

Algebra Lineare 17/10/17

24/10 : 15:35 - 17:00

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ base di V

$$[v]_{\mathcal{B}} = x \in \mathbb{R}^m$$

$$v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$$

$$[\cdot]_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

bijezione che rispetta
le operazioni

$\Rightarrow V \stackrel{c}{=} \mathbb{R}^n$ come sp. vettoriale.

Q: $\mathbb{R}^n \neq \mathbb{R}^m$ come sp. vett. per $n \neq m$.

Teo: se V ammette basi, tutte le basi di V hanno lo stesso numero di elementi.

Es: $\begin{pmatrix} 7 \\ -2 \\ 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \\ -11 \end{pmatrix}$ non sono una base di $\mathbb{R}^3$
perché $\mathbb{R}^3$ ha base (e_1, e_2, e_3)

Es: $\begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$ non sono base di $\mathbb{R}^2$
perché $\mathbb{R}^2$ ha base (e_1, e_2)

Def: se V ha basi chiamo dimensione di V
su $\mathbb{R}$, indicate $\dim_{\mathbb{R}}(V)$, il numero di
elem. di qualsiasi base $\mathbb{R}$ di V .

Es: $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^n) = n$ poiché ha base
 $(e_1, \dots, e_n)$

$$\dim_{\mathbb{R}} (M_{m \times m}(\mathbb{R})) = m \cdot m \quad \text{poiché} \dots$$

$$\dim_{\mathbb{R}} (\mathbb{R}_{\leq d}[t]) = d+1 \quad \text{poiché ha base} \\ (1, t, t^2, \dots, t^d) -$$

(dimu Teo tre poco) -

Prop: se V, W ammettono basi, allora:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(W) \iff \exists f: V \rightarrow W \text{ biettiva che}$$

Preserve the operation



"Sono uguali
come sp. rett."

Dim: $\Leftarrow$

Se esiste tale f e

$B = (v_1, \dots, v_n)$ è base di V ,

dico che $C = (f(v_1), \dots, f(v_n))$

è base di W ; fatto questo concludo che $\dim(W) = n$
 $= \dim(V)$.

• generano: preso $w \in W$ pongo $v = f^{-1}(w)$;

poiché $v_1, \dots, v_m$ generano, $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m$

$$\Rightarrow w = f(v) = \alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_m f(v_m) \quad \checkmark$$

• lin indep : $\alpha_1 f(v_1) + \dots + \alpha_m f(v_m) = 0$

applico $f^{-1} \Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$

$$\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0 \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ Se $\dim(V) = \dim(W) = n$, prendo
 B, C basi di V, W ho :

$$[\cdot]_B : V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$[\cdot]_C : W \rightarrow \mathbb{R}^m$$

Benla considerare $f : [\cdot]_C^{-1} \circ [\cdot]_B : V \rightarrow W$. 

Fatto : non tutti gli spazi vett. hanno basi

(se V non me he dico $\dim(V) = +\infty$)

Es: $\mathbb{R}[t]$ non ha insiemi finiti di generatori.

Supponiamo per assurdo che $\mathbb{R}[t]$ sia generato
da $p_1(t), p_2(t), \dots, p_k(t)$.

($1-t+7t^2, \sqrt{3}+\pi t-9t^3, 12+t^2-8t^4$
non generano $\mathbb{R}[t]$ perché $t^5 \notin \text{Span}(\text{loro})$.)

Se il più grande grado di $p_1(t), \dots, p_k(t)$ è d

contenuta $t^{d+1} \notin \text{Span}(p_1(t), \dots, p_k(t))$ -

Teo: se V ha basi esser hanno tutte lo stesso numero di elementi -

Segue da:

Prop: dati $n, m \in \mathbb{N}$, $v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_m \in V$
con $v_1, \dots, v_n$ lin. indep. e
 $v_1, \dots, v_n \in \text{Span}(w_1, \dots, w_m)$ si ha $n \leq m$ -

Cioè: dati alcuni vett. lin. indep. nel generato di altri, i primi sono di meno-

Es: Il $\text{Span} \left(\begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 7/5 \end{pmatrix} \right)$ un sistema di vett. lin. indep. ha max due el.

Es: Poiché $\begin{pmatrix} \sqrt{5} \\ -1 \\ \pi \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -4/3 \end{pmatrix}$ sono lin. indep,

Se appartengono al generato di alcuni vettori,
questi ultimi sono min. due -

Dimo ($\text{Prop} \Rightarrow \text{Teo}$):

Siano $B = (v_1, \dots, v_m)$ e $C = (w_1, \dots, w_m)$
due basi di V . Cioè

$v_1 \dots v_m$ lin indep.

