

Algebra lineare 13/12/17

B4

① Considerare per $t \in \mathbb{R}$ la $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ linc.

$$f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} t-1 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(A) Per quali t f esiste unica $\quad$

Se $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix}$ sono base la f esiste unica.

Se non sono una base: $v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2$; due casi

- $w_3 = \alpha w_1 + \beta w_2$, posso sempre trovare come vettore
 $\exists$ su un terzo vettore v_3' che forma
 una base con $v_1, v_2 \Rightarrow \exists$ esiste non unica
- $w_3 \neq \alpha w_1 + \beta w_2$: le $\exists$ non esiste.

$$v_1, v_2, v_3 \text{ base} \Leftrightarrow \det \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & t^2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \neq 0$$

$$\Leftrightarrow 2 - 2t^2 \neq 0 \Leftrightarrow t^2 \neq 1 \Leftrightarrow t \neq \pm 1$$

(B) Verifichiamo che esiste t_0 per cui $\exists$ può essere

Setze sie initiale sie no-Explicite teli γ .

$$v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ t^2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad t = \pm 1 : \quad v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$v_3 = \alpha v_1 + \beta v_2 \quad \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$w_3 \neq \alpha w_1 + \beta w_2$$

$$t = +1 \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \neq 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad S_2$$

dann γ von $\bar{e}$ nicht

se selgo $v_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

- imponendo $f(v_3') = 0$ viene non iniettiva
- imponendo $f(v_3') = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ viene iniettiva

$$t = -1 \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} -2 \\ -3 \\ 3 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \quad \underline{No}$$

f non esiste

Imponi $t_0 = +1$

(c) Per $t=t_0$ con f non invertiva

$\text{Ker } f$ è ben determinato! Se si trovano eq. cont.
 $\text{Im } f$ è " " ? " " " "

Per determinare f nel caso $t=1$ devo

scegliere v_3' e stabilire punto reale $f(v_3')$.

Se scelgo $v_3' = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(v_3') = 0$ ho $\text{Ker}(f) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$

" " $v_3' = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $f(v_3') = 0$ ho $\text{Ker}(f) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$
 $\Rightarrow \text{Ker}(f)$ non è determinato.

f non iniettiva $\Rightarrow \dim(\text{Im} f) < 3$

ma $\text{Im}(f)$ contiene W_1, W_2 lin. indep.

$$\Rightarrow \text{Im}(f) = \text{Span}(W_1, W_2) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}\right)$$

$$E_p, \text{ cart: } x + y + z = 0$$

$$(\textcircled{D}) \text{ } P_a \text{ } t = 1/\sqrt{2} \text{ } \text{ trovare } [f]_{\mathcal{E}_3}^{\mathcal{E}_3}$$

$$f. \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1/2 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2}-1 & -1 & -2 \\ -3 & 2 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$f = \left(\begin{pmatrix} \vdots \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix} \right)^{-1}$$

$$\textcircled{2} \quad A = \begin{pmatrix} i(1-z) & \boxed{i} & z+1 & \boxed{1} \\ z+z & 1 & 0 & -i \\ 3i & \boxed{i} & iz & \boxed{2} \end{pmatrix}$$

(A) Trovare $\text{rank}(A)$ ≥ 1 ≥ 2

$$\det \begin{pmatrix} i & z+1 & 1 \\ 1 & 0 & -i \\ i & iz & z \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & z+1 & 0 \\ 1 & 0 & -i \\ 0 & iz & 1 \end{pmatrix} = -(z+1)$$

Se $z \neq -1$, $\text{rank}(A) = 3$; per $z = -1$

$$A = \begin{pmatrix} 2i & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & -i \\ 3i & i & -i & 2 \end{pmatrix}$$

$$\det \begin{pmatrix} 2i & 1 & 1 \\ 2 & 1 & -i \\ 3i & i & 2 \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} = 0$$

$$\Rightarrow \text{rank}(A) = 2$$

(B) Per A non supettive trovare ep. per. di $\text{Re } f$ e car. di $\text{Im}(f)$ e verificare formula dim.

