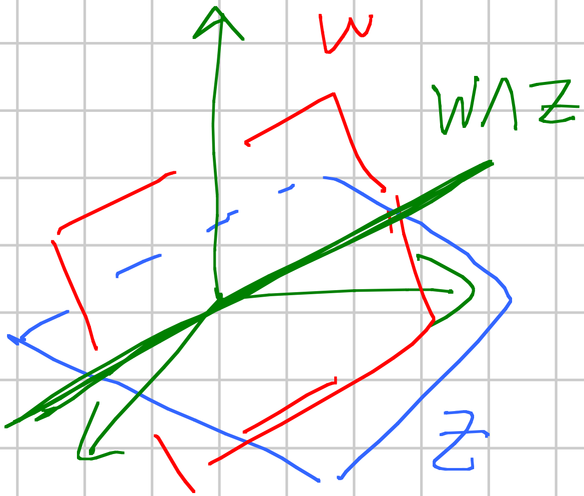
Algebra Lineare 6/12/17

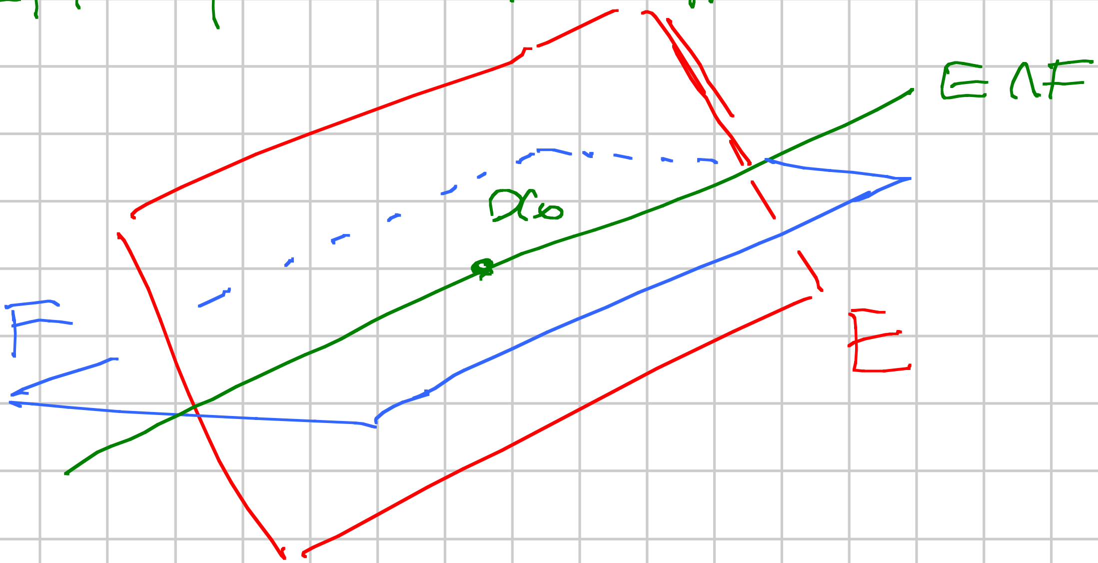
Posizione reciproca di due sttosp. affini.

Oss: se $E, F \subset V$ sono sttosp. affini e $E \cap F \neq \emptyset$ allora $E \cap F$ è sttosp. affine. Anzi: se $x_0 \in E \cap F$, e se W, Z sono le giaciture di E, F, abbiamo $E = x_0 + W$, $F = x_0 + Z$, e che

