Algebra Lineare 15/11/17

$\boxed{5.4.5}$ $\underset{k}{X} \subset \underset{n}{V}$ $\underset{h}{Y} \subset \underset{m}{W}$

$$L = \{ f \in \mathcal{L}(V,W) : f(X) \subset Y \}$$

Dimostrare che è sottosp. e calcolare dim.

- $f_1, f_2 \in L$ cioè $f_1(x) \in Y$, $f_2(x) \in Y$ $\forall x \in X$

$$(\lambda_1 f_1 + \lambda_2 f_2)(x) = \lambda_1 \underbrace{f_1(x)}_{\in Y} + \lambda_2 \underbrace{f_2(x)}_{\in Y} \implies \text{sta in } Y \quad \forall x \in X$$

(oss: non ho usato il fatto che X è sottosp)

- Prendo base $x_1, \dots, x_k$ di X e la completo a base $\mathcal{B} = (x_1, \dots, x_k, v_{k+1}, \dots, v_m)$ di V

  Prendo base $y_1, \dots, y_h$ di Y e la completo a base $\mathcal{C} = (y_1, \dots, y_h, w_{h+1}, \dots, w_m)$. di W

Data $f \in \mathcal{L}(V,W)$ ho

$$f(X) \subset Y \iff f(x_1), \dots, f(x_k) \in Y$$

($\Rightarrow$ ovvia

$\Leftarrow$ se $x \in X$, $x = \alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_k x_k$

dunque $f(x) = \alpha_1 \underset{\substack{\Uparrow \\ Y}}{f(x_1)} + \dots + \alpha_k \underset{\substack{\Uparrow \\ Y}}{f(x_k)}$

dunque $f(x) \in Y$)

Pertanto $f(X) \subset Y \iff$

$$[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{array}{rl}
 & \begin{array}{cc} \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{k} & \overbrace{\qquad\qquad\qquad}^{n-k} \end{array} \\
\begin{array}{r} h\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \\ m-h\left\{\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right. \end{array} & \underbrace{\left(\begin{array}{ccc|ccc}
* & \cdots & * & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
* & \cdots & * & * & \cdots & * \\
\hline
0 & \cdots & 0 & * & \cdots & * \\
\vdots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\underbrace{0 \quad \cdots \quad 0}_{X} & & & * & \cdots & *
\end{array}\right)}_{V}
\end{array}
\begin{array}{l} \left.\begin{array}{c} \\ \\ \\ \end{array}\right\} Y \\ \\ \\ \end{array} \Bigg\} W$$

(Ricordo $\mathcal{L}(V,W) \ni f \longmapsto [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \in M_{m\times n}(\mathbb{R})$
biiezione lineare.)

$$\Longrightarrow \dim(L) = m \cdot n - (m-h)\cdot k$$

$$= h \cdot k + h \cdot (n-k) + (m-h)(n-h)$$

$$= hk + m \cdot n - m \cdot k$$

$\boxed{5.4.6}$

$$\begin{tikzcd}
\underset{n}{X} \arrow[r, "g"] & \underset{m}{Y} \arrow[r, dashed, "f"] & \underset{h}{Z} \arrow[r, "h"] & \underset{k}{W}
\end{tikzcd}$$

$a = \operatorname{rank}(g)$ $\qquad$ $b = \operatorname{rank}(h)$

$$L = \{ f : Y \to Z \; : \; g \circ f \circ h = 0 \}.$$

Provare che è stsp. e calcolare $\dim(L)$.

Visto: $L = \{ f : Y \to Z \ : \ f(\mathrm{Im}(h)) \subset \mathrm{Ker}(g) \}$

quindi si usa l'esercizio precedente: L è sottosp e

$$\dim(L) = \dim(\mathrm{Im}(h)) \cdot \dim(\mathrm{Ker}(g)) \qquad a \cdot (n-b)$$

$$+ \dim(Y) \cdot \dim(Z) \qquad m \cdot k$$

$$- \dim(Z) \cdot \dim(\mathrm{Im}(h)) \qquad h \cdot b$$

Determinante

Q: Come decidere in pratica se $A \in M_{n \times n}$ è invertibile?

