

Algebra lineare 18/10/17

4.1.2 (c)

$$v = \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 7 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 13 \\ 8 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 6 \\ 1 \\ 9 \end{pmatrix}$$

$$v \notin \text{Span}(w_1, w_2)$$

$\exists \alpha, \beta$ l.c. $v = \alpha w_1 + \beta w_2$?

$$\begin{cases} \cancel{2}\alpha + \cancel{6}\beta = \cancel{4} \\ -13\alpha + \beta = -2 \quad \checkmark \\ 8\alpha + 9\beta = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 13\alpha - 2 \\ \alpha + 39\alpha - 6 = 2 \\ 8\alpha + 117\alpha - 18 = 7 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = 13\alpha - 2 \\ \cancel{40\alpha = 8} \\ 125\alpha = 25 \quad \checkmark \end{cases} \quad \alpha = 1/5$$

$$\begin{cases} \alpha = 1/5 \\ \beta = 3/5 \end{cases} \quad \text{soluz. unica}$$

(e)

ST, espn. unica.

$$v = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \\ -8 \end{pmatrix} \quad w_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ -3 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2\alpha + 5\beta + 3\gamma = -1 \\ 2\alpha + \beta - \gamma = 3 \quad \checkmark \\ -3\alpha + 2\beta + 5\gamma = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = 2\alpha + \beta - 3 \\ 2\alpha + 5\beta + 6\alpha + 3\beta - 9 = -1 \\ -3\alpha + 2\beta + 10\alpha + 5\beta - 15 = -8 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = 2\alpha + \beta - 3 \\ \cancel{8\alpha + 8\beta = 8} \\ 7\alpha + 7\beta = 7 \quad \checkmark \end{cases} \quad \alpha + \beta = 1$$

$$\begin{cases} \alpha = 1 - \beta \\ \gamma = -1 - \beta \end{cases}$$

Infinitely soluz.

$S\bar{L}$, espressioni non uniche.

4.1.3 (d)

$$v = 7 + t - t^2$$

$$w_1 = 5 - t + 2t^2$$

$$w_2 = -2 - 2t + 3t^2$$

$$w_3 = 1 - 5t + 8t^2$$

$$V = \mathbb{R}[t]$$

$$(V = \mathbb{R}_{\leq 2}[t])$$

$$v \in \text{Span}(w_1, w_2, w_3)?$$

$$\exists \alpha, \beta, \gamma \text{ t.c. } v = \alpha w_1 + \beta w_2 + \gamma w_3?$$

$$\begin{cases} 5x - 2\beta + \gamma = 7 & \checkmark \\ -x - 2\beta - 5\gamma = 1 & \checkmark \\ 2x + 3\beta + 8\gamma = -1 & \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2\beta - 5\gamma - 1 \\ -10\beta - 25\gamma - 5 - 2\beta + \gamma = 7 \\ -4\beta - 10\gamma - 2 + 3\beta + 8\gamma = -1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2\beta - 5\gamma - 1 \\ \frac{-12\beta - 24\gamma = 12}{- \beta - 2\gamma = 1} & \checkmark \end{cases} \quad \beta + 2\gamma = -1$$

$$\begin{cases} \beta = -1 - 2\gamma \\ x = 1 - \gamma \end{cases}$$

Infinita soluz.

S_L, espz. non unica.

4.1.5 (b) $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 7x_1 - 3x_2 + 2x_3 = 0\}$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -1 \end{pmatrix}$$

w_1, w_2 generano W ? Se sì, ogni el. di W
 ha espr. unica
 con l. lin. di w_1, w_2 ?
 (w_1, w_2 è base?)

Verifica preliminare: $w_1, w_2 \in W$:

$$7 \cdot 1 - 3 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) = 0 \quad \checkmark$$

$$7 \cdot 2 - 3 \cdot 4 + 2 \cdot (-1) = 0 \quad \checkmark$$

Preso $x \in W$ mi chiedo se esistono α, β t.c.

$$x = \alpha w_1 + \beta w_2$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = x_1 \\ \alpha + 4\beta = x_2 \\ -2\alpha - \beta = x_3 \end{cases}$$