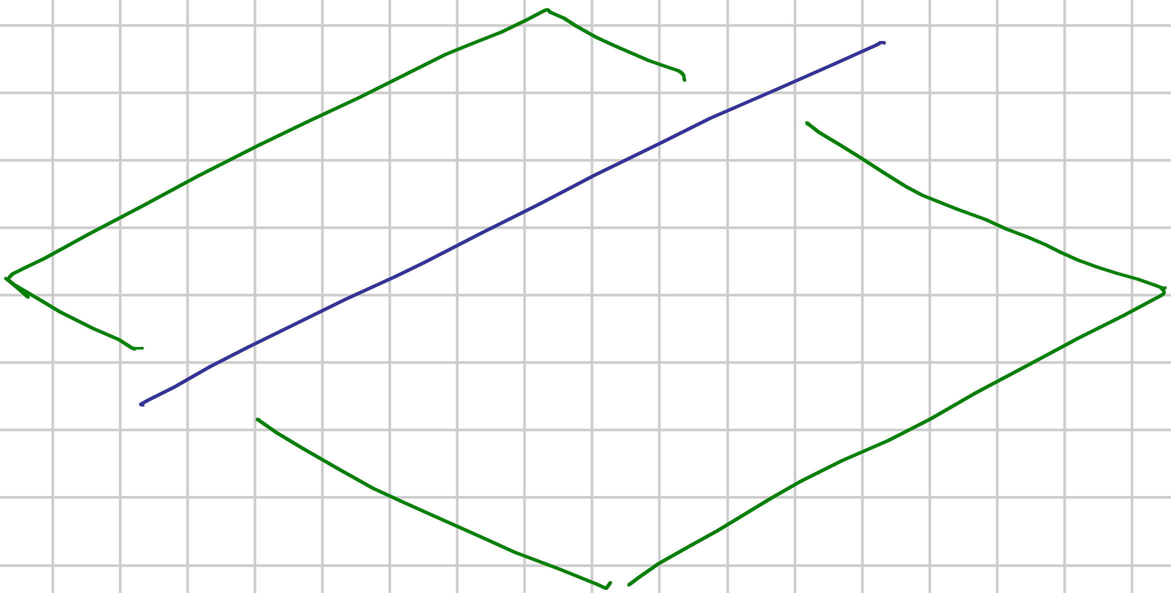
$$E \cap F = x_0 + (W \cap Z).$$

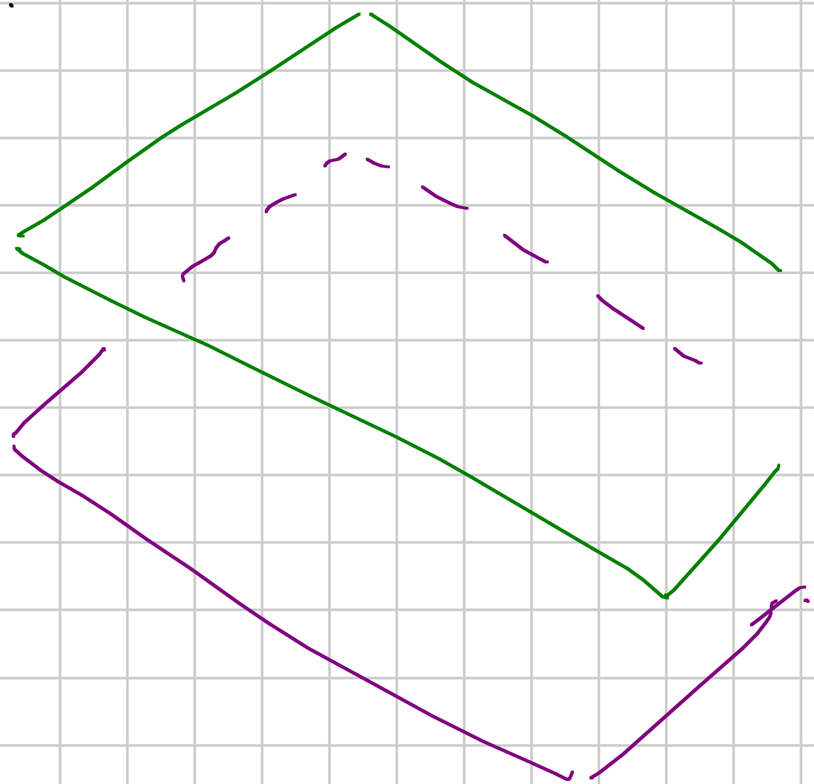
Esempio: E, F piani in $\mathbb{R}^3$

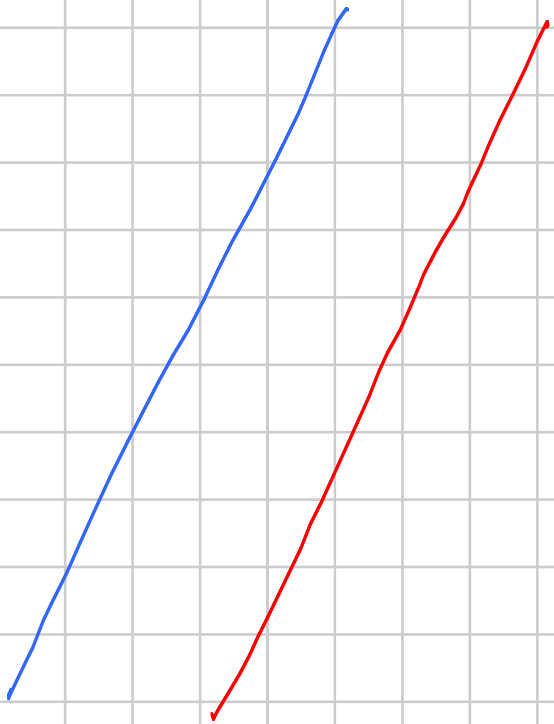


