# Algebra Lineare 14/11/17

$\boxed{\text{Ese}}$ $f: V \to W$ invertibile

$$\Updownarrow \qquad\qquad \Updownarrow$$

$\forall \mathcal{B}\, \forall \mathcal{C}$ $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ è invertibile $\Longleftrightarrow$ $\exists \mathcal{B}\, \exists \mathcal{C}$, $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ è invertibile

---

$\boxed{\checkmark}$ $f: V \to W$ invert. $\Rightarrow \exists f^{-1}: W \to V$ t.c.

$$f \circ f^{-1} = id_W \quad , \quad f^{-1} \circ f = id_V$$

$$\Longrightarrow [f \circ f^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} = [id_W]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{C}} \quad , \quad [f^{-1} \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = [id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

$$\Longrightarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [f^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = I_m \quad , \quad [f^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = I_n$$

$$\Longrightarrow \left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1} = [f^{-1}]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}}$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Se $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ è invertibile, chiamo $g: W \to V$

l'appl. lin. t.c. $[g]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = \left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}\right)^{-1}$.

Con gli stessi calcoli vedo che $g = f^{-1}$.

$\boxed{5.4.2}$ Provare che se $\dim(V) \leq \dim(W)$ allora esistono $f : V \to W$ iniettive; inoltre data $f : V \to W$ iniettiva $\exists\, g : W \to V$ t.c. $g \circ f = id_V$.

I. Siano $v_1, \dots, v_n$ base di $V$

$w_1, \dots, w_m$ base di $W$ con $n \leq m$;

definisco $f : V \to W$ come l'unica appl. lin.

t.c. $f(v_i) = w_i$ $\quad i = 1 \dots n$. Ho

$$\mathrm{Im}(f) = \mathrm{Span}(\underbrace{w_1, \dots, w_n}_{\text{lin. indip. perché parte di base di } W})$$

$$\Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = n \Rightarrow \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0$$

I. Sia $f: V \to W$ iniettiva.

Prendo $v_1, \dots, v_n$ base di $V$, pongo $w_i = f(v_i)$ e noto che $\underbrace{w_1, \dots, w_n}_{\text{perché } \dim(\mathrm{Ker}(f)) = 0 \Rightarrow \dim(\mathrm{Im}(f)) = n}$ sono lin. indip.

Li completo a una base $w_1, \dots, w_m$ di $W$ e definisco $g: W \to V$ l'unica appl. lin. t.c.

$$g(w_i) = \begin{cases} v_i & i = 1, \dots, n \\ \text{non importa} & i = n+1, \dots, m \end{cases}$$

**Esempio**: $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ $\quad f = f_A \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 7 \\ 4 & -11 \end{pmatrix}$

$w_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix} \quad w_2 = \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ -11 \end{pmatrix}$ lin. indip. ($A$ iniettiva);

prendo $w_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ (o qualsiasi altro $\notin \mathrm{Span}(w_1, w_2)$)

e considero la $g: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ t.c.

$$g(w_1) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \qquad g(w_2) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad g(w_3) = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ -19 \end{pmatrix}$$

e ho $g \circ f = id_{\mathbb{R}^2}$.

$\boxed{5.4.3}$ • esibire $M \in \mathcal{M}_{3\times 2}$ con tutti i coeff $\neq 0$

t.c. $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix} \cdot M = I_2$

(cioè: esplicitare una $M$ inversa destra di $\begin{pmatrix} 4 & -1 & 2 \\ 5 & 3 & -7 \end{pmatrix}$ come nel II di 5.4.1)

$$\left( \boxed{5.4.1} \quad \begin{array}{l} \text{I. } \dim(V) \geq \dim(W) \Longrightarrow \exists f: V \to W \text{ surg.} \\ \text{II. se } f: V \to W \text{ è surg. } \exists g: W \to V \text{ t.c.} \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad f \circ g = id_W \end{array} \right)$$

Vogliamo $M = \begin{pmatrix} x & r \\ y & s \\ z & t \end{pmatrix}$ t.c.

$(1,1)$ $(2,1)$ $\begin{cases} 4x - y + 2z = 1 \\ 5x + 3y - 7z = 0 \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} y = 4x + 2z - 1 \\ z = 17x - 3 \end{cases}$

$(1,2)$ $\{ 4r - s + 2t = 0 \qquad \{ s = 4r + 2t$

(2,2) $\{ 5r + 3s - 7t = 1$ $\quad \{ t = 17r - 1$

Ad es $x = 1$ $\quad z = 14$ $\quad y = 31$

$r = 1$ $\quad t = 16$ $\quad s = 36$

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 31 & 36 \\ 14 & 16 \end{pmatrix}$$ va bene.

- esibire una $N \in M_{2\times 3}$ con tutti coeff $\neq 0$ t.c.

$$N \cdot \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix} = I_2$$

(cioè: per la $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ -3 & -1 \\ 5 & 6 \end{pmatrix}$ iniettiva esibire inversa sinistra)

come $\boxed{5.4.2.\mathrm{II}}$

$$N = \begin{pmatrix} x & y & z \\ r & s & t \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2x - 3y + 5z = 1 \\ 2r - 3s + 5t = 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x - y + 6z = 0 \\ r - s + 6t = 1 \end{cases}$$

...

