

15/11/17

(5, 4, 8)

trovare $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2-tz \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} t \\ -15 \end{pmatrix} \quad t \in \mathbb{R}$$

$\uparrow$ $\uparrow$ $\uparrow$
 v_1 v_2 v_3

v_1 e v_2 sono indip.

2 vett.

(1) v_1, v_2, v_3 sono ind. $\Rightarrow$ sono una base
 $\Rightarrow$ f esiste ed è unica

(2) $v_3 \notin \text{Span}(v_1, v_2)$

cioè: $\exists \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} : v_3 = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2$

quindi: $f(v_3) = \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2)$

Quindi: (2a) $f(v_3) = \begin{pmatrix} 1 \\ -15 \end{pmatrix} \Rightarrow f$ esiste, ma

non è unica. Infatti: scelto $w : v_1, v_2, w$

è una base di $\mathbb{R}^3$ e definire f tramite:

$f(v_1), f(v_2) \leftarrow$ come richiesto dall'esercizio

$f(w) \leftarrow$ a piacere!

Rimane: (2b) $f(v_3) \neq \alpha_1 f(v_1) + \alpha_2 f(v_2) \Rightarrow \nexists f$.
come richiesto

alternativamente:

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -3 \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ 2-t^2 \end{pmatrix}$$

$\uparrow$ v_1 $\uparrow$ v_2 $\uparrow$ v_3

Considero le prime due righe: $2\alpha_1 + 3\alpha_2 = 1 \Rightarrow \alpha_1 = 2$
 $\alpha_1 - 4\alpha_2 = 6 \Rightarrow \alpha_2 = -1$

Sostituisco questi valori nella 3^a eq:

$$-6 - 1 = 2 - t^2 \Leftrightarrow t^2 = 9 \Leftrightarrow t = \pm 3$$

- Se $t^2 \neq 9$, v_1, v_2, v_3 sono ind $\Rightarrow$ $\nexists$ esiste ed è unica

- $t = -3$:

devo verificare se:

$$f(2v_1 - v_2) = 2f(v_1) - f(v_2) \stackrel{?}{=} f(v_3)$$

case-

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} -3 \\ -15 \end{pmatrix} \quad \text{No!}$$

$\Rightarrow \cancel{A} \neq$

- $t=3$:

$$2 \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 5 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ -15 \end{pmatrix} \quad \text{OK!}$$

$\Rightarrow \exists$ infinite f che verificano le richieste

5.4.9:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 - 5x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \\ 2x_1 - 3x_2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{base di } \mathbb{R}^2$$

$$C: \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{base di } \mathbb{R}^3. \quad v = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$$

$$[f(v)]_C = [f]_B^C [v]_B$$

Per trovare $[v]_B$, risolve: $\alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \alpha = 14, \quad \beta = -30$$

$$\Rightarrow [v]_{\beta} = \begin{pmatrix} 19 \\ -30 \end{pmatrix}$$

Per trovare: $[f(v)]_{\mathcal{C}}$ $f(v) = \begin{pmatrix} -19 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix}$

Dov'è risolvere:

$$a \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ 7 \\ -12 \end{pmatrix} \quad (*)$$

Si ottiene $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ -71 \\ 130 \end{pmatrix} = [f(v)]_{\mathcal{C}}$

Per trovare le colonne di f , risolvo di nuovo il sistema mettendo come termine noto:

$$f(v_1) = f\begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -31 \\ 13 \\ -18 \end{pmatrix} \quad \text{e por } f(v_2) = f\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -14 \\ 8 \\ -11 \end{pmatrix}$$

Si (base): $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} 13 & 2 & 8 & 1 \\ -11 & 4 & -7 & 3 \\ 22 & 0 & 13 & 5 \end{pmatrix} \leftarrow A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

Resultado:

$$A \begin{pmatrix} 19 \\ -30 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 78 \\ -71 \\ 130 \end{pmatrix} \quad \checkmark$$

5.5.2

$$B = 3e_1 - 11e_2, \quad -2e_1 + 7e_2$$

base di $\mathbb{R}^2$

$$3e_1 - 11e_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad -2e_1 + 7e_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2 \quad \text{tale che} \quad [f]_B^B = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$$

f è invertibile?

sappiamo che f è invertibile $\Leftrightarrow$ la matrice associata a f in una qualunque coppia di basi lo è.

Cerco l'inversa di $\begin{bmatrix} A & I \\ I & B \end{bmatrix}^{\mathcal{P}}$:

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

||

$$\begin{pmatrix} 4a - c & 4b - d \\ 5a + 6c & 5b + 6d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Risolvo le equazioni:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{6}{29} & \frac{1}{29} \\ -\frac{5}{29} & \frac{4}{29} \end{pmatrix}$$


$\Rightarrow f$ è invertibile

$$e \quad \left[f^{-1} \right]_{\mathcal{B}} \quad e$$

trovare $f(e_1 - 2e_2)$ e $f^{-1}(2e_1 + e_2)$.

Risolvere:

$$a \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix} = e_1 - 2e_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{aligned} a &= -3 \\ b &= 5 \end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} \text{ coord di } e_1 - 2e_2$$

nella base $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -17 \\ 15 \end{pmatrix} = \left[f(e_1 - 2e_2) \right]_{\mathcal{B}}$$

$$f(e_1 - 2e_2) = -17 \begin{pmatrix} 3 \\ -11 \end{pmatrix} + 15 \begin{pmatrix} -2 \\ 7 \end{pmatrix}$$