In tal caso, come trovare A^{-1}?

Come calcolare $\mathrm{rank}(B)$ per $B \in M_{m \times n}$?

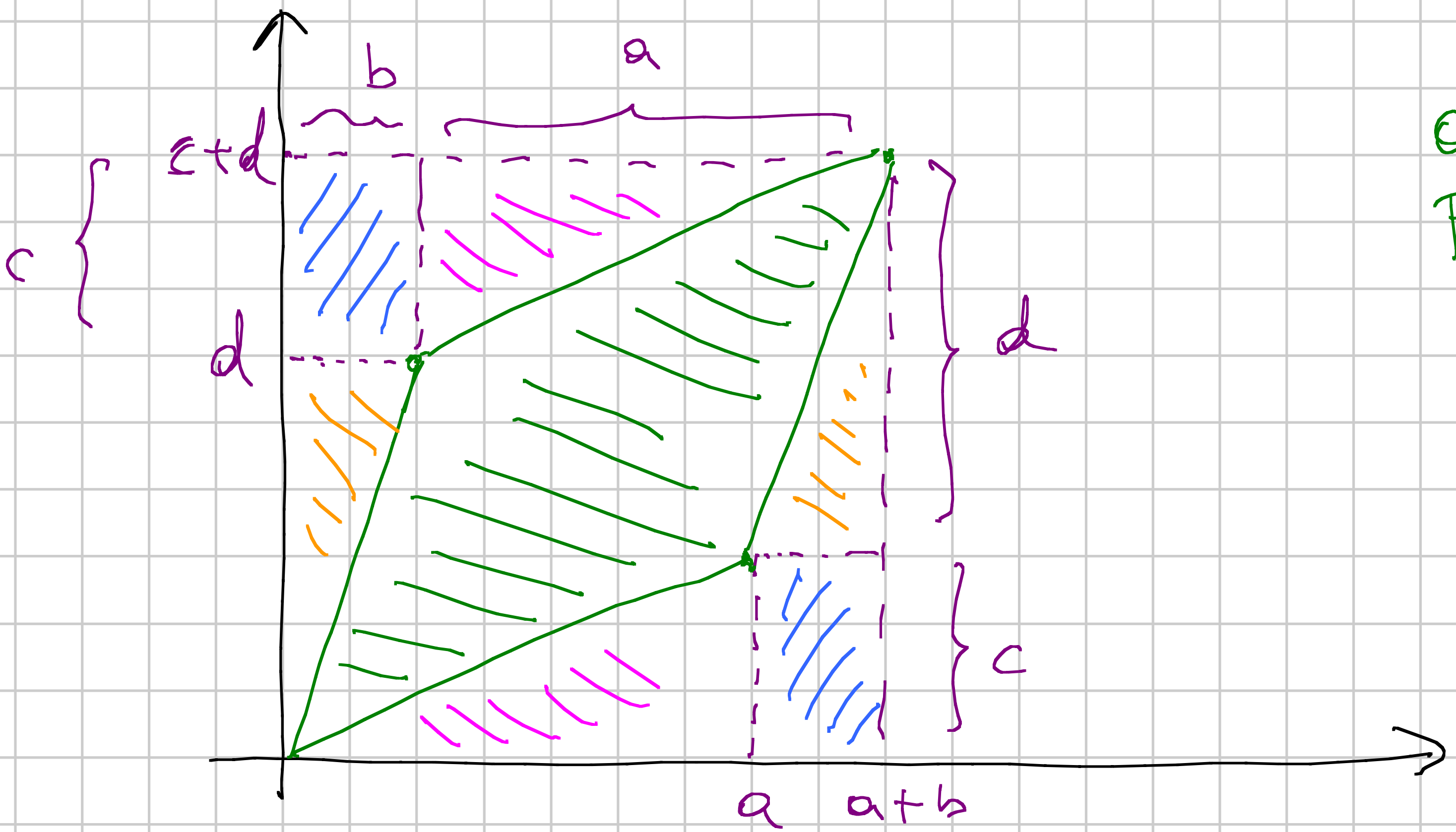
Invertibilità di una $A \in M_{n \times n}$.