$\boxed{5.4.4}$ Trovare $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$

(b) $f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$ $\quad f(x) = \begin{pmatrix} x_1 + 2x_2 \\ 3x_1 - x_2 \\ 5x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{B} = \Bigg( \underbrace{\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix}}_{\text{base di } \mathbb{R}^2} \Bigg) \qquad \mathcal{C} = \Bigg( \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{base di } \mathbb{R}^3} \Bigg)$$

Ricordo: $i$-esima col. di $[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$

= le coord. rispetto a $\mathcal{C}$ di $f$($i$-esimo vett. di $\mathcal{B}$)

$$f\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\7\\6\end{pmatrix}=5\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}13\\4\\35\end{pmatrix}=40\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}-18\begin{pmatrix}-1\\2\\0\end{pmatrix}$$

$$\begin{cases}\gamma=\beta\\ \alpha=6-\beta\\ 6-\beta+2\beta=7\end{cases}\qquad\begin{cases}\alpha=5\\ \beta=1\\ \gamma=1\end{cases}$$

$$\begin{cases}\gamma=\beta-13\\ \alpha=35-\beta\\ 35-\beta+2\beta-26=4\end{cases}\qquad\begin{cases}\beta=-5\\ \alpha=40\\ \gamma=-18\end{cases}$$

$$\Longrightarrow [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 5 & 40 \\ 1 & -5 \\ 1 & -18 \end{pmatrix}$$

(d) $f : \mathbb{R}^2 \to \mathcal{A}_3 \qquad f(x) = \begin{pmatrix} 0 & -x_1 & 2x_1 - x_2 \\ -x_1 & 0 & x_1 - 3x_2 \\ x_2 - 2x_1 & 3x_2 - x_1 & 0 \end{pmatrix}$

$$\mathcal{B} = \Big( \underbrace{\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}}_{\text{base di } \mathbb{R}^2} \Big) \qquad \mathcal{C} = \Big( \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 0 \end{pmatrix}}_{\text{base di } \mathcal{A}_3} \Big)$$

$$f\begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -3 & -1 \\ \cdot & 0 & -18 \\ \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = -3 \\ -\beta - \gamma = -1 \\ 3\gamma = -18 \end{cases}$$

$\gamma = -6 \qquad \beta = 7$

$\alpha = -17$

$$f\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 1 \\ \cdot & 0 & -7 \\ \cdot & \cdot & 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta = -2 \\ -\beta - \gamma = 1 \\ 3\gamma = -7 \end{cases}$$

$\gamma = -7/3$

$\beta = 4/3$

$\alpha = -14/3$

$$[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -17 & -14/3 \\ 7 & 4/3 \\ -6 & -7/3 \end{pmatrix}$$

0

Visto:

- $v = \mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$
- $f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}$
- $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot A \Rightarrow \mathcal{B} = \mathcal{B}' \cdot A^{-1}$

Prop: $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot A \Longrightarrow [v]_{\mathcal{B}'} = A^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$.

Dim: $v = \mathcal{B} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = (\mathcal{B}' \cdot A^{-1}) \cdot [v]_{\mathcal{B}}$

$$= \mathcal{B}' \cdot \Big( \underbrace{A^{-1} \cdot [v]_{\mathcal{B}}}_{[v]_{\mathcal{B}'}} \Big)$$

$\square$

**Es:** $\mathcal{B} = \left( \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right)$ $\quad \mathcal{B}' = \left( \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right)$

$v = \begin{pmatrix} 6 \\ -7 \end{pmatrix}$

$$[v]_{\mathcal{B}} = \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 11 \\ -20 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 2\alpha - \beta = 6 \\ \alpha + 3\beta = -7 \end{cases}$$

$$[v]_{\mathcal{B}'} = \frac{1}{23} \begin{pmatrix} 51 \\ -22 \end{pmatrix} \qquad \begin{cases} 4\alpha + 3\beta = 6 \\ -\alpha + 5\beta = -7 \end{cases}$$

$$\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot A \qquad \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{11}{7}\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{6}{7}\begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 5 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 11/7 & 2 \\ -6/7 & 1 \end{pmatrix}$$

Ora devo calcolare $A^{-1} = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$

(1,1)
(1,2

$$\begin{cases} 11x + 14z = 7 \\ 11y + 14w = 0 \\ -6x + 7z = 0 \\ -6y + w = 7 \end{cases}$$

risolvere $x, y, z, w$

e verificare

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \cdot \frac{1}{7}\begin{pmatrix} 11 \\ -20 \end{pmatrix} = \frac{1}{23}\begin{pmatrix} 51 \\ -22 \end{pmatrix}$$