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_m) = V$$

$w_1 \dots w_m$ lin indep

$$\text{Span}(w_1, \dots, w_m) = V$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \text{Prop} \\ m \leq n \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \downarrow \text{Prop} \\ m \leq m \end{array}$$

$$\implies m = m.$$



Dimo (Prop):

$$v_1, \dots, v_m \text{ lin. indep} \in \text{Span}(w_1, \dots, w_m) \implies m \leq n$$

Lo dimostro per induzione su n .

PB: $m=0$; devo vedere che $m \geq 0$ Vero -

$m=1$; ho $v_1 \in \text{Span}(w_1, \dots, w_m)$

lin. indep. $\Rightarrow v_1 \neq 0$

Se $m=0$ ho $\text{Span}(w_1, \dots, w_m) = \{0\}$:
impossibile, dunque $m \geq 1$.

PI :

so che per un certo $m \in \mathbb{N}$,

dati $m \in \mathbb{N}$,

$v_1, \dots, v_m$ lin. indep $\in \text{Span}(w_1, \dots, w_m)$

ho $m \leq m$.

} ipotesi
induttiva

voglio provare che dati $k \in \mathbb{N}$

$x_0, \dots, x_m$ lin indep $\in \text{Span}(y_1, \dots, y_k)$

ho $m+1 \leq k$

} tesi
induttiva

Devo: fabbricare un sistema di n vett. lin. indip.
nel passato di altri n e per applicare
l'ipotesi induttiva.

SBAGLIATO: uso ip. induttiva con $x_1, \dots, x_n$
e $y_1, \dots, y_k$; concludo che $n \leq k$

— troppo poco.
serve ad x_{k-1}

So che $x_i \in \text{Span}(y_1, \dots, y_k)$

$$\Rightarrow x_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{ij} \cdot y_j -$$

Noto che $x_0 \neq 0 \Rightarrow$ qualche coeff. $\alpha_{0j} \neq 0$,
riordiniamo $y_1, \dots, y_k$ supponendo che $\alpha_{0k} \neq 0$.

Poupo
$$v_i = x_i - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{0k}} \cdot x_0 \quad i = 1, \dots, m.$$

Dico che :

- $v_1, \dots, v_m$ sono lin. indep.
- $v_1, \dots, v_m \in \text{Span}(y_1, \dots, y_{k-1})$

Fatto questo applico ipotesi induttiva a
 $v_1, \dots, v_m$, $m = k-1$, $y_1, \dots, y_{k-1}$
 concludendo

$$m \leq k-1 \quad \text{cioè} \quad m+1 \leq k.$$

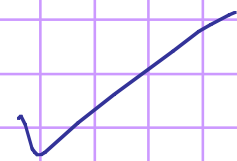
*) Supponiamo $\beta_1 v_1 + \dots + \beta_m v_m = 0$ cioè

$$\beta_1 (x_1 - * \cdot x_0) + \dots + \beta_m (x_m - * \cdot x_0) = 0$$

$$(\dots) x_0 + \beta_1 x_1 + \dots + \beta_m x_m = 0$$

ma $x_0, x_1, \dots, x_m$ sono lin. indep.

$$\Rightarrow \beta_1 = \dots = \beta_m = 0.$$



$$a) \quad v_i = x_i - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ok}} x_o$$

$$= \sum_{j=1}^k \alpha_{ij} y_j - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ok}} \sum_{j=1}^k \alpha_{oj} y_j$$

$$= \sum_{j=1}^{k-1} \left(\alpha_{ij} - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ok}} \cdot \alpha_{oj} \right) y_j$$

~~$$- \left(\alpha_{ik} - \frac{\alpha_{ik}}{\alpha_{ok}} \cdot \alpha_{ok} \right) \cdot y_k$$~~



Come costruire basi di un certo V dato?

Lemma: dati $v_1, \dots, v_m$ lin. indep. sono fatti equivalenti per $w \in V$:

(1) $v_1, \dots, v_m, w$ lin. indep.