$\boxed{n = 1}$ $\quad A = (a)$ invertibile se e solo se $a \neq 0$

$\boxed{n = 2}$ $\quad A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

Invertibile se e solo se le colonne sono lin. indip.

"misura della indipendenza lin. di due vett. in $\mathbb{R}^2$"



area del parallelogramma

$$\text{Area}: (a+b)(c+d) - 2bc - 2\cdot\frac{1}{2}bd - 2\cdot\frac{1}{2}ac$$

$$= \cancel{ac} + ad + \cancel{bc} + \cancel{bd} - \cancel{2}bc - \cancel{bd} - \cancel{ac}$$

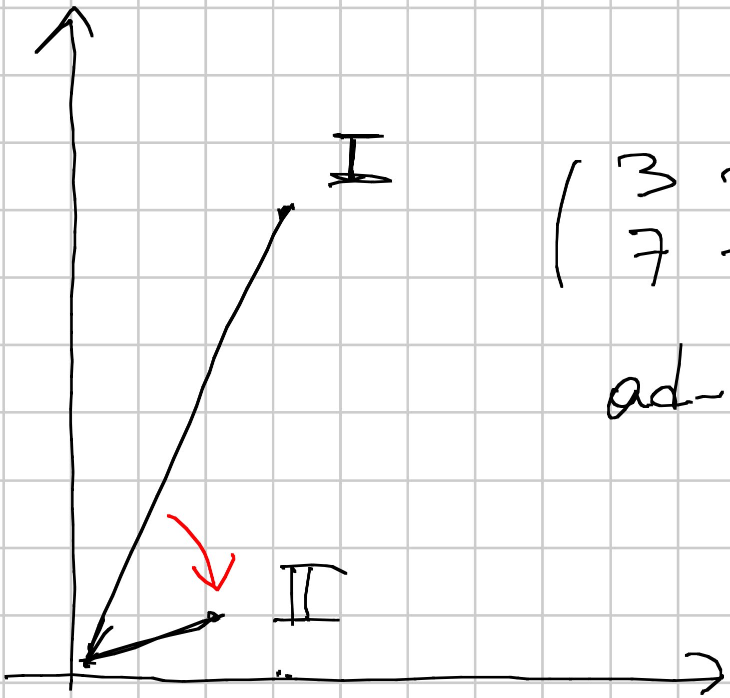
$$= ad - bc$$

$$\text{Es}: \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad ad - bc = 3\cdot 1 - 7\cdot 2$$

$$= 3 - 14 = -11$$

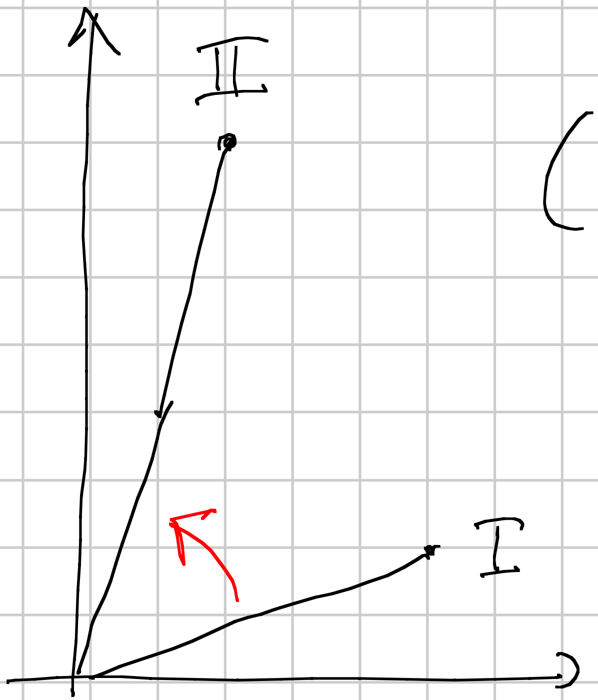
In realtà area $= |ad - bc|$.

