

Algebra Lineare 24/10/17

Formule Grassmann:

$W, Z \subset V$ stsp. vett.

$$\dim(W) + \dim(Z) = \dim(W \cap Z) + \dim(\underbrace{W+Z}_{\substack{\uparrow \\ \text{Span}(W \cup Z)}})$$

Conseguenze (esempio) :

• In $\mathbb{R}^4$: Z, W piani ($\dim = 2$)

$$2 + 2 = \dim(Z \cap W) + \dim(Z + W)$$

0

4

1

3

2

2

$$Z = \text{Span}(e_1, e_2)$$

$$W = \text{Span}(e_3, e_4)$$

$Z \cap W =$ un solo pto

• $\mathcal{Y}_u \mathbb{R}^4$ $\dim(Z) = 2$ $\dim(W) = 3$

$$2 + 3 = \dim(Z \cap W) + \dim(Z + W)$$

$$\begin{array}{ccc} 0 & \leftarrow \text{No} & \rightarrow 5 \\ 1 & & 4 \\ 2 & & 3 \end{array}$$

• $\mathcal{Y}_u \mathbb{R}^8$ $\dim(Z) = 3$ $\dim(W) = 4$

$$3 + 4 = \dim(Z \cap W) + \dim(Z + W)$$

0

1

2

3

7

6

5

4

$$\Rightarrow Z+W \neq \mathbb{R}^8$$

Dimo: chiamo $k = \dim(Z \cap W)$
 $p = \dim(Z)$
 $q = \dim(W)$

Tesi: $p + q = k + \dim(Z+W)$, cioè

devo far vedere che $Z+W$ ha una base con $p+q-k$ vettori -

Scelgo una base $x_1, \dots, x_k$ di $Z \cap W$;
li completo a base $x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_{p-k}$ di Z ;
li completo a base $x_1, \dots, x_k, w_1, \dots, w_{q-k}$ di W .

Dico che $\underbrace{x_1, \dots, x_k}_k, \underbrace{z_1, \dots, z_{p-k}}_{p-k}, \underbrace{w_1, \dots, w_{q-k}}_{q-k}$
sono base
di $Z+W$.

Fatto questo: $\dim(Z+W) = k + p - k + q - k = p + q - k$
 $\Rightarrow$ fine dimo -

• So no lin. indep.; supponiamo

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k + \beta_1 z_1 + \dots + \beta_{p-k} z_{p-k} \\ + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_{q-k} w_{q-k} = 0$$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1 x_1 + \dots + \beta_1 z_1 + \dots}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{Z}}} = \underbrace{-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_{q-k} w_{q-k}}_{\substack{\uparrow \\ \mathbb{W}}} (*)$$

$\Rightarrow$ tale vettore sta in $\mathbb{Z} \cap \mathbb{W}$; usiamo membro dx

$$-\gamma_1 w_1 - \dots - \gamma_{q-k} w_{q-k} = \delta_1 x_1 + \dots + \delta_k x_k$$

$$\Rightarrow \delta_1 x_1 + \dots + \delta_k x_k + \gamma_1 w_1 + \dots + \gamma_{q-k} w_{q-k} = 0$$

$$\Rightarrow (\delta_1 = \dots = \delta_k = 0) \gamma_1 = \dots = \gamma_{q-k} = 0$$

(perché $x_1, \dots, w_1, \dots$ sono base di W
 $\Rightarrow$ lin. indep.)

Sostituendo in (*) ho

$$\alpha_1 x_1 + \dots + \beta_1 z_1 + \dots = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_k = \beta_1 = \dots = \beta_{p-k} = 0$$

perché $x_1, \dots, x_k, z_1, \dots, z_{p-k}$ base di Z
 $(\Rightarrow$ lin. indep.)

• $x_1, \dots, z_1, \dots, w_1, \dots$ generano $Z+W$.