Prop: se $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot A$ e $\mathcal{C}' = \mathcal{C} \cdot M$

allora $[f]^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}} \cdot A$

Dim:

$$f\cdot\mathcal{B}' = f\cdot(\mathcal{B}\cdot A) = (f\cdot\mathcal{B})\cdot A$$

$$= \left(\mathcal{C}\cdot[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\right)\cdot A = \mathcal{C}\cdot[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\cdot A$$

$$= \mathcal{C}'\cdot\underbrace{M^{-1}\cdot[f]^{\mathcal{C}}_{\mathcal{B}}\cdot A}_{[f]^{\mathcal{C}'}_{\mathcal{B}'}}$$

$\blacksquare$

— o —

## Sistemi lineari

Dati $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ $b \in \mathbb{R}^m$

chiamo sistema lineare di matrice (incompleta) $A$, termini noti $b$ (e matrice completa $(A, b)$)

il sistema

$$A \cdot x = b$$

nelle incognite $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

Es: $\begin{cases} 3x - 2y + z = 5 \\ 4x + 7y - 9z = \pi \end{cases}$

2 equaz. 3 incognite

matr. incompl. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & -9 \end{pmatrix}$

termini noti $\begin{pmatrix} 5 \\ \pi \end{pmatrix}$

matr. compl. $\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 & 5 \\ 4 & 7 & -8 & \pi \end{pmatrix}$.

Oss: • $A \cdot x = b$ ha soluz.

$\Longleftrightarrow b \in \mathrm{Im}(A)$

• $\forall b \ \exists$ soluz (almeno una) $\Longleftrightarrow$ A surgettiva

• $\forall b \ \exists$ al più una soluz $\Longleftrightarrow$ A iniettiva

• $\forall b \ \exists$ unica soluz $\Longleftrightarrow$ A bigettiva (e la soluz. è $x = A^{-1} \cdot b$)

Def: chiamo rango di $f: V \to W$ lineare

$$\operatorname{rank}(f) = \dim(\operatorname{Im}(f))$$

Per $A \in M_{m \times n}$, pongo

$$\operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(f_A)$$

= dim (spazio generato dalle colonne)

= max numero di colonne di $A$ che costituiscono un sist. di vett. lin. indip.

Teo (Rouché - Capelli):

il sistema $A \cdot x = b$ ha soluz.

$\iff \operatorname{rank}(A) = \operatorname{rank}(A \;\; b)$

(Da non usare per vedere se la soluz c'è: meglio cercarla.)

<u>Dim:</u> $\exists$ soluz $\iff b \in \operatorname{Im}(A)$

$\iff b$ è comb. lin. delle col. di $A$

$\iff \operatorname{rank}(A, b) = \operatorname{rank}(A)$. $\blacksquare$

Def: chiamo omogeneo un sistema con $b = 0$
cioè $A \cdot x = 0$.

Oss: l'insieme delle soluz. di un sist. omogeneo è $\{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = 0\} = \mathrm{Ker}(A)$ dunque è sottosp. vett. (contiene $0$ : è $\neq \emptyset$).

Oss: un sistema non omogeneo può non avere

Nessuna soluzione:

**Es**

$$\left\{ 0 \cdot x = 1 \right.$$

**Es**

$$\begin{cases} x - 2y + 5z = 9 \\ 7x + 4y - 3z = 2 \\ -4x - 10y + 18z = 24 \end{cases}$$

Impossibile.

"struttura dell'insieme delle soluzioni, se $\neq \emptyset$, di un sistema lineare":

**Teo**: se $A \cdot x = b$ ha la soluz. $x_0$ allora:

$$\{x \in \mathbb{R}^n : A \cdot x = b\} = \{x_0 + y : y \in \mathbb{R}^n, A \cdot y = 0\}$$

la generica soluz. di un sistema lin.

è la somma di

una soluz. part. di tale sist.

la generica soluz. del sist. omog. associato

SE una soluz. c'è

Dim: $A \cdot x = b \iff A \cdot x = A \cdot x_0$

$\iff A(x - x_0) = 0$

$\iff x - x_0 = y$ e $A \cdot y = 0$

$\iff x = x_0 + y$ e $A \cdot y = 0$. $\blacksquare$

Terminologia: un sistema $\underset{m\times n}{A} \cdot \underset{n\times 1}{x} = \underset{m\times 1}{b}$

(m equaz in n incognite) si dice:

- quadrato se $m=n$
- sovradeterminato se $m>n$
- sottodeterminato se $m<n$.

Oss: un sistema non omog. può non avere soluz; se ne ha

- se è quadrato o sovradeterminato può avere una sola (se $A \in M_{m \times n}$ $m \geq n$ iniettiva)

oppure infinite $\{x_0 + y : y \in \operatorname{Ker} A\}$ (se A non è iniettiva)

- se è sottodeterminato ha per forza infinite soluz

$$\{x_0 + y : y \in \operatorname{Ker} A\}$$

$$A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^m \qquad m < n$$

è per forza non iniettiva.

<u>Eliminazione di Gauss</u> (algoritmo per risolvere $A \cdot x = b$).

Fatto: da un sistema se ne ottiene uno equivalente (con stesse soluz.)

→ riordinando le equazioni

→ sostituendo una equaz. con una comb. lin. di equaz. in cui essa ha coeff $\neq 0$.

**Scritti**: 9/1, 30/1, 15/2 (pom?)