbrace{m \times n \quad n \times 1}_{m \times 1}$

$$\underline{\text{Es}}: \quad A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 3}$$

$$f_A : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$$

$$f_A(x) = A \cdot x = \begin{pmatrix} 4 & 3 & -2 \\ 7 & -5 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 \\ 7x_1 - 5x_2 + x_3 \end{pmatrix}.$$

Prop: Se $A \in M_{m \times n}$ $B \in M_{n \times k}$ $C \in M_{k \times p}$

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$

(Prodotto righe $\times$ colonne associativo.)

Dim: $\underbrace{(\underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot\underset{m\times k}{B}}_{m\times k})\cdot\underset{k\times p}{C}}_{m\times p} \stackrel{?}{=} \underbrace{\underset{m\times n}{A}\cdot(\underbrace{\underset{m\times k}{B}\cdot\underset{k\times p}{C}}_{m\times p})}_{m\times p}$

Resta: coeff. uguale in ogni posto ij:

$$((A\cdot B)\cdot C)_{ij} = \sum_{h=1}^{k} (A\cdot B)_{ih} \cdot c_{hj}$$

$$= \sum_{h=1}^{k} \left(\sum_{q=1}^{m} a_{iq} \, b_{qh} \right) c_{hj}$$

$$(A \cdot (B \cdot C))_{ij} = \sum_{q=1}^{m} a_{iq} \, (B \cdot C)_{qj}$$

$$= \sum_{q=1}^{m} a_{iq} \left(\sum_{h=1}^{k} b_{qh} \cdot c_{hj} \right)$$

uguali: $\displaystyle\sum_{h=1}^{k}\sum_{q=1}^{m} a_{iq}\, b_{qh}\, c_{hj}$. $\blacksquare$

<u>Cor</u>: $A \in \mathcal{M}_{m\times n}$ $\qquad$ $B \in \mathcal{M}_{k\times m}$

$f_A : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^m$ $\qquad$ $f_B : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$B \cdot A \in \mathcal{M}_{k\times n}$

$f_{B\cdot A} : \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^k$

$$
\begin{tikzcd}
\mathbb{R}^n \arrow[r, "f_A"] \arrow[rr, bend right, "f_{B\cdot A}"'] & \mathbb{R}^m \arrow[r, "f_B"] & \mathbb{R}^k
\end{tikzcd}
$$

allora: $f_B \circ f_A = f_{B\cdot A}$.

<u>Cioè</u>: il prodotto di matrici corrisponde alla

Composizione delle appl. lin. assoc.

Dim: Hanno stesso dom. e codom.

$$(f_B \circ f_A)(x) \overset{?}{=} f_{B\cdot A}(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$$

$$\begin{array}{ccc} (f_B \circ f_A)(x) & & f_{B\cdot A}(x) \\ \| & & \| \\ f_B(f_A(x)) & & (B\cdot A)\cdot x \end{array}$$

$$\|$$

$$f_B(A\cdot x)$$

$$\|$$

$$B\cdot(A\cdot x)$$

uguali per l'associativa.

$\blacksquare$