

Algebra lineare 12/12/17

43 ① Completare $e_1 + e_2 - e_4$ e base di
 $\{x \in \mathbb{R}^4 : 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 + 5x_4 = 0\}$

Ha senso? $3 + 2 - 5 = 0 \quad \checkmark$

$\text{Dim} = 4 - 1 = 3$: servono due vettori $\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 5 \\ 4 \end{pmatrix}$:
insieme a $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$ sono lin. indep.

② $f: \{z \in \mathbb{C}^3 : 3z_1 + iz_2 - 2z_3 = 0\} \rightarrow \mathbb{C}^5$ injective
 $W + \text{Im}(f) = \mathbb{C}^5$, $W \cap \text{Im}(f) = \{0\}$.
 $\dim W = ?$

$$\dim(W) = 5 - \dim(\text{Im } f) = 5 - \dim(\text{dominio } f) =$$

$$= 5 - (3 - 1) = 3$$

③ Trovare $[f]_{\mathcal{B}}$, $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, $f(e_1) = 3e_1 - 2e_2$
 $f(e_2) = -e_1 + 4e_2$

$$B = (4e_1 - 3e_2, -3e_1 + 2e_2)$$

$$f = \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ -2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 15 \\ -20 \end{pmatrix} = 30 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 35 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -11 \\ 14 \end{pmatrix} = -20 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} - 23 \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_B^B = \begin{pmatrix} 30 & -20 \\ 35 & -23 \end{pmatrix}$$

④ dato $A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ -2 & 1 & 1 \\ -3 & 1 & -1 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{23}$

$$(A^{-1})_{23} = - \frac{\det \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} -8 & 1 & 0 \\ -5 & 2 & 0 \\ - & - & -1 \end{pmatrix}} = - \frac{7}{11}$$

⑥ Résolvez $2z^2 - (7+2i)z + 3(2+i) = 0$

$$\Delta = (7+2i)^2 - 24(2+i) =$$

$$= 49 + 28i - 4 - 48 - 24i$$

$$= -3 + 4i$$

caso radici $a+ib$: $a^2 - b^2 + 2iab = -3 + 4i$

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ ab = 2 \end{cases}$$

Prendo $a=1, b=2$

($a=-1, b=-2$)

$$z_{1,2} = \frac{7+2i \pm (1+2i)}{4} = \begin{matrix} \swarrow & 2+i \\ \searrow & 3/2 \end{matrix}$$

(5) Trovare le onlate di $1+i$ in $\begin{pmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2-i & 3 & 1+i \\ 1 & 0 & 3-2i \end{pmatrix}$
trovare quelle con det d.
modulo max.

$$\left| \det \begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 2-i & 1+i \end{pmatrix} \right|^2 = 20 \quad \left| \det \begin{pmatrix} i & -2 \\ 3 & 1+i \end{pmatrix} \right|^2 = |i-1+6|^2 = 26$$

$$\left| \det \begin{pmatrix} 2-i & 1+i \\ 1 & 3-2i \end{pmatrix} \right|^2 = |6-4i-3i-2-1-i|^2 = |3-8i|^2 = 73$$

$$\left| \det \begin{pmatrix} 3 & 1+i \\ 0 & 3-2i \end{pmatrix} \right|^2 = 9 \cdot 13 = 117$$



⑦ Posto $g(x) = \begin{pmatrix} x_3 - x_2 \\ -2x_3 \\ x_1 - x_2 \end{pmatrix}$ $W = \{x \in \mathbb{R}^3 : 2x_1 - 3x_2 + 4x_3 = 0\}$
 provare che $g(W) \subset W$ e trovare $[g]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$
 $\mathcal{B} = (3e_1 + 2e_2, 4e_2 + 3e_3)$.

Oss: se $A \in M_{m \times m}$, $X = \{x \in \mathbb{R}^m : \underset{m \times 1}{\omega} \cdot x = 0\}$

Se ho $\omega \cdot A = k \cdot \omega$ ho che $\forall x \in X$

$$\omega \cdot (A \cdot x) = (\omega \cdot A) \cdot x = k \omega \cdot x = k \cdot 0 = 0$$

dunque ho $f_A(X) \subset X$ e allora la
formula $g(x) = A \cdot x$ definisce $g: X \rightarrow X$ lin.