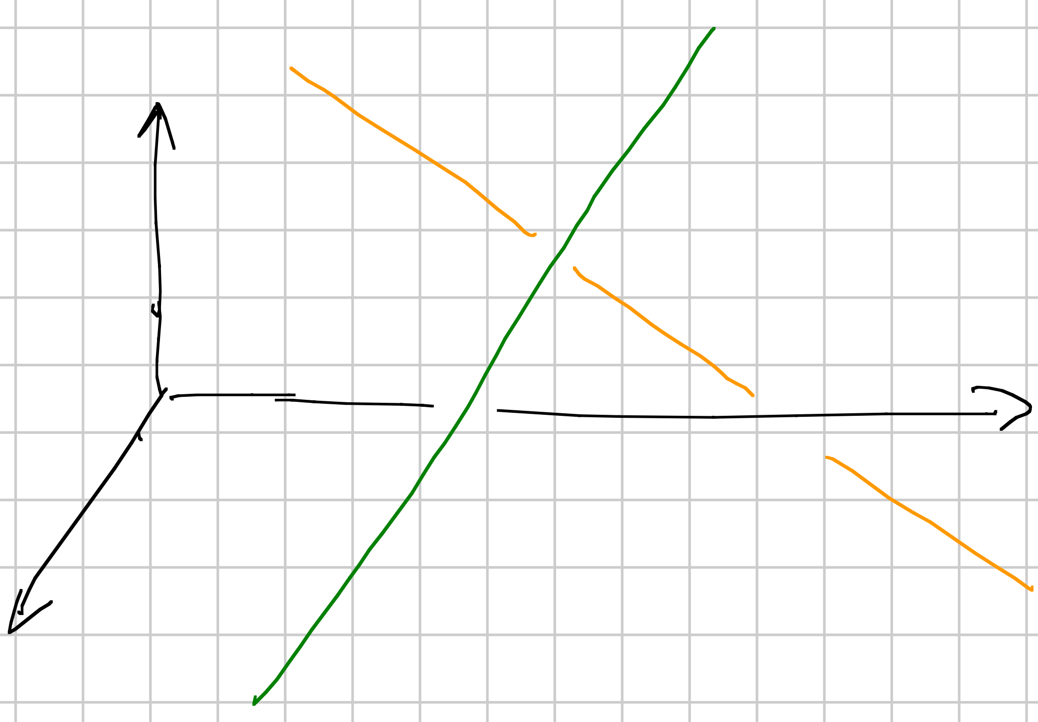


<u>Oss</u>: possono non intersecarsi:









Def: chiamo E+F il più piccolo stsp. affine che contiene sia E sia F.

