

Algebra Lineare 22/11/17

5.5.6 Trovare base B di $\mathbb{R}^2$ t.c. $[x]_B = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -4x_1 + 7x_2 \end{pmatrix} \quad \forall x$

Sol. I. Uso l'info per $x = e_1$, $x = e_2$

$$[e_1]_B = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$$

$$[e_2]_B = \begin{pmatrix} -5 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\text{Se } B = (v_1, v_2) \text{ ho } \begin{cases} e_1 = 3v_1 - 4v_2 \\ e_2 = -5v_1 + 7v_2 \end{cases}$$

$$v_1 = 7e_1 + 4e_2 = \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = 5e_1 + 3e_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Svölp. II

$$[x]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -4x_1 + 7x_2 \end{pmatrix}$$

$$x = \mathcal{B} \cdot [x]_{\mathcal{B}}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} \cdot x$$

$$\Rightarrow x = \underbrace{\mathcal{B} \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \cdot x \quad \forall x$$

$$\Rightarrow B \cdot \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix} = I_2$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ -4 & 7 \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{3 \cdot 7 - 4 \cdot 5} \cdot \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 4 & 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$$

5.5.7 Trovare base B di $\{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\}$

t.c. $\left[\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$\left[\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} \right]_B = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$$

Se $B = (v_1, v_2)$ sappiamo

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v_1 - v_2$$

$\Rightarrow$

$$\begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = 5v_1 - 2v_2$$

$$v_1 = -2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = -5 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

5.5.8 Trovare base B di $\mathbb{R}^2$ t.c. $\forall A \in M_{3 \times 2}$

$$[f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3} = \begin{pmatrix} 4a_{11} + 7a_{12} & 5a_{11} - 6a_{12} \\ 4a_{21} + 7a_{22} & 5a_{21} - 6a_{22} \\ 4a_{31} + 7a_{32} & 5a_{31} - 6a_{32} \end{pmatrix}$$

Def: $f_A \cdot \mathcal{B} = \mathcal{E}_3 \cdot [f_A]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{E}_3}$

$\stackrel{||}{=} A$ $\stackrel{||}{=} I_3$

$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow A \cdot \mathcal{B} = I_3 \cdot A \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$$

$$A \cdot \mathcal{B} = A \cdot \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow B = \begin{pmatrix} 4 & 5 \\ 7 & -6 \end{pmatrix} \text{ cioè } B = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 7 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ -6 \end{pmatrix} \right)$$

5.5.9

Trovare base $\mathcal{C}$ di $\mathbb{R}^2$ t.c. $\forall A \in M_{2 \times 3}$

$$[f_A]_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2a_{11} + 5a_{21} & -2a_{12} + 5a_{22} & -2a_{13} + 5a_{23} \\ 3a_{11} - 7a_{21} & 3a_{12} - 7a_{22} & 3a_{13} - 7a_{23} \end{pmatrix}$$

Def:

$$A = f_A \cdot \mathcal{C}_3 = \mathcal{C} \cdot [f_A]_{\mathcal{C}_3}^{\mathcal{C}}$$

$A = f_A$ $\mathcal{C}_3 = I_3$

$$\begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot I_3 = C \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot A \quad \forall A$$

$$\Rightarrow A = \underbrace{\left(C \cdot \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix} \right)}_{I_3} \cdot A \quad \forall A$$

$$\Rightarrow C = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -7 \end{pmatrix}^{-1} = - \begin{pmatrix} -7 & -5 \\ -3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7 & 5 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \quad \text{Cioè } C = \left(\begin{pmatrix} 7 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \right).$$

_____ 0 _____

• $A \in M_{m \times m}$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_m} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^m a_{j, \sigma(j)}$$

• $\det$ non cambia se sostituisco una colonna

con $\bar{\sigma}$ stessa + multiplo di un'altra.

Prop: $\det({}^t A) = \det(A)$. FATTO DIFFICILE
USANDO APPROCCIO
ASSIOMATICO.

"Dim" $\det({}^t A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n ({}^t A)_{j, \sigma(j)}$

$$= \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{\sigma(j), j}$$

$$\mathcal{L}_5(n=5)$$

$$a_{5,1} \cdot a_{3,2} \cdot a_{1,3} \cdot a_{2,4} \cdot a_{4,5}$$

$$= a_{1,3} \cdot a_{2,4} \cdot a_{3,2} \cdot a_{4,5} \cdot a_{5,1}$$

$$\prod_{j=1}^5 a_{\sigma(j),j}$$

$$\sigma = (5, 3, 1, 2, 4)$$

$$\prod_{j=1}^5 a_{j,\tau(j)}$$

$$\tau = (3, 4, 2, 5, 1)$$

$$\Rightarrow \tau = \sigma^{-1}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \det({}^t A) &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n a_{j, \sigma^{-1}(j)} \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\sigma^{-1}) \cdot \prod_{j=1}^n a_{j, \sigma^{-1}(j)} \\ &= \sum_{\tau \in \mathfrak{S}_n} \operatorname{sgn}(\tau) \cdot \prod_{j=1}^n a_{j, \tau(j)} \end{aligned}$$

$$= \det(A) .$$



Con : il det non cambia se sostituisco
una riga con sé stessa + multiplo altra

Sviluppi di Laplace

Def: se $A \in M_{m \times m}$ iudico con

$A^{ij} \in M_{(m-1) \times (m-1)}$ ottenute da A

cancellando i -esima riga

j -esima colonna

Es: $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & 9 & 7 \\ \sqrt{2} & -4 & 11 & e \\ 0 & -1 & 4 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

$$A^{23} = \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ \sqrt{2} & -4 & e \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

