

Algebra Lineal 21/11/17

RECUPERO (RP) : 23/11 , 11:30-12:30 , B2.4

5.5.3

$$(a) \quad V = \mathbb{R}^2 \quad B = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \right) \quad B' = \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} \right)$$

Cambio de B a B' : la M t.c. $B' = B \cdot M$

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{25}{29} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{22}{29} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \frac{23}{29} \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} + \frac{4}{29} \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$M = \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 22 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -5 \end{pmatrix} = -\frac{4}{14} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{22}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \frac{23}{14} \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{25}{14} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$N = \frac{1}{14} \begin{pmatrix} -4 & 23 \\ 22 & -25 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} M \cdot N &= \frac{1}{28} \cdot \frac{1}{14} \cdot \begin{pmatrix} 25 & 23 \\ 22 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -4 & 23 \\ 22 & -25 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{28} \cdot \frac{1}{14} \begin{pmatrix} 406 & 0 \\ 0 & 406 \end{pmatrix} = I_2 \quad \checkmark \end{aligned}$$

$$N \cdot M = I_2 \quad \text{аналого (non save)}$$

$$(b) \quad V = \{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 2}[t] : p(-1) = 0 \} \quad (\dim = 2)$$

$$\mathcal{B} = (1+t, 1-t^2) \quad \mathcal{B}' = (1+2t+t^2, 2-t-3t^2) \quad (\checkmark)$$

$$1+2t+t^2 = 2(1+t) - 1(1-t^2)$$

$$2-t-3t^2 = -1(1+t) + 3(1-t^2)$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$1+t = \frac{3}{5}(1+2t+t^2) + \frac{1}{5}(2-t-3t^2)$$

$$1-t^2 = \frac{1}{5}(1+2t+t^2) + \frac{2}{5}(2-t-3t^2)$$

$$N = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$M \cdot N = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

5.5.5 verify formula change basis for $[f]$:

$$f: \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 - 2x_3 = 0\} \rightarrow \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 - x_2 + x_3 = 0\}$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} x_2 - x_1 \\ 5x_3 - x_2 \\ 3x_1 + x_3 \end{pmatrix}$$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad B' = \left(\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$C = \left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right) \quad C' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$f(x) = \underbrace{\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}}_A \cdot x$$

Tuttavia f non è

$$f_A : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3 :$$

se verificassimo che $f_A(V) \subset W$ possiamo

definire $f = f_A \Big|_{\substack{W \\ V}}$

← abbreviazione a W
del codominio

← restrizione a V
del dominio

legittima
pratica
a chi

...

$$(Es: f: \mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{Z}, f(m) = -3m + 5,$$

$$f|_{\mathbb{N}} \quad \text{he senso}$$

$$f|_{\mathbb{N}} \quad \{m \in \mathbb{Z} : m \geq 7\} \quad \text{non he senso perché}$$

$$f(\mathbb{N}) \not\subseteq \{m \in \mathbb{Z} : m \geq 7\}$$

$$\text{divice} \quad f|_{\mathbb{N}} \quad \{m \in \mathbb{Z} : m \leq 5\}$$

he senso -)

... ed $\mathcal{L}$ automatico che $\mathcal{L}$ è lineare

(MORALE: se in un compito di cdo
"provare che ... $\mathcal{L}$ è lineare"

non serve quasi mai fare i conti; invece

ci si appoggia a fatti generali

— restrizione, composizione, sovrapposizione ...)