<u>Caso I</u>: $E \cap F \neq \emptyset$ Se $x_0 \in E \cap F$

$E = x_0 + W$ $F = x_0 + Z$

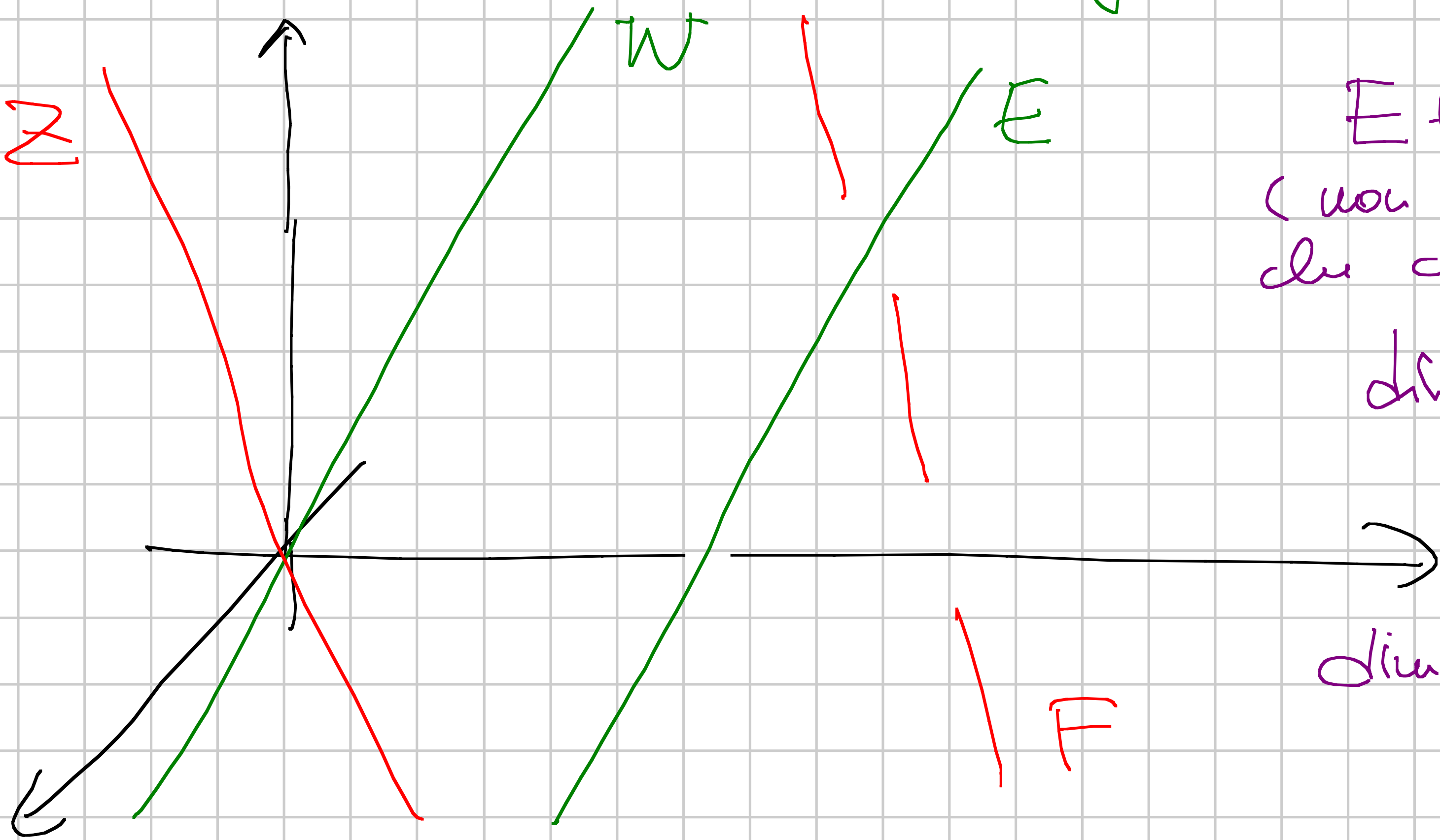
$\Rightarrow E \cap F = x_0 + (W \cap Z)$, $E + F = x_0 + (W + Z)$

(Come in Grassmann: tutto traslato di x_0.)

$\Rightarrow \dim(E) + \dim(F) = \dim(E \cap F) + \dim(E+F)$.

Caso II :

Esempio : rette sghembe in $\mathbb{R}^3$:



$E+F=\mathbb{R}^3$

(non esiste piano che contiene $E \cup F$)

$\dim(E+F)=3$

$\dim(W+Z)=2$

Prop: se $E = x_0 + W$, $F = y_0 + Z$, $E \cap F = \emptyset$ allora $\dim(E+F) = 1 + \dim(W+Z)$.

Dim: affermo che (1) $x_0 - y_0 \notin W+Z$

(2) $E+F = x_0 + \mathrm{Span}(x_0 - y_0, W+Z)$.

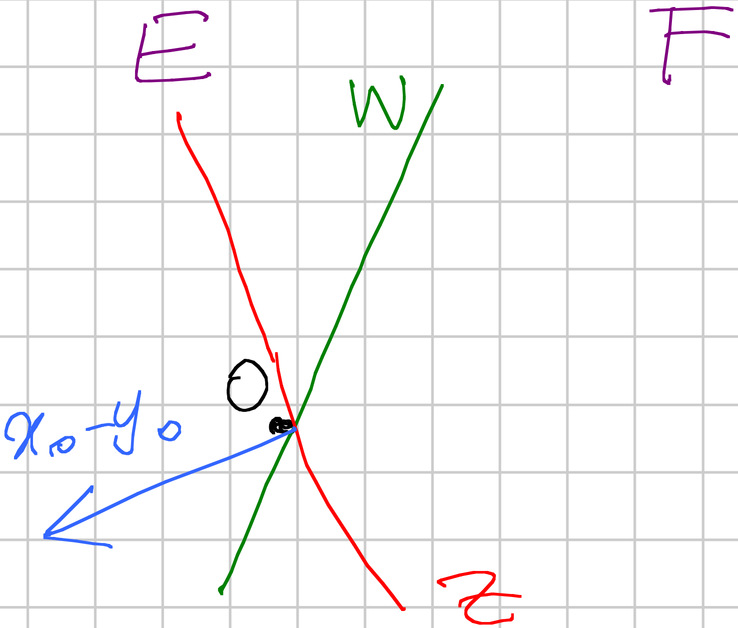
Questo basta: (2) dice: la giacitura di $E+F$ è $\mathrm{Span}(x_0-y_0, W+Z)$; (1) dice che $\dim(\mathrm{Span}(x_0-y_0), W+Z) = 1 + \dim(W+Z)$.

