

Algebra Lineare 8/11/17

5.3.4 Esibire basi di $\ker(A)$, $\operatorname{Im}(A)$
(cioè di f_A).

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 8 \\ 4 & 1 & 6 \end{pmatrix} \in M_{2 \times 3}$$

$$A: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

$$\text{Base di } \operatorname{Im}(A) = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 8 \\ c \end{pmatrix} = \frac{20}{11} \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} - \frac{14}{11} \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \end{pmatrix}$$

Basis di $\ker(A)$:

$$\begin{pmatrix} -20 \\ 14 \\ 11 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & -3 & 1 & -4 \\ -3 & 5 & -1 & 7 \\ -1 & 3 & 1 & 5 \end{pmatrix} \in M_{3 \times 4}$$

$$A : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\text{Ker}(A) : \begin{cases} 2x - 3y + z - 4w = 0 \\ -3x + 5y - z + 7w = 0 \\ -x + 3y + z + 5w = 0 \end{cases} \cdot$$

$$\begin{cases} z = -3x + 5y + 7w \\ -x + 2y + 3w = 0 \\ -4x + 8y + 12w = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} x = 2y + 3w \\ z = -y - 2w \end{cases}$$

Base : $\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \dim = 2$

$$\dim(\text{Im } A) = 4 - 2 \Rightarrow \text{base} : \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 \\ 5 \\ -3 \end{pmatrix}.$$

5.3.5

$$A \in \mathcal{M}_{m \times m}$$

$$B \in \mathcal{M}_{k \times h}$$

$$f: \mathcal{M}_{m \times k} \rightarrow \mathcal{M}_{m \times h}$$

$$X \mapsto A \cdot X \cdot B$$

- $\text{bend } f$
- linear
- Ker

bend:

$$\begin{array}{ccccc} m \times n & m \times k & k \times h \\ \swarrow & \swarrow & \swarrow \\ & m \times h & \end{array}$$

lin:

$$f(k_1 X_1 + k_2 X_2) = k_1 f(X_1) + k_2 f(X_2)$$





$$A \cdot (k_1 X_1 + k_2 X_2) \cdot B$$

||

$$(k_1 A \cdot X_1 + k_2 A \cdot X_2) \cdot B$$

||

$$k_1 \cdot A \cdot X_1 \cdot B + k_2 \cdot A \cdot X_2 \cdot B$$



$$k_1 A \cdot X_1 \cdot B + k_2 \cdot A \cdot X_2 \cdot B$$

OK

$$\text{Ker}(f) = \{X \in \mathcal{M}_{m \times k} : A \cdot X \cdot B = 0\}$$

Qss : $M \in \mathcal{M}_{a \times b}$; $M = 0 \iff M \cdot y = 0 \forall y \in \mathbb{R}^b$

$\Rightarrow$: évident

$\Leftarrow$: $M \cdot e_i = i$ -ième colonne de M

$$= \{X \in \mathcal{M}_{m \times k} : (A \cdot X)(B \cdot y) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^b\}$$

$$= \left\{ X \in M_{m \times k} : A(X \cdot z) = 0 \quad \forall z \in \text{Im } B \right\}$$

$$= \left\{ X \in M_{m \times k} : X \cdot z \in \text{Ker}(A) \quad \forall z \in \text{Im}(B) \right\}$$

$$= \left\{ X \in M_{m \times k} : X(\text{Im}(B)) \subset \text{Ker}(A) \right\}.$$

5.3.7

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$$

Descrivere $\{B \in M_{2 \times 2} : A \cdot B = B \cdot A\}$

↑
l'insieme delle matrici
che commutano con A .