In questo caso:

$$\omega = (2, -3, 4)$$

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\omega \cdot A = (4, -6, 8) = 2 \cdot \omega \quad \checkmark$$

$$\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} : \quad \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = -\frac{2}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \frac{1}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -1 \\ -6 \\ -4 \end{pmatrix} = -\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -2 & -1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{45} \quad ① \quad B = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} \quad B' = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix} \quad [v]_B = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$[v]_{B'} = ?$$

$$v = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix} = -13 \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} - 8 \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$[v]_{B'} = - \begin{pmatrix} 13 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$\textcircled{2} \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \quad (A^{-1})_{2,1} = \dots$$

$$= - \frac{\det \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{\det \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}} = - \frac{4}{-3} = \frac{4}{3}$$

$\textcircled{3}$ Quanti sono i polinomi in $\mathbb{R}_{\leq 2}[x]$
 con coeff. interi tra -2 e 2 , nulli per $x=1$.

Numero di el. di $\{(a_0, a_1, a_2) : a_i \in \{-2, -1, 0, 1, 2\} \mid a_0 + a_1 + a_2 = 0\}$
si conta ignorando l'ordine (a_0, a_1, a_2) e poi si conta:
con l'ordine:

-2, 0, 2

6

-2, 1, 1

3

-1, -1, 2

3

-1, 0, 1

6

0, 0, 0

1
—
19

④ Def $f: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^9$ lin. con $f(e_i) = f(e_6)$
 $W \subset \mathbb{R}^9$, $W \oplus \text{Im}(f) = \mathbb{R}^9$; $\dim W = \dots$

$$\dim(W) = 9 - \dim(\text{Im } f)$$

unica riducente su f : $e_1 - e_6 \in \text{Ker } f$
cioè $\dim(\text{Ker } f) \geq 1$

$$0 \leq \dim(\text{Im } f) \leq 5$$

$$\Rightarrow 4 \leq \dim(W) \leq 9$$

⑤ Risolvere



$$\begin{cases} 2x + 3y - 4z = 1 \\ 3x - 2y + 5z = -2 \\ 7x + 4y - 3z = 0 \end{cases}$$

Trovare tutte le soluzioni:

$$\begin{array}{l} \text{II-I} \\ \text{I} \\ \text{II} \end{array} \left\{ \begin{array}{l} x = 5y - 9z - 3 \\ 10y - 18z + 3y - 4z = 6 + 1 \\ 35y - 63z + 4y - 3z = 21 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} x = 5y - 9z - 3 \\ 13y - 22z = 7 \\ 39 - 66z = 21 \end{array} \right.$$

$$\begin{pmatrix} -4/13 \\ 7/13 \\ 0 \end{pmatrix} + \text{Span} \left(\begin{pmatrix} -7 \\ 22 \\ 13 \end{pmatrix} \right)$$

Si può scrivere in molti modi

⑥ Quanti parametri servono per descrivere

$$E: \begin{cases} 3x - 4y + 5z - 7w = -2 \\ 2x - 4y + 4z - 5w = 1 \\ 5x - 4y + 7z - 11w = -8 \end{cases}$$

Qss: Supponiamo di avere

$$E: \begin{matrix} A & \cdot & x & = & b \\ m \times n & & n \times 1 & & m \times 1 \end{matrix}$$

$m \leq n$. Se le righe di A sono
lin. indep. (parte over. e part. lin. indep.)
ho $\text{rank}(A) = m \Rightarrow \dim(\text{Ker} A) = n - m$;
inoltre $\text{rank}(A|b) = m$
(aggiungendo una colonna o resta m
o diventa $m+1$: $m+1$ no perché
ho m righe). Rouché-Capelli: $\exists$ soluz.

Riassunto: un sistema di m equez. in n incognite, $m \leq n$, part. omop. delle equez. lin. indep. ha soluz $\neq \emptyset$ che sono un sottosp. aff. di dim $= n - m$.

$$E: \begin{cases} 3x - 4y + 5z - 7w = -2 \\ 2x - 4y + 4z - 5w = 1 \\ 5x - 4y + 7z - 11w = -8 \end{cases}$$

$$\text{III} \neq \alpha \cdot \text{I} + \beta \cdot \text{II}$$

$$\begin{cases} 3\alpha + 2\beta = 5 \\ -4\alpha - 4\beta = -4 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha + \beta = 1 \\ \alpha = 3 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 3 \\ \beta = -2 \end{cases}$$

$\Rightarrow$

Ora: 2 equez. in 4 inc. con parte omissa
delle equez. lin indep $\Rightarrow E \neq \emptyset$, da $E = 4 - 2 = 2$.
Ci vogliono 2 parametri; esistono anche

presentato con qualsiasi numero $k \geq 2$ di param.