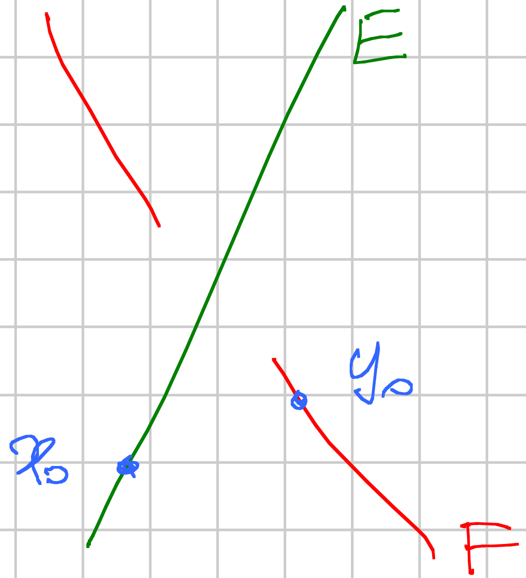
Mostriamo (1): se p.a. $x_0 - y_0 = w_0 + z_0$ avrei

$x_0 - w_0 = y_0 + z_0$

$\rotatebox{90}{$\in$}$ E $\quad\quad$ $\rotatebox{90}{$\in$}$ F

$\Rightarrow E \cap F \neq \emptyset$ assurdo.





Mostriamo (2): pongo $G = x_0 + \mathrm{Span}(x_0 - y_0, W + Z)$.

Devo vedere che:

(a) $G \supset E$

(b) $G \supset F$

(c) Se H è un altro st. sp. aff. che contiene E, F allora $H \supset G$.

(a) $G \supset x_0 + W = E$

(b) $G \supset x_0 + (-(x_0 - y_0)) + Z = y_0 + Z = F$

(c) Se $H \supset E \cup F$, allora $x_0 \in H \Rightarrow H = x_0 + U$

- $H \supset E \Rightarrow U \supset W$
- $H \supset F \Rightarrow H \ni y_0 \Rightarrow y_0 = x_0 + u_0$

$$\Rightarrow x_0 - y_0 = -u_0 \in U$$

$\cdot\ H \supset F \Rightarrow H \supset x_0 + (y_0 - x_0) + Z$

$$\begin{array}{ccc} \| & & \| \\ y_0 + U & & y_0 + Z \end{array}$$

$\Rightarrow U \supset Z$

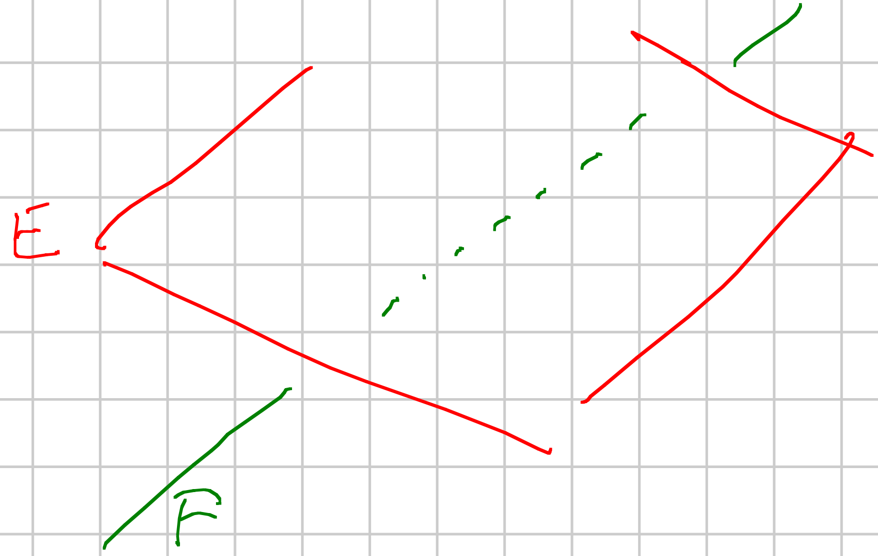
$\Rightarrow U \supset x_0 - y_0,\ W,\ Z$