Cerco le $B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}$ t.c.

$$\underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}}_{2 \times 2} = \underbrace{\begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix}}_{2 \times 2} \underbrace{\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}}_{2 \times 2}$$

$$\begin{cases} 2x + z = 2x + 3y \quad \checkmark \\ 2y + w = x - 4y \quad \checkmark \\ 3x - 4z = 2z + 3w \quad \checkmark \\ 3y - 4w = z - 4w \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 3y \\ x = w + 6y \\ 3w + 18y - 18y = 3w \quad \checkmark \end{cases}$$

$$\begin{cases} z = 3y \\ x = w + 6y \end{cases}$$

E^L def. de 2 euaaz. lin.
 $\Rightarrow$ e' un stsp. d' dim 2

Base : $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

o anche $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $\underbrace{\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}}_{\begin{matrix} \parallel \\ I_2 \end{matrix}}$

$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -4 \end{pmatrix}$

$\parallel$
 A

Oss generali: $A \in M_{n \times n}$

$$X = \{ B \in M_{n \times n} : B \cdot A = A \cdot B \}$$

- e^i stsp. vett.

$$(k_1 B_1 + k_2 B_2) \cdot A \neq A \cdot (k_1 B_1 + k_2 B_2)$$

$$k_1 B_1 A + k_2 B_2 A$$

$$k_1 A \cdot B_1 + k_2 A \cdot B_2$$

- se $A = \alpha \cdot I_n$ allora $X = M_{n \times n}$

$$\begin{array}{ccc}
 B \cdot \alpha I_n & = & \alpha \cdot I_n \cdot B \\
 \parallel & & \parallel \\
 \alpha \cdot B & & \alpha \cdot B
 \end{array}$$

• se $A \in \text{Span}(I_n)$ allora X contiene $I_n \in A$:

$$I_n \cdot A = A \cdot I_n \quad \checkmark$$

$$A \cdot A = A \cdot A \quad \checkmark$$

$\Rightarrow$ per $n \geq 2$ ho $\dim(X) \geq 2$.

5.3.8 Se $A \in M_{2 \times 2}$ allora

$$X = \{B : A \cdot B = B \cdot A\}$$

ha sempre $\dim. 2$ o 4 (il secondo caso solo se $A = \alpha \cdot I_2$).

5.3.9

Se $A \in M_{2 \times 2}$ allora

$$A^k \in \text{Span}(I_2, A) \quad \forall k$$

$$\underbrace{A \cdot \dots \cdot A}_k$$

Soluz. 1 : Se $A = \alpha \cdot I_2$ allora $A^k = \alpha^k \cdot I_2$
 $\Rightarrow$ conclusione ovvia.

Il generale prendo $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
e provo che $A^2 \in \text{Span}(I_2, A)$:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + bc & ab + bd \\ ac + dc & cb + d^2 \end{pmatrix}$$

lo posso esprimere come $k \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + h \cdot \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$
cioè cerco k, h t.c.

$$\begin{cases} k + ha = a^2 + bc \\ h \cdot b = (a+d) \cdot b \checkmark \\ h \cdot c = (a+d) \cdot c \checkmark \\ k + h \cdot d = d^2 + bc \end{cases}$$

Posso paender $h = a+d$

$$k + a^2 + ad = a^2 + bc$$

$$k + ad + d^2 = d^2 + bc$$

Logo temos as soluções

$$k = bc - ad \quad h = a + d.$$

$$\begin{aligned} \text{Ora: } A^3 &= A^2 \cdot A = (kI_2 + hA) \cdot A \\ &= kA + hA^2 \end{aligned}$$

$$= kA + h(kI_2 + hA)$$

$$= hkI_2 + (k + h^2)A \quad \checkmark$$

$$A^4 = A^3 \cdot A \quad \dots$$

Soluz 2 : vogliamo provare che $A^k \in \text{Span}(I_2, A)$
 $\forall k \in \mathbb{N}_+$