Se $u \in Z+W$ ho $u = z + w$
 $\quad \quad \quad \uparrow \quad \quad \uparrow$
 $\quad \quad \quad Z \quad \quad W$

ho $z = \alpha_1 x_1 + \dots + \beta_1 z_1 + \dots$

$$w = \gamma_1 x_1 + \dots + \delta_1 w_1 + \dots$$

$$u = z + w = (\alpha_1 + \gamma_1) x_1 + \dots + \beta_1 z_1 + \dots + \delta_1 w_1 + \dots$$



Applicazioni lineari;

Def: se V, W sono sp. vet. su $\mathbb{R}$
chiamo $f: V \rightarrow W$ lineare se

- $f(0) = 0$

- $f(\lambda \cdot v) = \lambda \cdot f(v) \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall v \in V$

- $f(v_1 + v_2) = f(v_1) + f(v_2) \quad \forall v_1, v_2 \in V$

$\mathcal{O}_{SE}$: equivale a

$$f(\lambda_1 \cdot v_1 + \lambda_2 \cdot v_2) = \lambda_1 \cdot f(v_1) + \lambda_2 \cdot f(v_2)$$

$$\forall \lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \quad \forall v_1, v_2 \in V$$

$$E_S: \quad \Gamma: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}_{\leq 1}[t]$$

$$f(x) = (2x_1 - 3x_3) + (x_1 - 5x_2 + 11x_3) \cdot t$$

Linear? $f(\alpha x + \beta y) = \alpha \cdot f(x) + \beta \cdot f(y)$

$$\begin{aligned}
 & 2(\alpha x_1 + \beta y_1) - 3(\alpha x_3 + \beta y_3) \\
 & + (\alpha x_1 + \beta y_1 - 5(\alpha x_2 + \beta y_2) + \pi(\alpha x_3 + \beta y_3))t \left\{ \begin{array}{l} \alpha((2x_1 - 3x_3) + (x_1 - 5x_2 + \pi x_3)t) \\ + \beta(2y_1 - 3y_3) + (y_1 - 5y_2 + \pi y_3)t \end{array} \right.
 \end{aligned}$$

ST

Yufatti: ogni coeff. del polinomio $f(x)$ è
polinomio omogeneo di I nelle compo di x

Ese: $f: \mathcal{F}(\{a, b, c\}, \mathbb{R}) \rightarrow M_{2 \times 2}(\mathbb{R})$

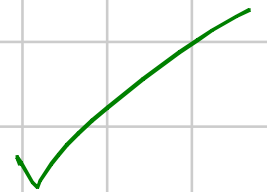
$$f(u) = \begin{pmatrix} 7u(a) - 4u(c) & \pi u(b) - 2u(c) \\ u(a) + u(b) - u(c) + u(d) & \sqrt{19} u(d) \end{pmatrix}$$

lineare poiché ogni entrata della matrice $f(u)$ è
polinom. omogr. di I nei valori di u .

Vanno bene queste e quelle mascherate.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} \quad f(x) = \log(5x_1 - \sqrt{\pi} \cdot x_2)$$

$$f(x) = 5x_1 - \sqrt{\pi} \cdot x_2$$



Oss: (1) Se $V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$ sono
lineari allora $g \circ f$ lo è

$$\begin{aligned}(g \circ f)(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) &= g(f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2)) \\ &= g(\lambda_1 f(v_1) + \lambda_2 f(v_2)) \\ &= \lambda_1 g(f(v_1)) + \lambda_2 g(f(v_2)) \\ &= \lambda_1 \cdot (g \circ f)(v_1) + \lambda_2 \cdot (g \circ f)(v_2).\end{aligned}$$

(2) Se f è lineare e invertibile
allora f^{-1} è lineare:

$$f^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2) = \lambda_1 f^{-1}(w_1) + \lambda_2 f^{-1}(w_2)$$

$$\Leftrightarrow f(f^{-1}(\lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2)) = f(\lambda_1 f^{-1}(w_1) + \lambda_2 f^{-1}(w_2))$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 f(f^{-1}(w_1)) + \lambda_2 f(f^{-1}(w_2))$$

$$\Leftrightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \quad \underline{\underline{\text{Sì}}}$$

Sia $f: V \rightarrow W$ lineare. Chiamo:

$$\text{Im}(f) = \text{"immagine di } f" = \{f(v) : v \in V\} \subset W$$

$$\text{Ker}(f) = \text{"nucleo di } f\text{"} = \{v \in V : f(v) = 0\} \subset V.$$

Prop: $\text{Im}(f)$ è stsp.vett. di W

$\text{Ker}(f)$ è stsp.vett. di V .