$\Rightarrow U \supset \mathrm{Span}(x_0 - y_0,\ W + Z)$

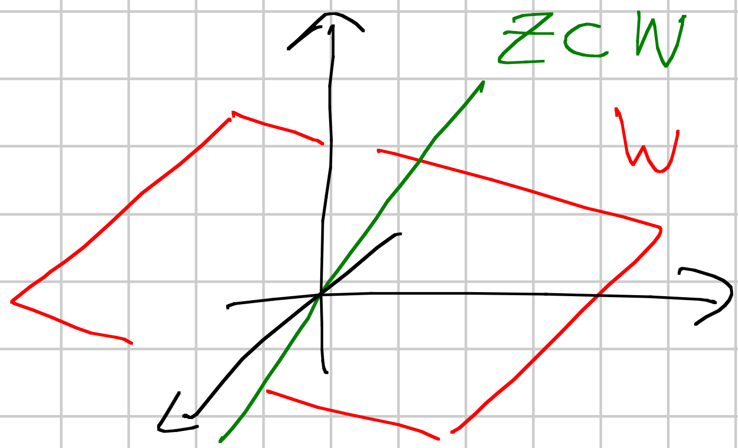
$\Rightarrow H \supset G.$

$\boxtimes$


E
F


E
F


W=2


ZCW
W

<u>Def</u>: $E = x_0 + W$, $F = y_0 + Z$ si dicono paralleli se $W \subset Z$ o $Z \subset W$ ($W = Z$ vero nei due casi).

Numeri complessi: $\mathbb{C} = \{ a + ib : a, b \in \mathbb{R} \}$

$a + i \cdot 0 = a$ $\qquad \mathbb{C} \supset \mathbb{R}$ reali

$0 + i \cdot b = i \cdot b$ $\qquad \mathbb{C} \supset i\mathbb{R}$ immaginari puri

$+ : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(a+ib)+(c+id) = (a+c)+i(b+d)$

$\cdot : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$(a+ib)\cdot(c+id) =$

$= (ac-bd)+i(ad+bc)$

<u>Fatto</u>: con queste operazioni $\mathbb{C}$ è un campo:

- 0 el neutro $+$
- opposto $-(a+ib) = (-a)+i(-b)$

- assoc $+$
- commut $+$
- $\exists$ el. neutro $\cdot$
- $z \neq 0$ ha inverso: $z = a + ib$

$$z^{-1} = \frac{a - ib}{a^2 + b^2} = \frac{\bar{z}}{|z|^2}$$

- assoc $\cdot$
- commut $\cdot$

• distrib.

$$\overline{} \circ \overline{}$$

$$(a+ib)\,\frac{a-ib}{a^2+b^2} = \frac{a^2-(ib)^2}{a^2+b^2} = \frac{a^2+b^2}{a^2+b^2} = 1$$

ha senso per ogni $z = a+ib \neq 0$ poiché in tal caso $a \neq 0$ o $b \neq 0$ dunque $a^2+b^2 > 0$.

<u>Fatto</u>: tutto quanto visto finora sugli sp. vett. su $\mathbb{R}$ si ripete identico sostituendo $\mathbb{R}$ con $\mathbb{C}$: sp. vett. su $\mathbb{C}$.

<u>Def</u>: uno sp. vett. su $\mathbb{C}$ è un insieme V con due operaz.:

$+ : V \times V \to V$ somma tra vettori

$\cdot : \mathbb{C} \times V \to V$ prodotto tra scal. e vett.

con:

1-4 $V, +, 0$ gruppo commut

5 $(\alpha+\beta)\cdot v = \alpha\cdot v + \beta\cdot v$ $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$ $\forall v \in V$

6 $\alpha\cdot(v+w) = \alpha\cdot v + \alpha\cdot w$ $\forall \alpha \in \mathbb{C}$ $\forall v,w \in V$

7 $\alpha\cdot(\beta\cdot v) = (\alpha\cdot\beta)\cdot v$ $\forall \alpha,\beta \in \mathbb{C}$, $\forall v \in V$

8 $1\cdot v = v$ $\forall v \in V$.