Incognite: α, β

non sono liberi
perché deve
valere $x \in W$

$$\frac{3x_2 - 7x_1}{2}$$

$$\begin{cases} \alpha = x_1 - 2\beta \\ x_1 - 2\beta + 4\beta = x_2 \\ 4\alpha + 2\beta = 7x_1 - 3x_2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = \frac{1}{2}(x_2 - x_1) \\ \alpha = 2x_1 - x_2 \\ 8x_1 - 4x_2 + x_2 - x_1 = 7x_1 - 3x_2 \quad \checkmark \end{cases}$$

Σ/π (e^c base) -

$$(c) \quad \{ x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad w_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Verifica $w_1, w_2, w_3 \in W$: ok -

Sia $x \in W$; lea α, β, γ

$$\begin{cases} -\alpha + 3\beta = 2x_3 - 3x_2 \\ \alpha - \beta + 2\gamma = x_2 \quad \checkmark \\ \alpha + 3\gamma = x_3 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = x_3 - 3x \\ \beta = x + 2x - x_2 = x_3 - x - x_2 \\ -x_3 + 3x + 3x_3 - 3x - 3x_2 = 2x_3 - 3x_2 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\Rightarrow \forall x \quad \begin{matrix} \alpha = x_3 - 3x \\ \beta = x_3 - x_2 - x \end{matrix} \quad \text{e' soluz:}$$

$\Rightarrow$ geramos ma nov soluc lin. indep.

$$4.1.6 (a) \quad W = \{x \in \mathbb{R}^4 : x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 = 0\}$$

$$w_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Verifco $w_1, w_2 \in W$: ok.

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = \alpha_1 \\ \alpha - \beta = \alpha_2 \quad \checkmark \\ \alpha + \beta = \alpha_3 \quad \checkmark \\ 5\alpha = \alpha_1 + 3\alpha_2 + \alpha_3 \end{cases}$$

Mi chiedo se
 $\forall \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$
 esista soluz.

$$\begin{cases} \alpha = (\alpha_2 + \alpha_3)/2 \\ \beta = (\alpha_3 - \alpha_2)/2 \\ \frac{1}{2}(\alpha_2 + \alpha_3) + \alpha_3 - \alpha_2 = \alpha_1 \Leftrightarrow -\alpha_2 + 3\alpha_3 = 2\alpha_1 \end{cases}$$

Falsa ad es. $\alpha_1 = 1 \quad \alpha_2 = 0 \quad \alpha_3 = 0$.

Non generano _

_____ 0 _____

Perché l'estrazione funziona?

→ parto da insieme di generatori

→ li esamino in ordine scartando quelli che appartengono al generato di quelli finora tenuti.

Lem
→
(2) ⇒ (1) ogni volta tempo $w_{i_k} \notin \text{Span}(w_{i_1}, \dots, w_{i_{k-1}})$
⇒ ogni volta sono lin. indep ⇒ alla fine

Lem
→
(2) ⇒ (3) ad ogni istante il generato di tutti quelli esaminati è uguale al generato

di vettori tenuti $\Rightarrow$ allo fine
il generato di vettori tenuti è il
generato di tutti $\Rightarrow$ è V

Estrazione = algoritmo (x ordinati)

Metodo per completamento :

$v_1, \dots, v_k$ lin indep $\rightsquigarrow v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m$
base

$v_1, \dots, v_k, w_1, \dots, w_m$
base
generatori

$\rightsquigarrow$
estraggo

$v_1, \dots, v_k, w_{k+1}, \dots, w_m$
OK!

$$\underline{\text{Es:}} \quad W = \{x \in \mathbb{R}^4; \quad 2x_1 - x_2 + 3x_3 + 5x_4 = 0\}$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Sono in W e lin. indep.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{no}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{no}$$

verificare che questa è base di W

ESTRAZIONE:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

————— 0 —————

Dimensione di sottospazi.

Leu: se $\dim(V) = +\infty$ (non ha basi)
allora $\forall k \in \mathbb{N}$ esiste in V un
sistema di k vettori lin. indep.

Dim: Per induzione. $k=0$ ok

Se ho $v_1, \dots, v_k$ lin. indep. ;

$v_1, \dots, v_k$ generano?
 $\nearrow$ sì : sono base : assurdo
 $\searrow$ no : $\exists v_{k+1} \notin \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

Leu
 $\Rightarrow$
(2) $\Rightarrow$ (1)

$v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ lin. indep. $\square$

Prop: se $\dim(V) = m < +\infty$ e $W \subset V$ e' sottosp. vett. allora $\dim(W) = m < +\infty$;

inoltre $m \leq n$ e $m = n$ solo se $W = V$.