⑦ Dati $v_1, v_2, v_3 \in \left\{ z \in \mathbb{C}^7 : \sum_{m=1}^7 (-i)^m z_m = 0 \right\} = V$
cerco base B di V che contenga il max numero
possibile di v_j ; quanti nuovi vettori vanno aggiunti?

$\dim(V) = 6$. Posso usare tra 0 e 3
(a seconda di $\dim \text{Span}(v_1, v_2, v_3)$);

devo aggiungere tre 3 e 6 -

[47] ① $(1 + 3\sqrt{2})^2 \notin \mathbb{Q}$

$$x = 1 + 6\sqrt{2} + 18 = 19 + 6\sqrt{2}$$

Se $\sqrt{x}$ fosse razionale, $\frac{1}{6}(x - 19) = \sqrt{2}$
sarebbe razionale: no

48 ① $\sqrt{2} + \sqrt{11 - 6\sqrt{2}} \neq \textcircled{1}$ con a, b razionali

Cerco $\sqrt{11 - 6\sqrt{2}}$ della forma $a + b\sqrt{2}$: voglio

$$a^2 + 2ab\sqrt{2} + 2b^2 = 11 - 6\sqrt{2}$$

$$\begin{cases} a^2 + 2b^2 = 11 \\ ab = -3 \end{cases} \quad a=3 \quad b=-1$$

$$\Rightarrow \sqrt{2} + \sqrt{1-6\sqrt{2}} = \sqrt{2} + 3 - \sqrt{2} = 3 \quad \sqrt{2}, e^{i\pi} \in \mathbb{Q}$$

[47] ② Completare $-2e_1 - e_2 + e_3 + i e_4$ a base di

$$\{z \in \mathbb{C}^4; iz_1 + 2z_2 + (1+i)z_3 + (1-i)z_4 = 0\}$$

Ha senso? $-2i - 2 + 1 + i + i + 1 = 0 \quad \checkmark$

Vanno aggiunti $(4-1)-1 = 2$ vettori.

$$\begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ i \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 2i \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

questi vanno bene

③ Risolvere

$$\begin{cases} 2x - 3y + z = -14 \\ 3x + 2y - 5z = 5 \\ 4x + 5y - 3z = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = -2x + 3y - 14 \\ 3x + 2y + 10x - 15y + 70 = 5 \\ 4x + 5y + 6x - 9y + 42 = 10 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 13x - 13y = -65 \\ 10x - 4y = -32 \\ z = \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} y = x + 5 \\ 6x = -12 \\ z = \dots \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = -2 \\ y = 3 \\ z = 4 + 9 - 14 = -1 \end{cases}$$

④ Se $A = (v_1, v_2, v_3) \in M_{3 \times 3}(\mathbb{C})$, $\det(A) \neq 0$;

$$B = ((1-i)v_2 + v_3, 3v_1 + iv_3, v_1 - iv_2 + 2v_3)$$

$$\det(B) / \det(A) = ?$$

• Uso lineariet  del det nelle colonne:

$$(1-i) \cdot 3 \cdot 2 \det(v_2, v_1, v_3)$$

$$+ (1-i) \cdot i \cdot 1 \det(v_2, v_3, v_1)$$

$$1 \cdot 3 \cdot (-i) \det(v_3, v_1, v_2)$$

$$\begin{aligned}
 = & 6(1-i) \cdot \underbrace{\det(v_2, v_1, v_3)}_{-\det(A)} + i(1-i) \underbrace{\det(v_2, v_3, v_1)}_{+\det(A)} \\
 & - 3i \underbrace{\det(v_3, v_1, v_2)}_{+\det(A)}
 \end{aligned}$$

$$\bullet \quad B = (v_1, v_2, v_3) \cdot \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 3 & 1 \\ 1-i & 0 & -i \\ 1 & i & 2 \end{pmatrix}}_{\det(\uparrow)}$$