(2) $w \notin \text{Span}(v_1, \dots, v_m)$

(3) $\text{Span}(v_1, \dots, v_m) \subsetneq \text{Span}(v_1, \dots, v_m, w)$ -

(Dunque sono anche equiv:

non(1) : $v_1, \dots, v_n, w$ lin dip

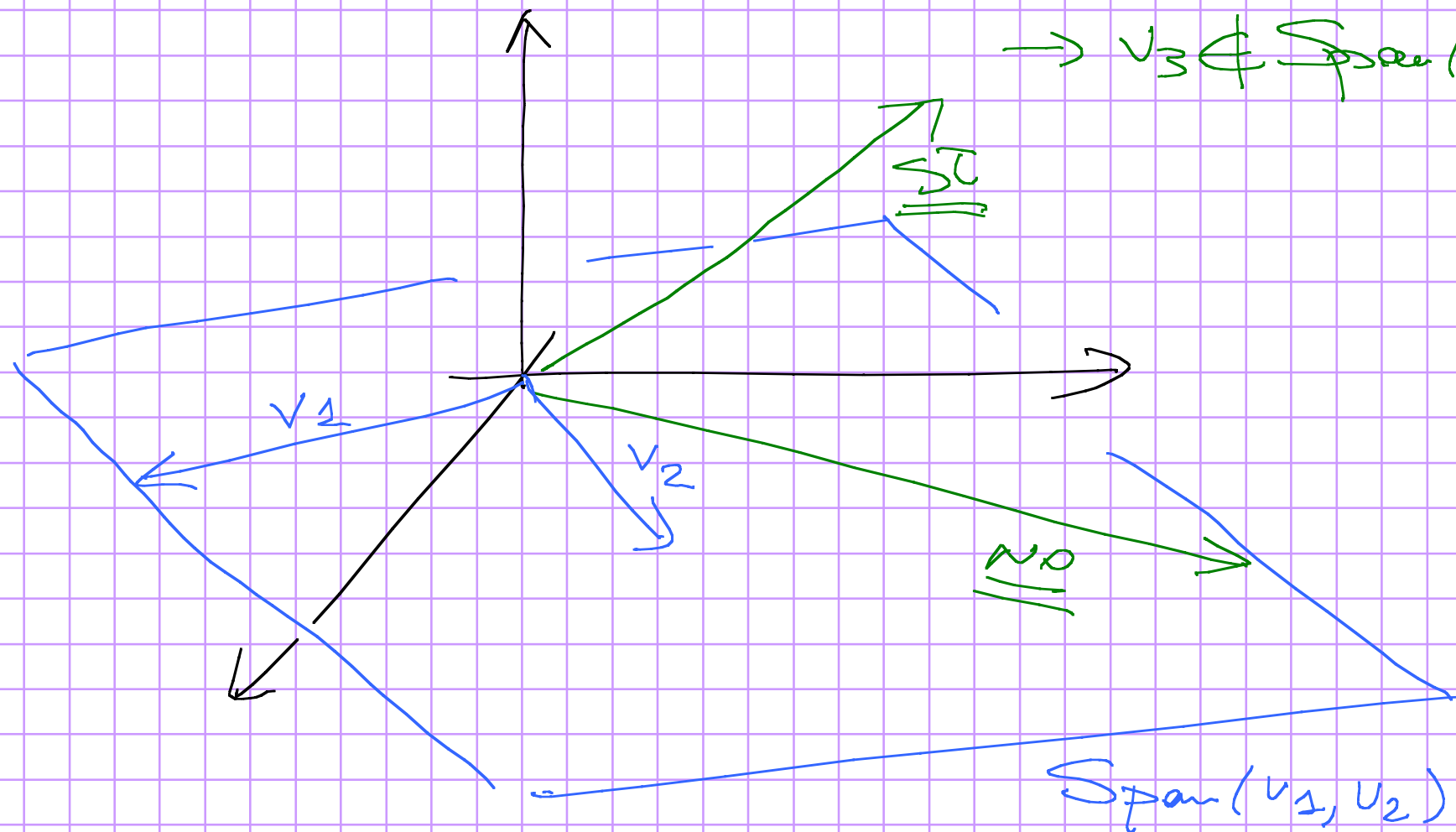
non(2) : $w \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n)$

non(3) : $\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \text{Span}(v_1, \dots, v_n, w)$.)

Q: $v_1, v_2, v_3 \in V$ sono lin indep?

$\rightarrow v_1 \neq 0$ (se $e' 0$: no)

$\rightarrow v_2$ non multiplo di v_1 (se lo e' : no)



$$\rightarrow v_3 \notin \text{Span}(v_1, v_2)$$

Dimo (Lem) :

(1) $\Rightarrow$ (2) Per assurdo $w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$

$$\Rightarrow \underbrace{\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n + (-1)w}_{\text{comb. lin. di } v_1, \dots, v_n, w \text{ con coeff non tutti nulli}} = 0$$

comb. lin. di $v_1, \dots, v_n, w$ con coeff non tutti nulli,

$\Rightarrow$ mon (1)

(2) $\Rightarrow$ (3) Osservo che ho sempre

$$\text{Span}(v_1, \dots, v_n) \subset \text{Span}(v_1, \dots, v_n, w)$$

Se non ho $\neq$ ho $=$; supponiamo
per esempio $\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \text{Span}(v_1, \dots, v_n, w)$.

