18 / 10 / 17

<u>Es:</u> 4 . 2 . 6

$$X = \{ x \in \mathbb{R} \mid -4x_1 + 3x_2 + 7x_3 = 0 \}$$

Cerco base di X: cioè vettori $w_1, \dots, w_k \in X$:

(1) $\mathrm{Span}(w_1, \dots, w_k) = X$

(2) $w_1, \dots, w_k$ sono indipendenti.

$$4x_1 = 3x_2 + 7x_3 \implies x_1 = \frac{3}{4}x_2 + \frac{7}{4}x_3$$

$$x_1 = \frac{3}{4} x_2 + \frac{7}{4} x_3$$

$$X = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{3}{4} x_2 + \frac{7}{4} x_3 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} =$$

$$= \left\{ x_2 \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_2, x_3 \in \mathbb{R} \right\} = \mathrm{Span}\left(\overset{w_1}{\begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}}, \overset{w_2}{\begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}} \right)$$

w_1 e w_2 generano. Verifichiamo che sono anche indipendenti:

$$a w_1 + b w_2 = 0 \iff a \begin{pmatrix} \frac{3}{4} \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} \frac{7}{4} \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \implies \begin{array}{l} \dots = 0 \\ a = 0 \\ b = 0 \end{array}$$

$\implies$ w_1 e w_2 sono lin. ind. $\implies$ w_1, w_2 è una base di X

Es: 4.2.7

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{matrix} 3x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0 \\ -4x_1 + x_2 + 7x_3 = 0 \end{matrix} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} \frac{19}{11} x_3 \\ -\frac{1}{11} x_3 \\ x_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\begin{cases} x_2 = 4x_1 - 7x_3 \\ 3x_1 + 8x_1 - 14x_3 - 5x_3 = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x_1 = \frac{19}{11} x_3 \\ x_2 = -\frac{1}{11} x_3 \end{cases}$$

$$X = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} \frac{19}{11} \\ -\frac{1}{11} \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\} \qquad w_1 = \begin{pmatrix} \frac{19}{11} \\ -\frac{1}{11} \\ 1 \end{pmatrix} \text{ è una base di } X$$

Anche: $v_1 = \begin{pmatrix} 19 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$ è una base.

Es: 4.2.9

$$X = \left\{ x \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} 2x_1 - x_2 + 5x_3 = 0 \\ 5x_1 - 7x_2 + 2x_3 = 0 \\ 3x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$$\begin{cases} x_2 = 2x_1 + 5x_3 \\ 5x_1 - 14x_1 - 35x_3 + 2x_3 = 0 \\ \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_1 = -\frac{11}{3} x_3 \\ x_2 = -\frac{7}{3} x_3 \\ 3\left(-\frac{11}{3}\right) x_3 - 3\left(-\frac{7}{3}\right) x_3 + 4x_3 = 0 \end{cases}$$

$$\Downarrow$$

$$0 \cdot x_3 = 0$$

$$X = \left\{ x_3 \begin{pmatrix} -\frac{11}{3} \\ -\frac{7}{3} \\ 1 \end{pmatrix} \;\middle|\; x_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

$\begin{pmatrix} 11 \\ 7 \\ -3 \end{pmatrix}$ è una base.

<u>Es</u>: 4.2.20:

$$X = \{ A \in \mathcal{M}_{n \times n} \mid {}^tA = -A \}$$

$A = (a_{ij})$ $\qquad ({}^tA)_{ij} = a_{ji}$

$n = 2$: $\qquad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \qquad {}^tA = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \end{pmatrix}$

$A = -{}^tA \iff a_{12} = -a_{21}, \quad a_{11} = 0, \quad a_{22} = 0$

$A \in X \iff A = \begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ -a_{12} & 0 \end{pmatrix} = a_{12} \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 0 & +1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ è una base di X

$E_{12} - E_{21} = B_{12}$

In generale:

$$A \in X \iff {}^tA = -A \iff a_{ii} = -a_{ii} \quad \forall i = 1, \dots, n$$

$$\forall i, j : i<j \quad a_{ij} = -a_{ji}$$

$$\iff a_{ii} = 0, \ \forall i = 1, .., n, \quad \text{e} \quad a_{ij} = -a_{ji}, \forall i \neq j$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ -a_{ji} & & 0 \end{pmatrix}.$$

Sia $B_{ij} = E_{ij} - E_{ji}$ $\quad i<j$.

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{ccccc} & & j & \\ & & \downarrow & \end{array} \\ i \rightarrow & \begin{pmatrix} 0 & \cdots & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & & 1 & & \vdots \\ \vdots & & 0 & & \vdots \\ 0 & -1 & & & 0 \end{pmatrix} \leftarrow j \\ & \begin{array}{ccccc} & \uparrow & & & \\ & i & & & \end{array} \end{array}$$

Le matrici B_{ij} sono una base di X

Le B_{ij} sono indipendenti.

$$\sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} B_{ij} = 0 \iff \sum_{1 \leq i < j \leq n} \lambda_{ij} (E_{ij} - E_{ji}) = 0$$

combinazione delle matrici della base canonica.

$$\iff \lambda_{ij} = 0 \quad \forall \ i < j$$

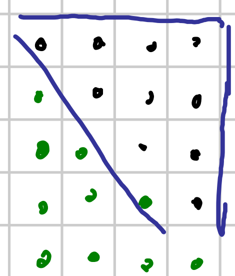
se $A \in X$ ho: $A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} (E_{ij} - E_{ji}) =$

$$= \sum_{1 \leq i < j \leq n} a_{ij} B_{ij} \implies \{B_{ij}\} \text{ generano}$$

$\implies$ sono una base.

$$\begin{pmatrix} 0 & & a_{ij} \\ & \ddots & \\ -a_{ij} & & 0 \end{pmatrix}$$

$$\sum_{i<j} a_{ij}\,(E_{ij} - E_{ji}) = A$$



$n = 5$

4×5 pallini

$\frac{4 \times 5}{2}$ pallini neri

Se faccio lo stesso con n arbitrario: $n(n-1)$ pallini

$\frac{n \times (n-1)}{2}$ pallini neri

$\Rightarrow$ X ha dimensione $= \frac{n(n-1)}{2}$

Esercizi: 4.2.24 e 4.2.26.