Significato del segno:



$$\begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 7 & 1 \end{pmatrix}$$

$$ad - bc < 0$$



$$\begin{pmatrix} 5 & 2 \\ 2 & 8 \end{pmatrix}$$

$$ad - bc > 0$$

Def: chiamo det di $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ il numero $ad-bc$.

Fatti:
- nullo se e solo se le colonne sono lin. dip.
- altrimenti il suo val. assoluto è l'area del parallelogramma che ha le colonne come lati
- positivo se la rotaz $< \pi$ da I a II

colonne è antioraria, negativo se oraria.

Cerchiamo inversa di $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}$ con det $\neq 0$:

Vogliamo: $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$$\begin{array}{ll} 1,1 & \\ 2,1 & \\ 1,2 & \\ 2,2 & \end{array}\begin{cases} ax + bz = 1 \\ cx + dz = 0 \\ ay + bw = 0 \\ cy + dw = 1 \end{cases}$$

$x: d \cdot \mathrm{I} - b \cdot \mathrm{II}$

$z = -c \cdot \mathrm{I} + a \cdot \mathrm{II}$

$$x = \frac{d}{ad-bc}$$

$$z = -\frac{c}{ad-bc}$$

$y \quad \ldots$

$w \quad \ldots$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}$$

Es:

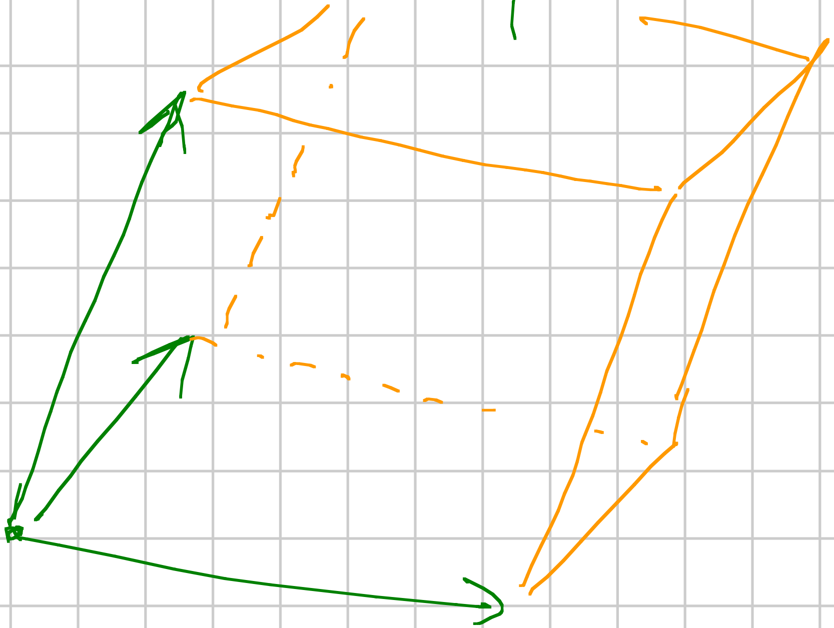
$$\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix}^{-1} = -\frac{1}{11}\begin{pmatrix} 5 & -3 \\ -7 & 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -5/11 & 3/11 \\ 7/11 & -2/11 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -5/11 & 3/11 \\ 7/11 & -2/11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 7 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$ = area con segno del parallelogramma che ha per lati le col.

