11/10/17

Sottospazi: $\underline{V}$ sp. vett.

$W \subseteq V$ è un sottospazio se:

(1) $0 \in W$

(2) $\forall\, w_1, w_2 \in W \quad w_1 + w_2 \in W$

(3) $\forall c \in \mathbb{R}, \forall w \in W, \quad cw \in W$

$V = \mathbb{R}^n \quad , \quad (x_1, \dots, x_n)$

$W = \{ 2x_1 + x_2 = 0 \}$

- $0 \in W$ ✓

- $w \in W \iff x_2 = -2x_1 \iff$

$w = (x_1, -2x_1, x_3 \dots \dots)$

Se $w_1 = (a, -2a, \dots)$

$w_2 = (b, -2b, \dots)$

$w_1 + w_2 = (a+b, -2a-2b, \dots)$

$$= (a+b, -2(a+b), \ldots\ldots) \in W.$$

Analogamente: $w = (a, -2a, \ldots\ldots)$

$c \in \mathbb{R}$

$$cw = (ca, \underset{\underset{-2(ac)}{\shortparallel}}{-2ac}, \ldots\ldots) \in W$$

$\Rightarrow$ W è un sottospazio.

W è della forma $\{ f(x_1, \dots, x_n) = 0 \}$

(nell'esempio : $f = 2x_1 + x_2$

Vale : $v, w \in \mathbb{R}^n$: $f(0) = 0$

$\forall c \in \mathbb{R}$ $f(v+w) = f(v) + f(w)$

$f(cv) = c f(v)$

$v = (x_1 \dots x_n)$

$w = (y_1, \dots, y_n)$, $v+w = (x_1+y_1, \dots , x_n+y_n)$

$$f(v+w) = 2(x_1+y_1)+(x_2+y_2) =$$
$$= (2x_1+x_2)+(2y_1+y_2) =$$
$$= f(v)+f(w)$$

$\mathbb{R}^n$

$$W = \{ x_1 x_2 = 0 \}$$
$$w_1 = (1, 0 \dots 0), \quad w_2 = (0, 1, 0 \dots 0)$$
$$w_2, w_1 \in W$$
$$w_1 + w_2 = (1, 1, 0 \dots 0) \notin W$$

$\Rightarrow W$ non è un sottospazio.

$$W = \{ x_1^3 = x_2^3 \} = \{ x_1 = x_2 \}$$

$\uparrow$ è un sspazio

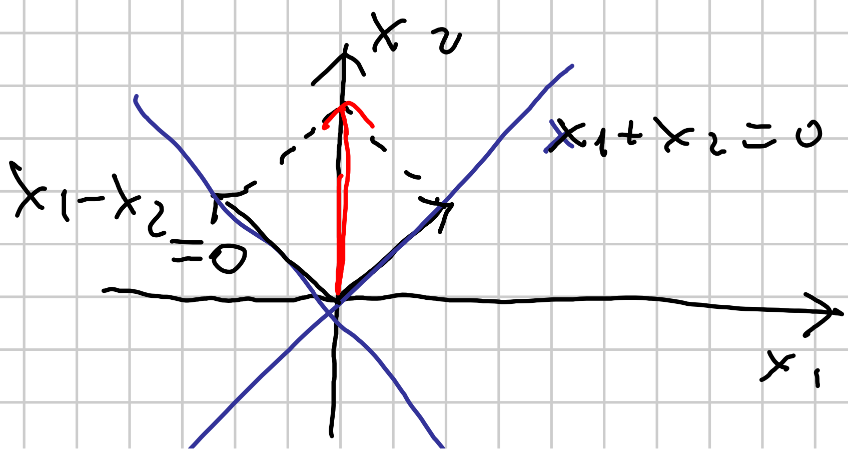
(verifica x esercizio)

$W = \{ x_1^2 = x_2^2 \}$ $\quad w_1 = (1, 1, 0 \dots 0) \in W$

$w_2 = (1, -1, 0 \dots 0) \in W$

$w_1 + w_2 = (2, 0 \dots 0) \notin W$

$\Rightarrow W$ non è un sottospazio



$n = 2$

$x_1^2 - x_2^2 = (x_1 + x_2)(x_1 - x_2)$

$V = \mathcal{F}(\{a, b, c\}; \mathbb{R})$

$W = \{ f \in V \mid f(c) \geq 2 f(a) \}$

$0 \in W$

prendo f :

$a \longmapsto 0$

$b \longmapsto 0$

$c \longmapsto 1$

$-f$:

$a \longrightarrow 0$

$b \longrightarrow 0$

$c \longrightarrow -1$

$\Rightarrow (-f)(c) < 2f(a) = 0$

$\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; \|$

$\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\;\; -1$

$\Rightarrow -f \notin W \quad \Rightarrow$ W non è un s-spazio.

Morale: attenti alle disuguaglianze!!

$W = \{ x_1^2 + x_2^2 \leq 0 \} \subseteq \mathbb{R}^2$

$= \{(0,0)\}$ è un s-spazio

$V = \mathbb{R}[t]$

$W = \{ p \in V \mid \deg(2p'(t) - 3t^2 p'''(t)) \leq 5 \}$

- $0 \in W$
- $p \in W, \quad c \in \mathbb{R}$

$$2(cp)'(t) - 3t^2 (cp)'''(t) =$$

$$= 2c\,p'(t) - 3c\,t^2 p'''(t) =$$

$$= c\left(2p'(t) - 3t^2 p'''(t)\right)$$

$\Rightarrow \quad cp \in W$

$-\quad p, q \in W \quad , \quad p+q \in W?$

$$2(p+q)'(t) - 3t^2 (p+q)'''(t) =$$

$$= 2p'(t) + 2q'(t) - 3t^2 \left(p'''(t) + q'''(t)\right) =$$

$$= \left(2p'(t) - 3t^2 p'''(t)\right) + \left(2q'(t) - 3t^2 q'''(t)\right)$$

deg ≤ 5, x ipolen

$\Rightarrow \quad p+q \in W$

ha deg ≤ 5

$\Rightarrow$ W è un sottospazio

$V = \mathbb{R}^2$, $\qquad w_1 = \begin{pmatrix} -2 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Span}(w_1) = \{ c\, w_1 \mid c \in \mathbb{R} \} =$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} -2c \\ 5c \end{pmatrix} \middle| \; c \in \mathbb{R} \right\}$$

$v = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $\quad v \in \mathrm{Span}(w_1)$?

Considero:

$$\begin{pmatrix} +3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2c \\ 5c \end{pmatrix}$$

$$\iff \begin{cases} -2c = 3 \\ 5c = -4 \end{cases} \iff \begin{cases} c = -3/2 \\ c = -\frac{4}{5} \end{cases}$$

NON C'È SOLUZIONE

$$v \notin \mathrm{Span}(w_1).$$

Per casa:

$$v = \begin{pmatrix} 3 \\ 7 \end{pmatrix}, \quad w_1 = \begin{pmatrix} 4 \\ -11 \end{pmatrix}, \quad w_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$v \in \mathrm{Span}(w_1, w_2) \,?$$