Proviamo: $f_A(V) \subset W$:

$$(x_2 - x_1) - (5x_3 - x_2) + 3x_1 + x_3$$

$$= 2x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 2(x_1 + x_2 - 2x_3)$$

nullo per $x \in V$

$$\Rightarrow \underline{\underline{0_K}}$$

$$[f]_{\beta}^e$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 4 \end{pmatrix} = -4 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 8 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 4 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{\alpha}^e = \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 9 \\ 11 \end{pmatrix} = 13 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 7 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{pmatrix} + 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} - 1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$C' = C \cdot N \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} = -1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$N = \begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$$

$$N^{-1} = \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix} \right]$$

$$[f]_{B'}^{e'} = N^{-1} \cdot [f]_B^e \cdot M$$

$$\begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} -4 & -3 \\ 8 & 4 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -3 & -1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -11 & -1 \\ 20 & 4 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 13 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$



$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$\det_{3 \times 3}$

(Sarrus)

Proprietà caratterizzanti di $\det_n : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$:

- linearità in ciascuna colonna
- cambia segno con scambio colonne
- vale 1 su I_n .

Formule!

S_n = l'insieme delle permutazioni di $\{1, \dots, n\}$.

Def: chiamo sgnatura di $\sigma \in S_n$

$$\text{sgn}(\sigma) = \prod_{1 \leq i < j \leq n}$$

$$\frac{\sigma(j) - \sigma(i)}{j - i}$$

produttoria

Oss: $\text{sgn}(\sigma) \in \{\pm 1\}$ poiché
al denominatore ci sono tutte le differenze
 $j-i$ con $1 \leq i < j \leq n$, e al numeratore
anche, con al più alcune cambiate di segno:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

↓ σ

5	1	4	3	6	2
---	---	---	---	---	---

$$\begin{aligned}
 \Delta p_w(\sigma) = & \frac{1-5}{2-1} \cdot \frac{4-5}{3-1} \cdot \frac{3-5}{4-1} \cdot \frac{6-5}{5-1} \cdot \frac{2-5}{6-1} \\
 & \cdot \frac{4-1}{3-2} \cdot \frac{3-1}{4-2} \cdot \frac{6-1}{5-2} \cdot \frac{2-1}{6-2} \cdot \frac{3-4}{4-3} \cdot \frac{6-4}{5-3} \\
 & \cdot \frac{2-4}{6-3} \cdot \frac{6-3}{5-4} \cdot \frac{2-3}{6-4} \cdot \frac{2-6}{6-5} = +1
 \end{aligned}$$

Prop: $\text{sgn}(\sigma_1 \circ \sigma_2) = \text{sgn}(\sigma_1) \cdot \text{sgn}(\sigma_2)$

(Esercizio)

————— 0 —————

Def: chiamo trasposizione una permutazione
che scambia tra loro 2 elementi:

1	2	3	4	5	6
---	---	---	---	---	---

↓ τ

1	5	3	4	2	6
---	---	---	---	---	---

Oss : (1) $\text{sgn}(\tau) = -1$ (Esercizio)

(2) Ogni permutazione è composizione

di alcune Trasposizioni:

Corollario: per calcolare $\text{sgn}(\sigma)$

esprimo σ come $\sigma = \tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$

e ho $\text{sgn}(\sigma) = (-1)^k = \begin{cases} +1 & k \text{ pari} \\ -1 & k \text{ dispari} \end{cases}$

ATT: l'espressione di σ come $\tau_1 \circ \dots \circ \tau_k$

non è unica, e non è k , però la parità di k è determinata da σ .

Notazione

$[1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6]$



$[5 | 3 | 7 | 6 | 2 | 4]$

he indico $(5, 3, 7, 6, 2, 4)$.

La esprimo come prodotto di transp:

$$\sigma = (5, 3, 1, 6, 2, 4) \rightarrow (1, 3, 5, 6, 2, 4)$$

$$\rightarrow (1, 2, 5, 6, 3, 4)$$

$$\rightarrow (1, 2, 3, 6, 5, 4)$$

$$\rightarrow (1, 2, 3, 4, 5, 6)$$

$$\sigma = \tau_1 \circ \tau_2 \circ \tau_3 \circ \tau_4 \Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = +\underline{1}$$