Dim: $\text{Im}(f)$: dati $w_1, w_2 \in \text{Im}(f)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$
devo vedere che $\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 \in \text{Im}(f)$:

$$w_1 = f(v_1) \quad w_2 = f(v_2)$$

$$\Rightarrow \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) = f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2)$$

$\text{Ker}(f)$: dati $v_1, v_2 \in \text{Ker}(f)$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

devo vedere che $\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 \in \text{Ker}(f)$.

$$f(v_1) = 0 \quad f(v_2) = 0$$

$$\Rightarrow f(\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$$

$$= \alpha_1 \cdot 0 + \alpha_2 \cdot 0 = 0$$



Es: $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 \\ -4x_1 + 7x_2 - 15x_3 \\ 5x_1 - x_2 + 11x_3 \end{pmatrix}$

$$\text{Ker}(f) = \{x \in \mathbb{R}^3 : f(x) = 0\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ -4x_1 + 7x_2 - 15x_3 = 0 \\ 5x_1 - x_2 + 11x_3 = 0 \quad \checkmark \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_2 = 5x_1 + 11x_3 \\ 3x_1 + 10x_1 + 22x_3 + 4x_3 = 0 \\ -4x_1 + 35x_1 + 77x_3 - 15x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_2 = 5x_1 + 11x_3 \\ 13x_1 + 26x_3 = 0 \\ 31x_1 + 62x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_1 + 2x_3 = 0 \\ x_2 = 5x_1 + 11x_3 \end{array} \right\}$$

$$= \left\{ x \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{l} x_1 = -2x_3 \\ x_2 = x_3 \end{array} \right\} = \text{Span} \left(\begin{array}{c} -2 \\ 1 \\ 1 \end{array} \right)$$

_____ 0 _____

Oss:

- $\text{Im}(f) = \{0\} \iff \text{Ker}(f) = V \iff f \equiv 0.$
- $\text{Im}(f) = W$ significa f surgettiva.

Prop: f iniettiva $\iff \text{Ker}(f) = \{0\}.$

Dim: $\Rightarrow$ ovvio: so che $f(0) = 0$;

inoltre = "ogni $w \in W$ ha al più una preimmagine"

$$\Rightarrow f^{-1}(0) = \{0\}$$

$$\Rightarrow \{v \in V : f(v) = 0\}$$

$\Leftarrow$: suppongo $\ker(f) = \{0\}$ e prendo

$$v_1, v_2 \in V \text{ t.c. } f(v_1) = f(v_2)$$

$$\Rightarrow f(v_1) - f(v_2) = 0$$

$$\Rightarrow f(v_1 - v_2) = 0$$

$$\Rightarrow v_1 - v_2 = 0$$

$$\Rightarrow v_1 = v_2$$



Es: $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ $f(x_1) = \begin{pmatrix} 5x_1 - 2x_2 \\ x_1 + 4x_2 \\ -9x_1 + 17x_2 \end{pmatrix}$

$$\text{Ker}(f) : \begin{cases} 5x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_1 + 4x_2 = 0 \\ -9x_1 + 17x_2 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Ker}(f) : \begin{cases} x_1 = -4x_2 \\ -20x_2 - 2x_2 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$\Rightarrow \text{Ker}(f) = \{0\} \Rightarrow f \text{ iniettiva.}$$



Teo (formule delle dimensioni): se $f: V \rightarrow W$ è lineare e $\dim(V) < +\infty$ allora

$$\dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V).$$

k n

Dim: chiamo $k = \dim(\text{Ker}(f))$
 $n = \dim(V)$.