Vale tutto quanto detto su $\mathbb{R}$:

Ese: calcolare $\det\begin{pmatrix} 1-i & 3+i & 7+2i \\ -4 & 2-3i & 5i \\ 7+i & 2-i & 4+i \end{pmatrix}$

Sarrus: $(1-i)(2-3i)(4+i) + \dots + \dots$

$-(7+2i)(2-3i)(7+i) - \dots - \dots$

$= (-1-5i)(4+i) + \dots + \dots$

$-(20-17i)(7+i) - \dots - \dots$

$$= (1-27i) + \ldots + \ldots$$

$$-(157-99i) - \ldots - \ldots$$

$$\begin{pmatrix} 1-i & 3+i & 7+2i \\ -4 & 2-3i & 5i \\ 7+i & 2-i & 4+i \end{pmatrix}$$

Oppure: $= \det \begin{pmatrix} 1-i & 0 & 0 \\ -4 & 2-3i-(1+2i)\cdot(-4) & 5i - \frac{5+8i}{2}(-4) \\ 7+i & 2-i-(1+2i)(7+i) & 4+i-\frac{5+8i}{2}(7+i) \end{pmatrix}$

$$\frac{3+i}{1-i} = \frac{(3+i)(1+i)}{2} = \frac{2+4i}{2} = 1+2i$$

$$\frac{7+2i}{1-i} = \frac{(7+2i)(1+i)}{2} = \frac{5+9i}{2}$$

$$= (1-i) \cdot \det \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$= (1-i)(ad-bc).$$

$$\begin{pmatrix} 1-i & 3+i & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \rightsquigarrow \begin{pmatrix} 1-i & 3+i+\alpha(1-i) & \vdots \\ \vdots & \cdot & \vdots \\ \vdots & \vdots & \cdot \end{pmatrix}$$

$3+i+\alpha(1-i)=0 \quad \Rightarrow \quad \alpha = -\dfrac{3+i}{1-i}$

<u>Es</u>: dire se i seguenti sottoinsiemi di V sono sottosp. vett:

- $V=\mathbb{C}^3 \qquad W=\{z\in\mathbb{C}^3 : (1-i)z_1+(4+3i)z_2 + (7-5i)z_3=0\}$

Sì: W è definito da una equaz. lineare (omogenea di I grado) nelle componenti di z.

- $V = \mathbb{C}^2 \qquad W = \{ z \in \mathbb{C}^2 : (1-i)\bar{z}_1 + (2+i) z_2 = 0 \}$

Sembra di no: l'equaz. non è lineare

la funzione $f: \mathbb{C}^2 \to \mathbb{C}$

$$f(z) = (1-i)\overline{z_1} + (2+i) z_2$$

non è lineare:

$$f(z+w) \overset{?}{=} f(z) + f(w)$$

OK: $\overline{z_1 + w_1} = \overline{z_1} + \overline{w_1}$ ✓

$$f(\alpha z) \overset{?}{=} \alpha \cdot f(z)$$

NO: $\overline{\alpha z_1} \neq \alpha \overline{z_1}$

$\shortparallel$

$\bar{\alpha} \cdot \bar{z}_1$

Es:
$$\begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-i}{2+i} \end{pmatrix} \in W$$

$$i \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -\frac{1-i}{2+i} \end{pmatrix} \notin W \quad \text{poiché}$$

$$(1-i)\cdot(-i)+\cancel{(2+i)}\cdot\left(-i\cdot\frac{1-i}{\cancel{2+i}}\right)$$

$$= -2i(1-i)$$

$$V = \mathbb{C}_{\leq 2}[z] \qquad W = \{p(z)\in V : p(i) - p'(-2) = 0\}$$

Se $p(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2$ l'eq. di W è

$$a_0 + i a_1 - a_2 - a_1 + 4a_2 = 0$$

$$a_0 + (i-1)a_1 + 3a_2 = 0$$

Sí

- $W = \{ p(z) \in \mathbb{C}_{\leq 2}[z] : \; p'(-3) \in \mathbb{R} \}$

$$a_1 - 6a_2 \in \mathbb{R}$$

No: $\quad p(z) = z \in W \qquad i \cdot p(z) = iz \notin W.$

Ese: verificare la formula di Grassmann per

$$W = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 2+i \\ -4 \\ 7-i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5i \\ 2-i \\ 3+2i \end{pmatrix} \right)$$

$$Z = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix} 5+2i \\ -6i \\ 4+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2-3i \\ 1+i \\ -i \end{pmatrix} \right) \subset \mathbb{C}^3$$

$\dim W = 2$ poiché $\begin{pmatrix} 5i \\ 2-i \\ 3+2i \end{pmatrix}$ non è multiplo di $\begin{pmatrix} 2+i \\ -4 \\ 7-i \end{pmatrix}$: se lo fosse

sarebbe $\frac{2-i}{-4}\begin{pmatrix} 2+i \\ -4 \\ 7-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -5/4 \\ \vdots \\ \vdots \end{pmatrix}$ No

$\dim Z = 2$ simile.