Dimo: Se W avesse $\dim = +\infty$ allora
contenerebbe $m+1$ vet. lin. indep.
 $\Rightarrow$ anche V : assurdo.

Se $w_1, \dots, w_m$ è base di W allora
 $w_1, \dots, w_m$ sono lin. indep. in $V \Rightarrow m \leq n$.

Se $m = n$ allora $w_1, \dots, w_m$ sono lin.
indip in V ; se non riuscissero ne troverei
 $m+1$ lin. indep.; assurdo.

$\Rightarrow V = \text{Span}(w_1, \dots, w_m) = W$.



FATTO: se $\dim(V) = m$ e $v_1, \dots, v_m \in V$

- Sapendo che generano concludo che sono lin. indep.
- Sapendo che sono lin. indep. concludo che generano —
↙

Cioè: per vettori nel numero giusto per essere base basta mezzo verifico della proprietà di essere base.

$$I_5: \quad V = \mathbb{R}^2 \quad v_1 = \begin{pmatrix} 7 \\ -3 \end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix} 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

So che $\dim(\mathbb{R}^2) = 2$; α prova che v_1, v_2
 sono lin. indip.
 concludo che sono base:

$$\begin{cases} 7\alpha + 4\beta = 0 \\ -3\alpha + 5\beta = 0 \end{cases} \xrightarrow{0} \alpha = \beta = 0$$

$$5 \cdot I - 4 \cdot II : 47\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = 0$$

$$3 \cdot I + 7 \cdot II : 47\beta = 0 \Rightarrow \beta = 0 \quad \int$$

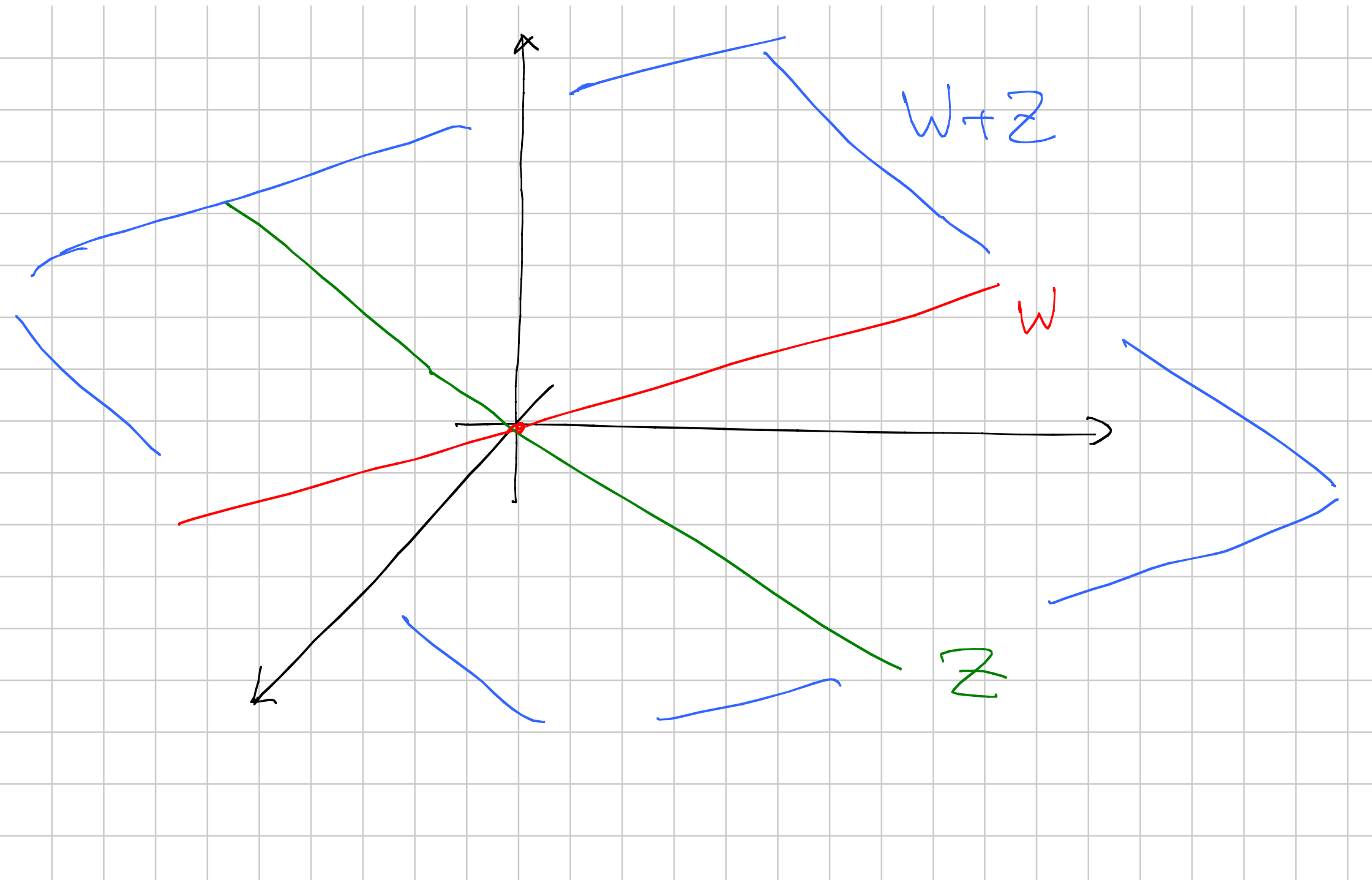
Fisso V sp. vett., W, Z sottospazi vett.