Sappiamo che: se $A \neq \alpha \cdot \underline{I}_2$ allora

$$X = \{B : B \cdot A = A \cdot B\} \quad \text{e' Span}(I_2, A).$$

Basta osservare che $A^k \in X \quad \forall k :$

$$A^k \cdot A = A \cdot A^k$$

$$\text{e, siccome } A^{k+1}$$

Se $A = \alpha \cdot I_2$ ok; o -

ok

V, W sp. vet. $f: V \rightarrow W$ lineare

$\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_m)$ base di V

$\mathcal{C} = (w_1, \dots, w_n)$ base di W

matrice associata a f nelle basi $\mathcal{B}$ in partenza

e $\mathcal{C}$ in arrivo $[f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} = A$ t.c.

$$f(v_i) = \sum_{j=1}^3 a_{ji} w_j \quad i=1 \dots m$$

cioè: nelle i -esime colonne di $[f]_{\mathcal{B}}$ stanno
 le coord. dell'immagine tramite f dello
 i -esimo vett. di $\mathcal{B}$
 rispetto a $\mathcal{C}$

————— 0 —————

Es: $\{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ 2

$\downarrow f$

$$\{y \in \mathbb{R}^4 : y_1 + y_2 + y_3 + y_4 = 0\} \quad \exists$$

$$f(x) = \begin{pmatrix} 3x_1 + 7x_2 - 4x_3 \\ -x_1 - 9x_2 + 2x_3 \\ +2x_1 - x_2 - 5x_3 \\ -2x_1 + 5x_2 + 9x_3 \end{pmatrix}$$

Dev def padre se $x_1 + x_2 + x_3 = 0$

la somma delle componenti di $f(x) = 2(x_1 + x_2 + x_3) = 0$

$$B = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 7 \\ -8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 \\ 9 \\ 4 \end{pmatrix} \right) \quad C = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

$$[f]_B^C = \begin{pmatrix} \cdot \\ \cdot \\ \cdot \end{pmatrix} \in \mathbb{M}_{3 \times 2}$$

II. column: $f \begin{pmatrix} 5 \\ -9 \\ 4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -64 \\ 84 \\ -1 \\ -19 \end{pmatrix} = -64 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} + \frac{84}{3} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + \cancel{1} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$

$$[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} = \begin{pmatrix} * & -64 \\ * & 84/3 \\ * & \dots \end{pmatrix}$$

————— 0 —————

Ricordo: $\mathcal{L}(V, W) \xrightarrow{[\cdot]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}} M_{m \times n}(\mathbb{R})$

biezione lineare

cioè identificazione non canonica

di $\mathcal{L}(V, W)$ con $M_{\max}$



dipende dalle
scelte di B e C

Invece $M_{m \times m} \xrightarrow{A \mapsto f_A} \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R}^m)$ 

è canonica (non ci sono scelte) ~

Oss:
$$\left[f_A \right]_{\sum^{(m)}}^{\sum^{(m)}} = A$$

poiché $f_X(e_i) = A \cdot e_i$ è la i -esima col. di A .