Per $A \in M_{3\times 3}$ posso usare il volume (con segno) del parallelepipedo ...



Facendo conto come sopra si trova (regola di Sarrus)

$$\det \left(\begin{array}{ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{array} \right) \begin{array}{cc} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{array}$$

$$- \quad - \quad - \quad + \quad + \quad +$$

$$= a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32}$$

$$- a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Es:

$$\det\begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \\ -1 & 7 & 5 \\ 2 & -3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} 4 & 1 \\ -1 & 7 \\ 2 & -3 \end{matrix}$$

$$= 4 \cdot 7 \cdot 6 + 1 \cdot 5 \cdot 2 + 3 \cdot (-1) \cdot (-3)$$

$$- 3 \cdot 7 \cdot 2 - 4 \cdot 5 \cdot (-3) - 1 \cdot (-1) \cdot 6 = \ldots$$

Segno: Es: $\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = 1$

$\det\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} = -1$

$\det(A) > 0$ se è possibile disporre le dita pollice/indice/medio della mano destra lungo I/II/III col. di A.

Come definire $\det_n : M_{n \times n}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$?

In modo che

- estenda i casi $n = 1, 2, 3$
- A invertibile $\Leftrightarrow \det(A) \neq 0$.

Due modi:

I. Assiomatico.

Analizzo le proprietà del $\det_n$ $n = 1, 2, 3$

e le uso come assiomi per $\det_n$ $\forall n$.

Proprietà:

- $\det_n$ è lineare nella prima colonna fissate le altre:

$$\det(\alpha u + \beta v, w, z)$$

$$= \alpha \det(u, w, z) + \beta \cdot \det(v, w, z)$$

ATT: $M_{n \times n}$ è sp. vett. ma $\det_n : M_{n\times n} \to \mathbb{R}$ non è lineare.

$$\det\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{matrix}} & \boxed{\begin{matrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{matrix}} \end{pmatrix} = \boxed{a_{11}}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, \boxed{a_{31}}$$
$$+ a_{13}\, \boxed{a_{21}}\, a_{32} - a_{13}\, a_{22}\, \boxed{a_{31}}$$
$$- \boxed{a_{11}}\, a_{23}\, a_{32} - a_{12}\, \boxed{a_{21}}\, a_{33}$$

può variare

par. fissati

nei coeff. della I col
è polinomio omog. d. I
grado $\Rightarrow$ lineare

- Scambiando due colonne det cambia segno

$n = 2$

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = ad - bc$$

$$\det\begin{pmatrix} b & a \\ d & c \end{pmatrix} = bc - ad = -(ad - bc)$$

$n = 3 \qquad \det(A) =$

$$= \underbrace{a_{11}\, a_{22}\, a_{33}}_{1} + \underbrace{a_{12}\, a_{23}\, a_{31}}_{2} + \underbrace{a_{13}\, a_{21}\, a_{32}}_{3}$$

$$- \underbrace{a_{13}\, a_{22}\, a_{31}}_{4} - \underbrace{a_{11}\, a_{23}\, a_{32}}_{5} - \underbrace{a_{12}\, a_{21}\, a_{33}}_{6}$$

$$\det \begin{pmatrix} a_{12} & a_{11} & a_{13} \\ a_{22} & a_{21} & a_{23} \\ a_{32} & a_{31} & a_{33} \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{a_{12}\,a_{21}\,a_{33}}_{6} + \underbrace{a_{11}\,a_{23}\,a_{32}}_{5} + \underbrace{a_{13}\,a_{22}\,a_{31}}_{4}$$

$$- \underbrace{a_{13}\,a_{21}\,a_{32}}_{3} - \underbrace{a_{12}\,a_{23}\,a_{31}}_{2} - \underbrace{a_{11}\,a_{22}\,a_{33}}_{1}$$

- $\det_n(I_n) = 1$.

<u>Teo</u>: $\forall n$ esiste uno e una sola $\det_n : M_{n\times n}(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ t.c.