$(5, 3, 1, 6, 2, 4) \rightarrow (3, 5, 1, 6, 2, 4)$
 $\rightarrow (3, 1, 5, 6, 2, 4)$
 $\rightarrow (1, 3, 5, 6, 2, 4)$
 $\rightarrow (1, 3, 5, 2, 6, 4)$
 $\rightarrow (1, 3, 2, 5, 6, 4)$
 $\rightarrow (1, 2, 3, 5, 6, 4)$
 $\rightarrow (1, 2, 3, 4, 5, 6)$

$$\sigma = \tau_1' \circ \dots \circ \tau_p' \quad (\Rightarrow \operatorname{sgn}(\sigma) = +1)$$

$$1 \times 1 \quad \det(a_{11}) = a_{11}$$

$$2 \times 2 \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$3 \times 3 \quad \det \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

n	# addendi	ogni addendo c' prod. di ... coeff
1	1	1
2	2	2
3	6	3

$n!$

$n=3$

$$\begin{pmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & 1 & \\ & & 1 \\ 1 & & \end{pmatrix} \begin{pmatrix} & & 1 \\ 1 & & \\ & 1 & \end{pmatrix}$$

$$n=1 \quad (1)$$

$$n=2 \quad \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 1 & \\ & 1 \end{pmatrix}$$

due?

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \odot \\ \cdot & \odot & \cdot \\ \odot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} \odot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \odot \\ \cdot & \odot & \cdot \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} \cdot & \odot & \cdot \\ \odot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \odot \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \cdot & \odot & \cdot \\ \odot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \odot & \cdot \end{pmatrix}
 \begin{pmatrix} \odot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \odot \\ \cdot & \odot & \cdot \end{pmatrix}$$

esattamente uno su ogni riga e uno
su ogni colonna :

ogni termine è :

$$\prod_{j=1}^m a_{j, \underbrace{\sigma(j)}}$$

con σ permutazione

$\Rightarrow$ per $n = 1, 2, 3$

$$\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \prod_{j=1}^n a_{j, \sigma(j)}$$


reifica

$n=2$

$$+ a_{11} a_{22} - a_{12} a_{21}$$

$$\sigma = (12) = id$$

$$sgn = +1$$

$$\sigma = (21)$$

$$sgn = -1$$

$n=3$

$$+ a_{11} a_{22} a_{33} - a_{12} a_{23} a_{31} - a_{13} a_{21} a_{32} + \dots$$

$$\sigma = (123)$$

$$sgn = +1$$

$$\sigma = (231)$$

$$sgn = +1$$

$$\sigma = (132)$$

$$sgn = -1$$

Fatto : $\det(A) = \sum_{\sigma \in S_n} \text{sgn}(\sigma) \cdot \prod_{j=1}^n a_{j, \sigma(j)}$

$\forall A \in M_{n \times n}$

Oss : per $n=4$ ci sono $4! = 24$ addendi
(non vale alcun analogo di Sarrus con $n \geq 4$).

Es: $\det(A)$ $A \in M_{5 \times 5}$ hat 120 addendi.
 tre cui

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (3 \ 1 \ 5 \ 2 \ 4)$$

1 3 5 2 4
 1 2 5 3 4

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sigma = (2 \ 3 \ 4 \ 1 \ 5)$$

1 3 4 2 5
 1 2 4 3 5

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

$$+ a_{13} a_{21} a_{35} a_{42} a_{54}$$

$$\begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array}$$

$$- a_{12} a_{23} a_{34} a_{41} a_{55}$$

Problems: $n!$ è grande.

Oss: dagli assiomi del det segue che se sostituisco una colonna con se' stessa più un multiplo di un'altra il det

non cambia:

$$A = (c_1, c_2, c_3, c_4, c_5)$$

$$\det(c_1, c_2, c_3, c_4 - \frac{3}{2} \cdot c_1, c_5)$$

$$= \det(c_1, c_2, c_3, c_4, c_5) - \frac{3}{2} \underbrace{\det(c_1, c_2, c_3, c_1, c_5)}_0$$

$$= \det(A).$$

Strategie: usare ripetutamente tale operazione
sulle colonne per ottenere molti zeri.