$$A: \mathbb{C}^4 \rightarrow \mathbb{C}^3, \text{rank}(A) = 2$$

$$\Rightarrow \dim(\text{Ker } A) = 4 - 2 = 2 \Rightarrow \text{servono } 2 \text{ parametri.}$$

$$\dim \text{Im}(A) = 2 \Rightarrow \text{servono } 3 - 2 \text{ equazioni.}$$

$$\begin{array}{cccc} 2i & i & 0 & 1 \end{array}$$

$$(-i \cdot \text{II})$$

$$\begin{array}{cccc} 2 & 1 & 0 & -i \end{array}$$

$$+iW = 2x + y \quad W = -2ix - iy$$

$$\begin{array}{cccc} 3i & i & -i & 2 \end{array}$$

$$3ix + iy - iz - 4ix - 2iy = 0$$

$$iz = -ix - iy$$

$$z = -x - y$$

$$w = -2ix - iy$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ -2i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ -i \end{pmatrix}$$

OK

(C) Per quali z esiste $B \in M_{4 \times 3}$ con $B \cdot A = I_4$?

$$\underset{4 \times 3}{B} \cdot \underset{3 \times 4}{A} \stackrel{?}{=} I_4$$

A mai injectiv $\Rightarrow B \cdot A$ mai injectiv
mai

(D) $\forall z \neq 0$ există $B \in M_{4 \times 3}$ t.c. $A \cdot B = I_3$

$$A = \begin{pmatrix} i & i & 1 & 1 \\ 3 & 1 & 0 & -i \\ 3i & i & 0 & 2 \end{pmatrix}; \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ i & 1 & 1 \\ -i & 0 & -i \\ 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}^{-1}$$

$\det \neq 0$

$$\boxed{35} \quad E_k: \begin{pmatrix} k & -2 & 1+k & 2 & -k \\ 1 & 2+k & k & 1+k & 1 \\ 4 & -k & 1+k & -4 & k+2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \\ u \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} k^2 \\ 3+k \\ 2 \end{pmatrix}$$

(A) Base della fibrazione di E_{-1}

$$\begin{array}{ccccc} -1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 4 & 1 & 0 & -4 & 1 \end{array} \quad \begin{array}{ccccc} -1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ 5 & 3 & 1 & -6 & 0 \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccc} -1 & -2 & -1 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & -2 & 0 \\ -1 & -6 & 1 & 0 & 0 \end{array}$$

$$Z = x + 6y$$

$$W = \frac{1}{2} (2x + 3y)$$

$$u = x + 2y + z - 2W$$

$$= \alpha \cdot x + \beta \cdot y$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ \alpha \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 6 \\ 3/2 \\ \beta \end{pmatrix}$$

(B) Trovare posiz. reciproca di E_0 e F : $\begin{pmatrix} 1-t \\ 2+3t \\ 8t \\ 5-t \\ -4t \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} 0(1-t) - 2(2+3t) + 1 \cdot 8t + 2 \cdot (5-t) + 0(-4t) = 0 \\ 1(1-t) + 2(2+3t) + 0 \cdot 8t + 1 \cdot (5-t) + 1(-4t) = 3 \\ 4(1-t) + 0(2+3t) + 1 \cdot 8t - 4(5-t) + 2(-4t) = 2 \end{cases}$$

$$\begin{cases} -4 - 6t + 8t + 10 - 2t = 0 \\ 1 - t + 4 + 6t + 5 - t - 4t = 3 \\ 4 - 4t + 8t - 20 + 4t - 8t = 2 \end{cases}$$

$$E_0 \cap F = \emptyset$$

Versione originale: segue superficie

$\Rightarrow$ giacitura di $F \subset$ giacitura di E_0

$\Rightarrow F \parallel E_0$

(C) Eq. par. per E_1

1	-2	3	2	-1	1
1	3	1	2	1	4
4	-1	2	-4	3	2

1	-2	3	2	-1	1
2	1	4	4	0	5
7	-7	11	2	0	5

1	-2	3	2	-1	1
7	-7	11	2	0	5
-12	15	-18	0	0	-5

$$z = \frac{1}{18} (-12x + 15y - 5)$$

$$w = -\frac{1}{2} (7x - 7y + 11z + 5) = (\dots)x + (\dots)y + (\dots)$$

$$u = x - 2y + 3z + 2w + 1 = (\dots)x + (\dots)y + (\dots)$$

$$E_1: \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -5/18 \\ * \\ * \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2/3 \\ * \\ * \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 5/6 \\ * \\ * \end{pmatrix} \right)$$