- è lineare nelle I colonne fissate le altre
- cambia segno scambiando due colonne
- vale 1 su I_n.

<u>Oss</u>: 1) Una matrice con 2 colonne uguali ha $\det_n = 0$

2) $\det_n$ è lineare in ciascuna colonna

fissate tutte le altre

3) Se le col. di A sono lin. dip.

cioè $\quad c_j = \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_{j-1} c_{j-1} +$
$\qquad + \alpha_{j+1} c_{j+1} + \dots + \alpha_m c_m$

$\Rightarrow \det(A) = \det(c_1, \dots, c_m)$

$= \det(c_1, \dots, c_{j-1}, \alpha_1 c_1 + \dots + \alpha_{j-1} c_{j-1} + \alpha_{j+1} c_{j+1} \dots + \alpha_n c_n, c_{j+1}, \dots, c_m)$

$$= \alpha_1 \det\left(\boxed{c_1}, \ldots, c_{i-1}, \boxed{c_1}, c_{i+1}, \ldots\ c_n\right)$$

$$+ \cdots + \alpha_{i-1} \det\left(c_1, \ldots, \boxed{c_{i-1}}, \boxed{c_{i-1}}, c_{i+1}, \ldots, c_n\right)$$

$$+ \alpha_{i+1} \det\left(c_1 \ldots c_{i-1}, \boxed{c_{i+1}}, \boxed{c_{i+1}}, \ldots, c_n\right)$$

$$+ \cdots + \alpha_n \det\left(c_1 \ldots c_{i-1}\ \boxed{c_n}\ c_{i+1}\ \ldots\ \boxed{c_n}\right)$$

$$= 0$$

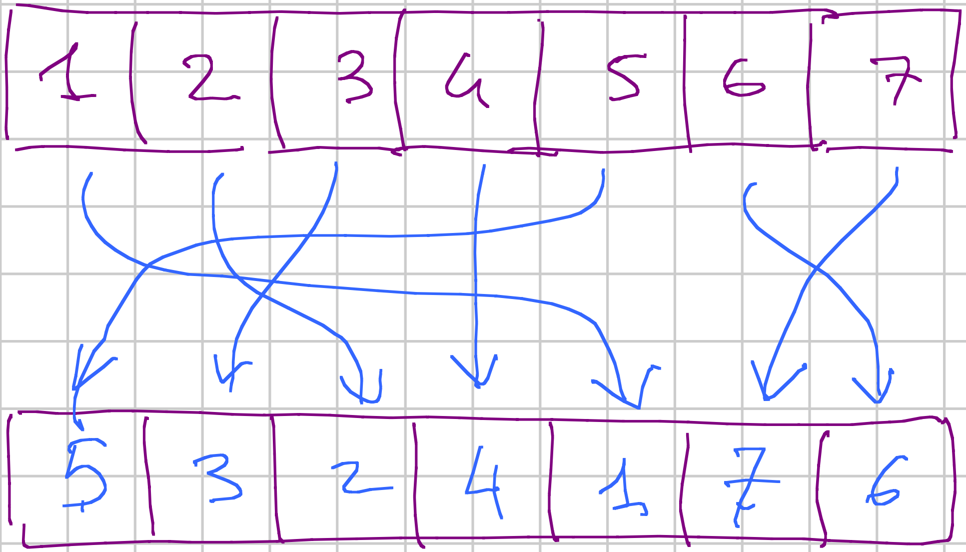
Riassunto: A non invertibile $\Rightarrow \det(A)=0$

Fatto (difficile): A invertibile $\Rightarrow \det(A)\neq 0$.

———— o ————

Permutazioni

X insieme (finito); permutazione è $f: X \to X$ bigettiva.



Per $X = \{1, \dots, n\}$ chiamo $\mathfrak{S}_n$ l'insieme di tutte le permutazioni.

Oss: $\mathfrak{S}_n$ ha $n!$ elementi.