

Algebra Lineare 8/11/17

Q: come cambiano $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ e $[\cdot]_{\mathcal{B}}^e$ cambiando $\mathcal{B}$ (e $\mathcal{C}$)?

$$\text{id}_X: X \rightarrow X$$

$$\text{id}_X(x) = x \quad \forall x$$

QSS: $I_n \in M_{n \times n}$

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{pmatrix}$$

rappresenta la funzione $\text{id}_{\mathbb{R}^n}$: $I_n \cdot x = x \quad \forall x$

$$A \in M_{m \times m}, \quad A: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m \quad (A = f_A)$$

lineare

sappiamo: A come appl. può essere invertibile solo se $m = n$. Definiamo $A \in M_{m \times m}$ invertibile se lo è come appl. lin. ;

Def: $A \in M_{m \times m}$ è invertibile con inversa $B \in M_{m \times m}$ se $A \cdot B = B \cdot A = I_m$; scriviamo $B = A^{-1}$.

Oss: sapendo che $A, B \in M_{m \times m}$,

sapendo una sola delle due $A \cdot B = I_m$ o $B \cdot A = I_m$

si conclude che vale l'altra e dunque che $B = A^{-1}$.

Oss: falso se non si sa che A, B sono quadrate:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

2×3

mai invertiti.

3×2

Definizione simbolica sintetica $[\cdot]_{\mathcal{B}}$ e $[\cdot]_{\mathcal{B}}^T$.

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ base di V dico che $[v]_{\mathcal{B}} = x$ se

$v = x_1 v_1 + \dots + x_m v_m$; risolvio queste uguaglianze come

$$(*) \quad v = (v_1, \dots, v_m) \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}$$

nuova def. di prodotto
(ma si espone come il prod righe x colonne)

Oss: se $V = \mathbb{R}^n$, $v_j \in \mathbb{R}^n \Rightarrow (v_1, \dots, v_m) \in M_{n \times m}$

in tal caso $\cdot$ è esattamente il prodotto righe $\times$ col.

Riservo :

(*)

$$v = B \cdot [v]_B$$

selezione caratterizzata
per $[v]_B$

Cioè : $[v]_B$ è quel vettore x t.c.
 $v = B \cdot x$.

$$f : V \rightarrow W$$

appl. line.

$$B = (v_1, \dots, v_n)$$

base di V

$$C = (w_1, \dots, w_m)$$

base di W ;

Def: $[f]_{\mathcal{B}}$ è quella matrice $A \in \mathbb{M}_{m \times m}$ t.c.

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j \quad i=1, \dots, m$$

Riscriviamo ora:

$$(f(v_1), \dots, f(v_m)) = \left(\sum_{j=1}^m w_j \cdot a_{j1}, \dots, \sum_{j=1}^m w_j \cdot a_{jm} \right)$$

$$(*) \quad \underset{\uparrow}{f} \cdot (v_1, \dots, v_m) = (w_1, \dots, w_m) \cdot \underset{\uparrow}{\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}}$$

|
nuovo

|
nuovo

Oss: se $V = \mathbb{R}^m$, $W = \mathbb{R}^m$ ho $(v_1, \dots, v_m) \in \mathcal{M}_{m \times m}$

$(w_1, \dots, w_m) \in \mathcal{M}_{m \times m}$

$f = f_B = B \in \mathcal{M}_{m \times m}$

e allora:

$$\underset{m \times m}{f} \underset{m \times m}{\cdot} (v_1, \dots, v_m) = (w_1, \dots, w_m) \underset{m \times m}{\cdot} \underset{m \times m}{A}$$

sono isolati!

Def sintetica di $[f]_B^C$:

$$f \cdot B = C \cdot [f]_B^C$$

proprietà caratterizzante per $[f]_B^C$

Cioè: $[f]_B^C$ è quella matrice A t.c.

$$f \cdot B = C \cdot A$$

Nuove dimo di fatti visti:

Prop: $[f(v)]_C = [f]_B^C \cdot [v]_B$

Dimo: $v = B \cdot [v]_B$ (def di $[v]_B$); applico f :

$$f(v) = f \cdot B \cdot [v]_B$$

$$= C \cdot \underbrace{([f]_B^C \cdot [v]_B)}_{\text{ho trovato un vettore } y \text{ t.c. } f(v) = C \cdot y} \quad (\text{def. di } [f]_B^C)$$

ho trovato un vettore y t.c. $f(v) = C \cdot y$

$$\Rightarrow y = [f(v)]_e$$

$$\Rightarrow [f(v)]_e = [f]_B^e \cdot [v]_B.$$



Prop:

$$V \xrightarrow{f} W \xrightarrow{g} Z$$

$B \quad C \quad D$

basis

$$\Rightarrow [g \circ f]_B^D = [g]_C^D \cdot [f]_B^C.$$

Dim 1:

$$B = (v_1, \dots, v_m) \quad C = (w_1, \dots, w_m) \quad D = (z_1, \dots, z_k)$$

$$A = [f]_B^C \quad X = [g]_C^D$$

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^m a_{ji} w_j$$

$$g(w_j) = \sum_{l=1}^k x_{lj} \cdot z_l$$

$$\begin{aligned} (g \circ f)(v_i) &= g(f(v_i)) = g\left(\sum_{j=1}^m a_{ji} w_j\right) = \sum_{j=1}^m a_{ji} g(w_j) \\ &= \sum_{j=1}^m a_{ji} \sum_{l=1}^k x_{lj} \cdot z_l = \sum_{l=1}^k \left(\sum_{j=1}^m x_{lj} \cdot a_{ji}\right) \cdot z_l \\ &= \sum_{l=1}^k (X \cdot A)_{li} \cdot z_l \Rightarrow [g \circ f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{D}} = X \cdot A. \quad \square \end{aligned}$$

Dim 2: $f \cdot \mathcal{B} = \mathcal{C} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$ (def $\perp [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$)

$$g \cdot e = d \cdot [g]_e^e$$

$$(df \downarrow [g]_e^e)$$

$$\Rightarrow (g \circ f) \cdot B = g \cdot f \cdot B = g \cdot e \cdot [f]_B^e = d \cdot \underbrace{[g]_e^e}_{\text{ho trovato matrice } Y \text{ e.}} \cdot [f]_B^e$$

ho trovato matrice Y e.

$$(g \circ f) \cdot B = d \cdot Y$$

$$\Rightarrow Y = [g \circ f]_B^d \quad \square$$

Matrice di cambio di base:

siano $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$, $\mathcal{B}' = (v'_1, \dots, v'_m)$ basi di V ;

chiamo matrice di cambio di base la $A = (a_{ji}) \in M_{m \times m}$

t.c.
$$v'_i = \sum_{j=1}^m a_{ji} v_j -$$

Oss: la matrice A di cambio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ è
$$[\text{id}_V]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}} -$$

Risultato sintetico: $(v'_1, \dots, v'_m) = (v_1, \dots, v_m) \begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1m} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mm} \end{pmatrix}$

cioè

$$\boxed{B' = B \cdot A}$$

relaz. caratterizzante
per un'unico A di cambio
da B a B' .

Prop: se $B' = B \cdot A$ allora A è invertibile e
 $B = B' \cdot A^{-1}$.

Oss: se $V = \mathbb{R}^m$ h. $B, B' \in M_{m \times m}$ e

l'applicazione $B' = B \cdot A$ è applicazione tra vettori
 $\uparrow$ prod righe $\times$ col.