di più $\left[\cdot \right]_{\sum^{(m)}}^{\sum^{(m)}}$ è l'inverso di $\otimes$

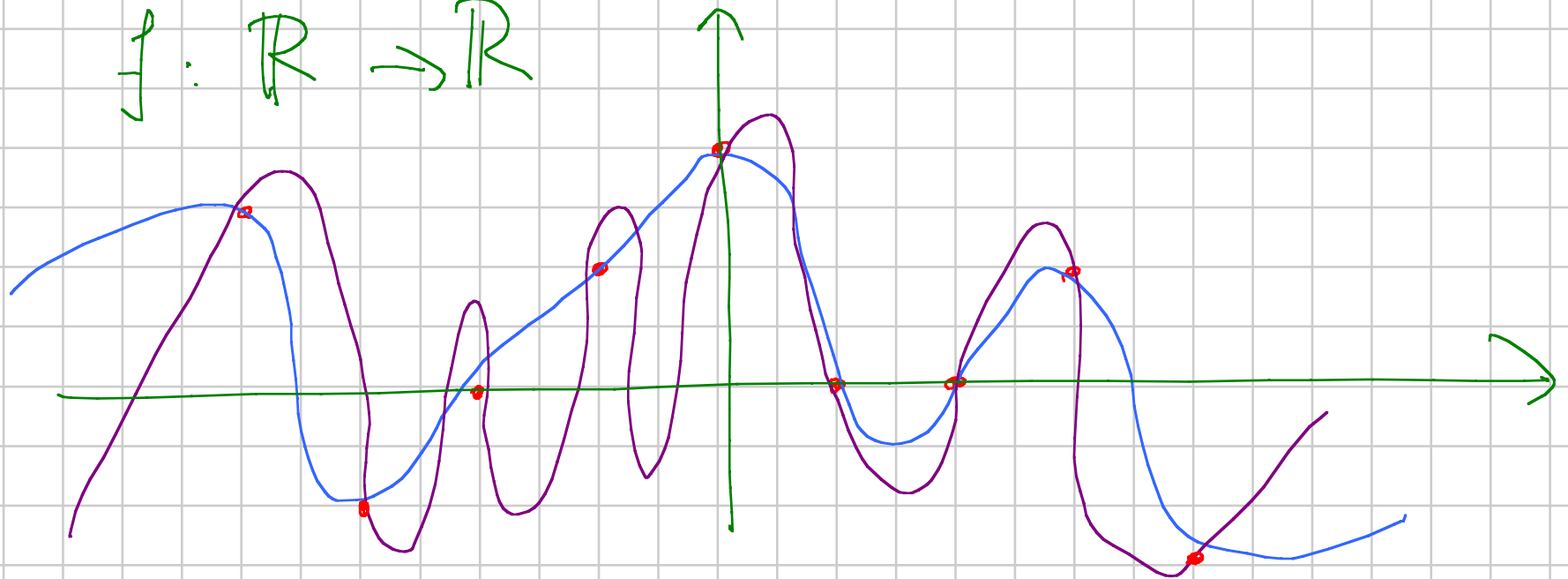
Cor: $\dim(V) = m, \dim(W) = m$
 $\Rightarrow \dim(\mathcal{L}(V, W)) = m \cdot m$

Teorema: se $v_1, \dots, v_n$ è una base di V
e sono assegnati $y_1, \dots, y_n \in W$ vettori qualsiasi
esiste una e una sola appl. lin. $f: V \rightarrow W$
t.c. $f(v_i) = y_i \quad i=1 \dots n$.

Cioè: una appl. lin. è determinata dai
suoi valori su una base; inoltre

tali valori si possono scegliere
arbitrariamente -

Es: $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$



Dimo: unicità : se $v \in V$ ho $[v]_{\mathcal{B}} = x$

cioè $v = x_1 v_1 + \dots + x_n v_n$; per ogni f lineare
b.c. $f(v_i) = y_i \quad i=1 \dots n$ ho necessariamente

$$f(v) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n -$$

Esistenza : dato $v \in V$ & $[v]_{\mathcal{B}} = x$

pongo $f(v) = x_1 y_1 + \dots + x_n y_n -$

È una buona def. di funt. perché x è unico.

Devo vedere che è lineare:

prendo $v, u \in V$ $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

So che se $[v]_{\mathcal{B}} = x$ e $[u]_{\mathcal{B}} = z$

allora $[\alpha v + \beta u]_{\mathcal{B}} = \alpha x + \beta z$

$([\cdot]_{\mathcal{B}} : V \rightarrow \mathbb{R}^n \text{ lin.})$

$$f(\alpha v + \beta u) \stackrel{?}{=} \alpha f(v) + \beta f(u)$$

$$\begin{aligned} & \text{"} \\ (\alpha x_1 + \beta z_1)y_1 + \dots + (\alpha x_m + \beta z_m)y_m & \stackrel{?}{=} \alpha \cdot (x_1 y_1 + \dots + x_m y_m) \\ & \quad + \beta \cdot (z_1 y_1 + \dots + z_m y_m). \end{aligned}$$



Coπ: Se $v_1, \dots, v_m$ è base di V
e $w_1, \dots, w_m$ è base di W

definendo $f_{ji}(v_p) = \delta_{ip} w_j \quad p = 1, \dots, m$

ho una ben def $f_{ji} \in \mathcal{L}(V, W)$; inoltre
 $(f_{ji})_{\substack{i=1 \dots m \\ j=1 \dots m}}$ è una base di $\mathcal{L}(V, W)$.