(D) Calcolare $\dim E_k$

$A_k = \text{matr. incompl.}$

Se $\text{rank}(A_k) = 3$

allora $E_k \neq \emptyset$, $\dim(E_k) = 5 - 3 = 2$

Se $\text{rank}(A_k) < 3$ devo vedere...

$$\begin{pmatrix} k & \boxed{-2} & 1+2k & \boxed{2} & -k \\ 1 & 2+k & k & 1+k & 1 \\ 4 & \boxed{-k} & 1+k & \boxed{-4} & k+2 \end{pmatrix}$$

$$\text{rank} \geq 1$$

$$\text{rank} \geq 2 \quad \text{if} \quad k \neq -2$$

$$k = -2$$

$$\begin{array}{ccccc} -2 & -2 & -3 & 2 & 2 \\ 1 & 0 & -2 & -1 & 1 \\ 4 & 2 & -1 & -4 & 0 \end{array} \leftarrow -I + 2 \cdot II$$

$$\text{rank}(A_k) = 2; \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$2 \neq -4 + 2 \cdot 1 \Rightarrow E_{-2} = \emptyset$$

$$k \neq -2$$

$$\det \begin{pmatrix} k & -2 & 2 \\ 1 & 2+k & 1+k \\ 4 & -k & -4 \end{pmatrix} = (k+2)(k^2 - 5k - 16)$$

Sapendo un'altra matrice 3×3 reale
che ha det nullo per $k = -2$ e altri valori

che non sono radici di $k^2 - 5k - 16$.

$\Rightarrow$ per $k \neq -2$, $\text{rank} = 3$, $\dim = 2$.

40 ① su $\mathbb{R}^3$

$$V: 5x - 4y + 6z = 0$$

$$W: 8x + 7y - 6z = 0$$

(A) Trovare $B = (v_1, v_2)$ base di V con v_1, v_2 aventi una coord. nulla, le altre intere pos. / primo fra loro, le prime di v_1 maggiori di quelle di v_2 .

$$\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

v_1 v_2

(B) $\subseteq$ per W come sopra

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 7 \end{pmatrix}$$

w_1 w_2

(C) Se $f: V \rightarrow W$ è lin.

$$e [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$$

calcolare $f(8e_1 + e_2 - 6e_3)$

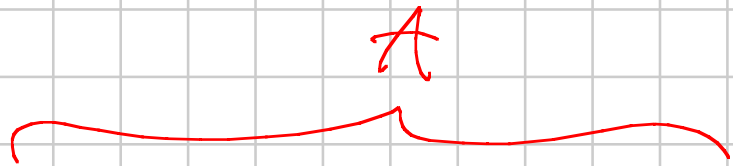
Ha senso? $\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} \notin V$

$$40 - 4 - 36 = 0 \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ 1 \\ -6 \end{pmatrix} = 2 \underset{v_1}{\begin{pmatrix} 4 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}} - 3 \underset{v_2}{\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix}} \quad [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix}$$

$$[f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -19 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$\rightarrow f(v) = -19 \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} - 7 \begin{pmatrix} 0 \\ 6 \\ 11 \end{pmatrix} = \dots$$



(D) Provare che $g(x) = \begin{pmatrix} 23 & -20 & 24 \\ 3 & 0 & -6 \\ 38 & -30 & 29 \end{pmatrix} \cdot x$
definisce $g: V \rightarrow W$ e trovare $[g]_{\mathcal{B}}$.

$$V: 5x - 4y + 6z = 0$$

$$W: 9x + 7y - 6z = 0$$

g se esiste e' la restrizione a V e
abbreviazione a W di f_A : possibile

solo se $\mathcal{I}_A(V) \subset W$. Da verificare:

per ogni $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ l.c. $(5, -4, 6) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

si ha che $(9, 7, -6) \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$

Per farlo basta vedere che $(9, 7, -6) \cdot A = k \cdot (5, -4, 6)$.

$$(9, 7, -6) \begin{pmatrix} 23 & -20 & 24 \\ 3 & 0 & -6 \\ 38 & -30 & 28 \end{pmatrix} = (0, 0, 0) \\ = 0 \cdot (\quad \quad \quad)$$