Visto: $W \cap Z$ è sempre sottosp.

$W \cup Z$ è sottosp solo se $W \subset Z$ o $Z \subset W$.

Def: chiamo $W + Z$ il generato di $W \cup Z$

↑
muovo



Prop: $W+Z = \{w+z : w \in W, z \in Z\}$.

Dim: chiamiamo $X = \{w+z : w \in W, z \in Z\}$;
devo vedere che è $\text{Span}(W \cup Z)$, cioè:

1) contiene $W \cup Z$, ovvero contiene W e Z

2) è sottosp.

3) se Y è un altro sottosp. che contiene W e Z allora Y contiene X .

Sufficienza:

1) Per provare che $X \supset W$ prendo $w \in W$ generico e verifico che sta in X , cioè che posso scriverlo come

$$w = \overset{w}{\underbrace{\quad}} + \overset{0}{\underbrace{\quad}} \quad \text{OK}$$

$\underbrace{\quad}_{W} \quad \quad \quad \underbrace{\quad}_{Z}$

Analogamente: $X \supset Z$.

2) $x_1, x_2 \in X$ $x_1 = \underbrace{w_1}_{W} + \underbrace{z_1}_{Z}$ $x_2 = \underbrace{w_2}_{W} + \underbrace{z_2}_{Z}$

$$\Rightarrow \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 = \underbrace{(\alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2)}_{\in W} + \underbrace{(\alpha_1 z_1 + \alpha_2 z_2)}_{\in Z} \quad \text{OK}$$

3) Se Y è sottosp. che contiene W e Z
 devo provare che ogni generico punto
 $x = w + z$ di X sta in Y :

$$\begin{array}{l} Y \supset W \ni w \\ Y \supset Z \ni z \end{array} \Rightarrow w + z \in Y.$$



Teo (formula di Grassmann) :

$$\dim(Z) + \dim(W) = \dim(Z \cap W) + \dim(Z + W).$$

$$V = \mathbb{R}^3, \quad W, Z \subset \mathbb{R}^3 \quad \dim(W) = \dim(Z) = 2$$

(W, Z piani p.u.)

due casi

- coincidono : $2 + 2 = 2 + 2$
 $W = Z = W \cap Z = W \cup Z = W + Z$
- non coincidono $2 + 2 = 1 + 3$

$$W \cap Z = \text{retta}$$
$$W + Z = \mathbb{R}^3$$

osserviamo :

$$2 + 2 = 0 + 4$$

$\parallel$

$$\dim(Z+W)$$

$$\wedge$$
$$3$$

impossibile



due piani in $\mathbb{R}^3$ non possono
intersecarsi in un punto