Qu part. abbiamo $\dim(\mathcal{L}(V, W)) = m \cdot m$ -

Ben def: OK dal Teo -

Base: $f \in \mathcal{L}(V, W)$, se $A = [f]_{(v_1, \dots, v_m)}^{(w_1, \dots, w_m)}$

$$\text{ho } f = \sum_{i,j} a_{ji} f_{ji}$$

infatti $\left(\sum_{i=1}^n a_{ji} f_{ji} \right) (v_p) = \sum_{j=1}^m a_{jp} w_j = f(v_p)$

coincidono su
 $v_1, \dots, v_m$

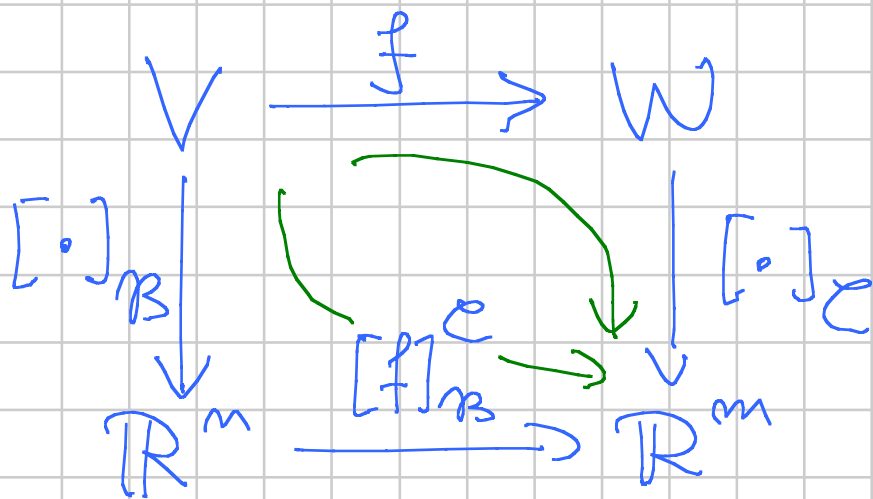
$\Rightarrow$ coincidono

Oss: se $V = \mathbb{R}^n$ $W = \mathbb{R}^m$ con $E^{(n)}$, $E^{(m)}$

$$f_{ji} = E_{ji}.$$

Prop: Se $f: V \rightarrow W$ è lin. e ho basi $\mathcal{B}$ e
allora $[f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$

Cioè:



ovvero: l'azione
della matrice assoc.
a f sulle coordinate
corrisponde all'azione
di f sui vettori

Dimo: chiamo $x = [v]_{\mathcal{B}}$ e $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}}$; (perché si usano le stesse basi:

cioè $v = \sum_{i=1}^m x_i v_i$;

$$f(v) = \sum_{i=1}^m x_i f(v_i)$$

$$= \sum_{i=1}^m x_i \sum_{j=1}^n a_{ji} w_j$$

$$= \sum_{j=1}^n \left(\sum_{i=1}^m a_{ji} \cdot x_i \right) \cdot w_j$$

$$[f(v)]_{\mathcal{C}} = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{C}} \cdot [v]_{\mathcal{B}}$$

$$= \sum_{j=1}^m (A \cdot x)_{\tilde{j}} \cdot w_{\tilde{j}}$$

$$\Rightarrow [f(v)]_C = A \cdot x.$$