Teo: per ogni j si ha:

• sviluppo del det
lungo j -esima
colonna

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+j} a_{ij} \det(A^{i,j})$$

- Sviluppo del det
lungo 1-esima
riga

$$\det(A) = \sum_{i=1}^n (-1)^{i+1} a_{ji} \det(A^{ji})$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 7 & 3 & -4 & 2 \\ 5 & 1 & 3 & 1 \\ \sqrt{2} & -4 & 11 & e \\ 0 & -1 & 4 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$

Sviluppo lungo IV colonna

$$\det(A) = + (-4) \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 1 & 1 \\ \sqrt{2} & -4 & e \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$- 9 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ \sqrt{2} & -4 & e \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} + 11 \det \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & \pi \\ 0 & -1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} - 4 \cdot \det \begin{pmatrix} 7 & 3 & 2 \\ 5 & 1 & \pi \\ \sqrt{2} & -4 & e \end{pmatrix}$$

Oss: conviene sviluppare lungo riga o colonna che abbia molti zeri; anzi: prima di sviluppare uso le operaz. su righe e colonne per creare zeri.

Con: det è lineare anche nelle righe e cambia segno scambiando due righe.

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 7 \\ 6 & 8 & 4 & -2 \\ 3 & -5 & 1 & 9 \\ 2 & 1 & 3 & -4 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 5 & 2 & -1 & 7 \\ 3 & 4 & 2 & -1 \\ 3 & -5 & 1 & 9 \\ 2 & 7 & 3 & -4 \end{pmatrix} \leftarrow \text{cerco 0 qui}$$

↑
usando lui

$$= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -7 & 15 \\ -5 & 4 & -10 & 15 \\ 13 & -5 & 16 & -11 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Sviluppo $\rightarrow$

$$= 2 \cdot \left(-0 \cdot \det \begin{pmatrix} 2 & -7 & 15 \\ 4 & -10 & 15 \\ -5 & 16 & -11 \end{pmatrix} + 1 \cdot \det \begin{pmatrix} -7 & 15 \\ -5 & 15 \\ 13 & 16 & -11 \end{pmatrix} - 0 \cdot \det \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} + 0 \cdot \det \begin{pmatrix} \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \\ \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \right)$$

creo zeri qui



usando lui

$$\begin{pmatrix} -7 & 15 \\ -5 & 15 \\ 13 & 16 & -11 \end{pmatrix}$$

$$= 2 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -7 & 15 \\ 0 & -45 & 90 \\ 0 & 107 & -206 \end{pmatrix}$$

↓ sviluppo

$$= 2 \cdot 45 \cdot \det \begin{pmatrix} 1 & -7 & 15 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & 107 & -206 \end{pmatrix}$$

$$= 90 \cdot \det \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 107 & -206 \end{pmatrix} = 90 \cdot (206 - 214) \\ = 90 \cdot (-8) = -720.$$

Teorema di Binet: $\det(A \cdot B) = \det(A) \cdot \det(B)$

QUESTO E' DIFFICILE
CON APPROCCIO
PERMUTAZIONI

"Dim"

: se $\det(B) = 0$ ho che

B e' non invertibile $\Rightarrow \ker(B) \ni v \neq 0$

$\Rightarrow \ker(A \cdot B) \ni v \neq 0 \Rightarrow A \cdot B$ non invertibile

$\Rightarrow \det(A \cdot B) = 0$: le formule vale.

Se $\det(B) \neq 0$ posso $f: M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$

$$f(M) = \frac{\det(M \cdot B)}{\det(B)}$$

Se verifico che f è lineare nelle colonne,

cambia segno scambiando 2 col, vale 1 su 1m

il teorema dell'approccio arriouabico dice $f = \det$

$$\Rightarrow f(A) = \det(A) \Rightarrow \frac{\det(A \cdot B)}{\det(B)} = \det(A)$$

$\Rightarrow$ la tesi -

Le verifiche sono abbastanza facili. 

————— 0 —————

Visto: def assiomatiche + formule
+ metodi calcolo per det

Sappones: A invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Prop: se $\det(A) \neq 0$ ho $(A^{-1})_{ij} = (-1)^{i+j} \frac{\det(A_{ji})}{\det(A)}$

Es: $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}; \quad A^{-1} = \frac{1}{a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}} \cdot \begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$

$$\underline{\text{Es:}} \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ -3 & 4 & 7 \\ -2 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$\det(A) = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 11 \\ -11 & 0 & 31 \\ -2 & -7 & 6 \end{pmatrix} = -(-1) \det \begin{pmatrix} 0 & 11 \\ -11 & 31 \end{pmatrix} \\ = 121$$

$$A^{-1} = \frac{1}{121} \cdot \begin{pmatrix} 31 & & \\ -4 & & \\ -11 & & \end{pmatrix}$$

$$A \cdot A^{-1} = \frac{1}{121} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 31 & \cdot & \cdot \\ -4 & \cdot & \cdot \\ 11 & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

11