Chiaro $w \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n, w)$ ma allora

$$w \in \text{Span}(v_1, \dots, v_n) \Rightarrow \text{non (2)}.$$

(3) $\Rightarrow$ (1) ..

Per assurdo supponiamo $v_1, \dots, v_m, w$ lin. dip.

Dunque $\exists \alpha_1, \dots, \alpha_m, \beta$ non tutte nulle t.c.

$$\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m + \beta w = 0.$$

Se avessi $\beta = 0$ avrei $\alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_m v_m = 0$
ma $v_1, \dots, v_m$ lin. indep. $\Rightarrow \alpha_1 = \dots = \alpha_m = 0$

NO !

$$\text{Dunque } \beta \neq 0 \Rightarrow W = -\frac{\alpha_1}{\beta} v_1 - \dots - \frac{\alpha_m}{\beta} v_m;$$

$$\text{so che } \text{Span}(v_1, \dots, v_m) \subset \text{Span}(v_1, \dots, v_m, W);$$

per provare $\supset$ prendo $y \in \text{Span}(v_1, \dots, v_m, W)$

$$y = \gamma_1 v_1 + \dots + \gamma_m v_m + \delta W$$

$$= \left(\gamma_1 - \frac{\alpha_1}{\beta} \delta\right) v_1 + \dots + \left(\gamma_m - \frac{\alpha_m}{\beta} \delta\right) v_m$$

$$\Rightarrow y \in \text{Span}(v_1, \dots, v_m) \quad \square$$

Conseguenze delle def. di dim. e delle Prop. fond.:

- Se $\dim(V) = n$ un insieme con più di n vettori non può essere lin. indep.

Es: $V = \mathbb{R}^3$

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ 7 \\ 7 \\ 11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e \\ -11 \\ 3/4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}}$$

per forza lin. dip.

- Se $\dim V = n$ un sistema con meno di n vettori non può generare

Es: $V = \mathbb{R}^3$

$$\left(\begin{array}{c} \sqrt{2} \\ -7 \\ 41/3 \end{array} \right) \left(\begin{array}{c} 12 \\ -1 \\ \sqrt{3} \end{array} \right)$$

non possono generare

COMPLEMENTO :

Se $\dim(V) = n$ e sono dati $v_1, \dots, v_k$
lin. indep. in V esistono $v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_n$
t.c. $v_1, \dots, v_n$ sono base.

Infatti:

$\text{Span}(v_1, \dots, v_k) \stackrel{?}{=} V$

- SI : non devo aggiungere
nulla ; $k=n$ e sono base
- NO : $\exists v_{k+1} \notin \text{Span}(v_1, \dots, v_k)$

$\stackrel{\text{LEM}}{\implies} v_1, \dots, v_k, v_{k+1} \text{ lin. indep.}$

$\text{Span}(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}) \neq V$ $\begin{cases} \rightarrow \text{Sì : ho trovato la base} \\ \rightarrow \text{No : } \exists v_{k+2} \notin \text{Span}(v_1, \dots, v_{k+1}) \end{cases}$

$\stackrel{\text{LEM}}{\implies} v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, v_{k+2} \text{ lin. indep.}$

Il procedimento ha termine quando finisco e
 $v_1, \dots, v_n$ ottinenti avrei $n+1$ vett. in V che ha $\dim n$.

ESTRAZIONE : Dato $v_1, \dots, v_m$ insieme
finito ordinato di generatori di V questo
procedimento conduce a una base di V :

—> Esaminio $v_1, \dots, v_k$ una alla volta da
sin a dx

—> scarto quelli iniziali nulli finché non
trovo il primo $v_{i_1} \neq 0$ e lo tengo;

→ scarto i successivi che siano multipli di v_{j_1}
finché non trovo il primo v_{j_2} non multiplo
di v_{j_1} e lo tempo;

→ scarto i successivi che siano nel piano
generato da v_{j_1}, v_{j_2} finché non trovo
il primo v_{j_3} fuori da tale piano
e lo tempo

→ avanti con i due altri fuc.

Facile : quelli tenuti sono lin. indep.

Non facile : pensiamo -

Es:

$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} -1/2 \\ 1 \\ -2 \\ -5/2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 3 \\ -6 \\ 12 \\ 15 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 8 \\ -2 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 5 \\ -1 \\ 13 \\ 3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ -1 \\ 11 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 11 \\ 9 \\ 2 \\ \sqrt{3} \end{pmatrix}$
X	X	↑	X	X	↑	X I+II	↑	↑