8 / 11 / 17

$V$ sp. vett. $\quad W, Z \leq V$ sspazi

$$V = W \oplus Z \iff \begin{array}{l} (a)\ V = W + Z \\ (b)\ W \cap Z = \{0\} \end{array}$$

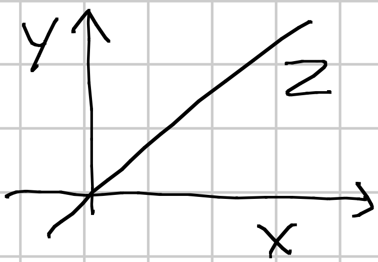
ES: 5.2.2

In $\mathbb{R}^4$: cerco $X, Y, Z \leq \mathbb{R}^4$

$\dim X = \dim Y = \dim Z = 2$.

e $\mathbb{R}^4 = X \oplus Y = X \oplus Z = Y \oplus Z$

Es: in $\mathbb{R}^2$, $\dim X = \dim Y = \dim Z = 1$
a due a due.




$Y = \{x = 0\}$

$X = \{y = 0\}$

$Z = \{x - y = 0\}$

Torniamo a $\mathbb{R}^4$, $X = \mathrm{Span}(e_1, e_2)$

$Y = \mathrm{Span}(e_3, e_4)$

$Z = \mathrm{Span}(e_1 + e_3, \; e_2 + e_4)$

Sono 3 sottosp. di dim $= 2$

$X + Y = \text{Span}(e_1, e_2, e_3, e_4) = \mathbb{R}^4$

$X + Z = \text{Span}(e_1, e_2, e_1 + e_3, e_2 + e_4) =$

$= \text{Span}(e_1, e_2, e_3, e_2 + e_4) =$

$= \text{Span}(e_1, e_2, e_3, \underbrace{e_4}_{(e_2+e_4)-e_2}) = \mathbb{R}^4$

$Y + Z$ : .. finire per esercizio

Es: 5.2.10: $\quad V = \mathbb{R}^3$

$W = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}\right) \qquad Z = \begin{cases} 2x_1 - x_2 + x_3 = 0 \\ 3x_1 + x_2 - 2x_3 = 0 \end{cases}$

(1) verificare che $V = Z \oplus W$

$\dim W = 2$. perché è generato da 2 vettori indip.

Per determinare di $Z$ risolvo:

$$\begin{cases} x_3 = 5x_1 \\ x_2 = -3x_1 + 2(5x_1) = 7x_1 \end{cases}$$

$$Z = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}\right) \qquad \dim Z = 1$$

Dato che $\underset{\substack{\| \\ 3}}{\dim V} = \dim Z + \dim W = 1 + 2$

Basta che verifichi $Z \cap W = \{0\}$ oppure $Z + W = \mathbb{R}^3$.

Per verificare che $Z \cap W = \{0\}$ posso far vedere:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \notin W$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + 2b \\ 2a - b \\ 3a + b \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} a + 2b = 1 \\ 2a - b = 7 \\ 3a + b = 5 \end{cases} \qquad \begin{cases} a = \frac{12}{5} \\ b = \frac{7}{10} \\ b = 5 - 3a = 5 - \frac{36}{5} = -\frac{11}{5} \end{cases} \rightarrow \times$$

Il sistema non ha sol $\Rightarrow$ $\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \notin W \Rightarrow Z \cap W = \{0\}$

$\Rightarrow \quad V = W \oplus Z$

(2) Scrivere esplicitamente le proiezioni:

$$p : V \longrightarrow W$$

$$q : V \longrightarrow Z,$$

Dato $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V = \mathbb{R}^3$, voglio scriverlo come

somma, $v = \underset{\in W}{p(v)} + \underset{\in Z}{q(v)}$

Devo trovare $a_1, a_2, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \underbrace{a_1\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}+a_2\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}}_{p(v)} + \underbrace{b\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}}_{q(v)}$$

$$\begin{cases} a_1 + 2a_2 + b = x \\ 2a_1 - a_2 + 7b = y \\ 3a_1 + a_2 + 5b = z \end{cases}$$

Per quanto osservato finora, sappiamo che $a_1, a_2, b$ sono univocamente det. da $x, y, z$.

In effetti:

$$a_1 = -\frac{12}{15} x - \frac{9}{15} y + z$$

$$a_2 = \frac{11}{15} x + \frac{2}{15} y - \frac{1}{3} z$$

$$b = \frac{1}{3} x + \frac{1}{3} y - \frac{1}{3} z$$

$$p: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \left(-\frac{12}{15} x - \frac{9}{15} y + z\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\frac{11}{15} x + \frac{2}{15} y - \frac{1}{3} z\right) \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$\varphi: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \left(\frac{1}{3}x + \frac{1}{3}y - \frac{1}{3}z\right) \begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(3) Verificare direttamente:

$$p + q = \mathrm{Id}_V$$

$$p^2 = p$$

$$q^2 = q$$

$$pq = qp = 0$$

Per verificare queste proprietà è sufficiente verificarle sui vettori di una qualunque base di $V = \mathbb{R}^3$

$$p\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$$

← usando la formula che ho ottenuto per $p$ e $q$

$$p\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$

$$q\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}$$

$$q\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}=q\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad p\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$p^2 = p$

$$p^2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = p\left(p\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}\right) = p\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \checkmark$$

$$q^2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} \checkmark$$

$$pq\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = p\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = 0 \checkmark$$

$$qp\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = 0 \checkmark$$

Allo stesso modo verifichiamo queste proprietà su $\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$ e $\begin{pmatrix}1\\7\\5\end{pmatrix}$

5.2.11 ! stesse richieste. $V = \mathbb{R}^3$

$$W = \{ 4x_1 + 3x_2 - 2x_3 = 0 \}$$

$$Z = \left\{ \begin{array}{l} -2x_1 + x_2 - 3x_3 = 0 \\ 4x_1 - x_2 + x_3 = 0 \end{array} \right\}$$

$\dim W = 2$

$\dim Z = 1$ ( risolvere il sistema e verificando )
Si ottiene una base di $Z$
$\Rightarrow$ dimensioni ok

verificare $Z \cap W = \{0\}$ oppure $\dim(Z+W) = 3$.