Devo vedere che $\dim(\operatorname{Im}(f)) = n-k$ cioè
devo esibire una base di $\operatorname{Im}(f)$ con $n-k$
elementi.

Prendo $v_1, \dots, v_k$ base di $\operatorname{Ker}(f)$.

La completo a $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_n$ di V .

Dico che $\underbrace{f(v_{k+1}), \dots, f(v_n)}_{n-k}$ sono base di $\operatorname{Im}(f)$.

Fatto questo ho finito.

- Generiamo: devo esprimere $w \in \text{Im}(f)$ come comb. lin. di $f(v_{k+1}), \dots, f(v_m)$; $\exists v \in V$ t.c. $w = f(v)$; $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m$ t.c. $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$
 $\Rightarrow w = f(v) = \alpha_1 \underbrace{f(v_1)}_0 + \dots + \alpha_k \underbrace{f(v_k)}_0 + \alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \alpha_m f(v_m)$

OK

- Linearmente indipendenti:

$$\text{Suppongo } \alpha_{k+1} f(v_{k+1}) + \dots + \alpha_m f(v_m) = 0$$

$$\Rightarrow f(\alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_m v_m) = 0$$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_m v_m \in \text{Ker}(f)$$

$$\Rightarrow \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_m v_m = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k$$

(puisque $v_1, \dots, v_k$ engendrent $\text{Ker}(f)$)

$$\Rightarrow -\alpha_1 v_1 - \dots - \alpha_k v_k + \alpha_{k+1} v_{k+1} + \dots + \alpha_m v_m = 0$$

$$\Rightarrow (-\alpha_1 = \dots = -\alpha_k =) \alpha_{k+1} = \dots = \alpha_m = 0$$

(puisque $v_1, \dots, v_m$ lin. indep.)



Formule dimensionnelle :

$$f: V \rightarrow W \text{ lin} \Rightarrow \dim(\text{Ker}(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V)$$

- f injective $\iff \ker(f) = 0$

- f surjective $\iff \text{Im}(f) = W$.

Conseguenze: sia $f: V \rightarrow W$

$$\dim(V) = n, \dim(W) = m$$

- f suriettiva $\Rightarrow \dim(\ker(f)) + \dim(\text{Im}(f)) = n$

$$\Rightarrow \dim(\operatorname{Im}(f)) = n$$

$$\Rightarrow n \leq m$$

cioè: una funzione iniettiva ha dominio con $\dim \leq$ del codominio;

cioè: se $\dim \text{ dominio} > \dim \text{ codominio}$
 f non può essere iniettiva

• f surgettiva

$$\dim(\operatorname{Ker}(f)) + \underbrace{\dim(\operatorname{Im}(f))}_n = m$$

$$\overbrace{\quad\quad\quad}^m$$

$$\Rightarrow m \geq m$$

Se f "copre" tutto il codominio
allora il dominio ha $\dim \geq$ del codominio

cioè :

se dominio ha $\dim <$ del codominio

f non può essere surgettiva.

ATTENZIONE : esistono $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$
biettive con $n \neq m$
(ma non lineari) -

(Ricordo : se $f: V \rightarrow W$ è lineare biettiva
 $\Rightarrow \dim(V) = \dim(W)$.)

- Se so che $\dim(V) = \dim(W)$ e ho

$f: V \rightarrow W$ linear

* f injective $\Rightarrow 0 + \dim(\text{Im}(f)) = \dim(V) = \dim(W)$

$\Rightarrow \text{Im}(f) = W \Rightarrow f$ surjective

* f surjective $\Rightarrow \dim(\text{Ker}(f)) + \underbrace{\dim(\text{Im}(f))}_W = \dim(V)$

$\underbrace{\qquad\qquad\qquad}_W$
 $\dim(W) = \dim(V)$

$\Rightarrow \dim(\text{Ker}(f)) = 0$

$\Rightarrow f$ injective.

Riassunto : $\exists f : V \rightarrow W$ lin. biettiva
puo' esistere solo se $\dim(W) = \dim(V)$;
sapendo questo "mezza def. di
biettiva $\Rightarrow$ l'altra mezza".