Grassmann: $2+2 =$

$W \cap Z$	$W+Z$
2	2
1	3

Calcolo $W \cap Z$:

$$\alpha \begin{pmatrix} 2+i \\ -4 \\ 7-i \end{pmatrix} + \beta \cdot \begin{pmatrix} 5i \\ 2-i \\ 3+2i \end{pmatrix} = \gamma \cdot \begin{pmatrix} 5+2i \\ -6i \\ 4+i \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 2-3i \\ 1+i \\ -1 \end{pmatrix}$$

Sistema omogeneo di 3 equaz. in 4 incognite: spazio delle soluz ha dim 1 o 2; se rank(matrice) $= 3$, dim $=$

$4-3=1$; se rank$\left(\text{---} \right)=2$, $\dim = 4-2 = 2$

$$\begin{pmatrix} 2+i & 5i & -5-2i & -2+3i \\ -4 & 2-i & 6i & -1-i \\ 7-i & 3+2i & -4-i & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

tutte le successive orlate hanno det $\neq 0$

$\Rightarrow$ rank $= 3$ $\Rightarrow \dim(W \cap Z) = 1$

Quindi (stesso conto) $Z + W = \mathbb{C}^3$

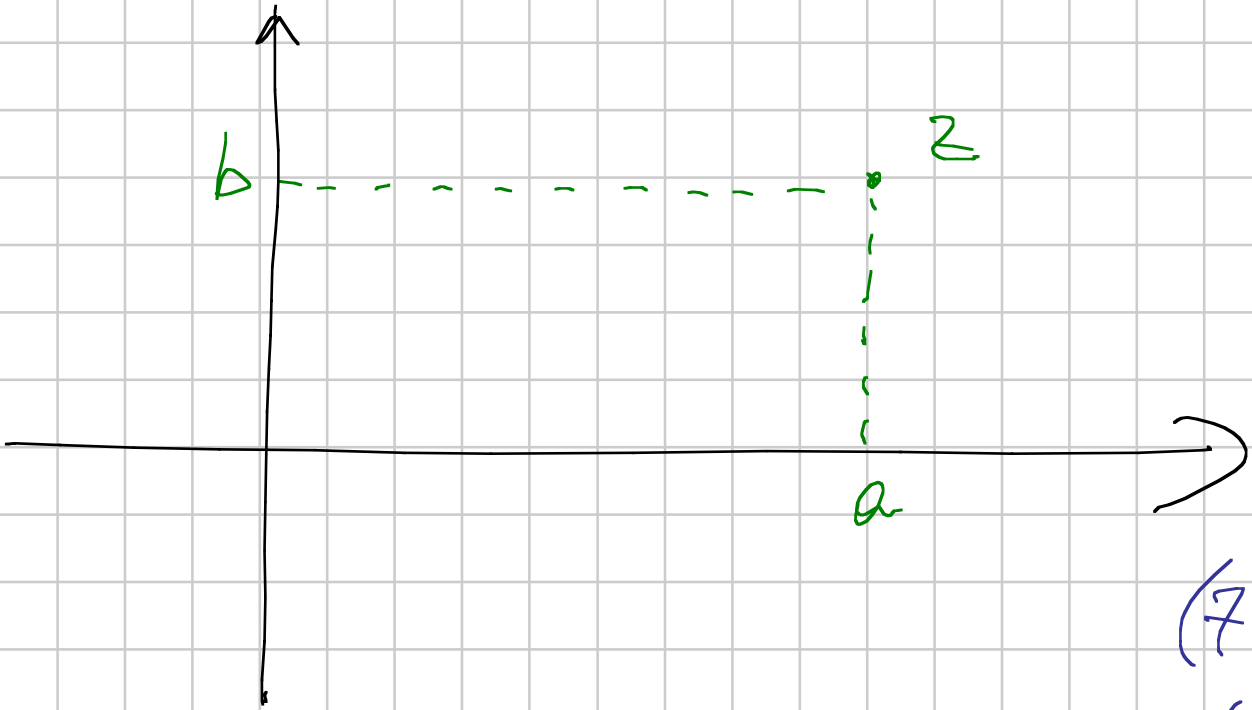
Oss: $\dim_{\mathbb{C}}(V) = n$ se esiste una base $v_1, \dots, v_n$ cioè se ogni $v \in V$ si scrive in modo unico come $v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n$, $\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$

$$\Rightarrow \dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}^n) = n$$

base canonica $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \end{pmatrix} \dots \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

In part: $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$. Però:

$$\mathbb{C} = \{ a+ib : a, b \in \mathbb{R} \} \text{ “}=\text{” } \mathbb{R}^2$$



le operaz. di sp. vett. su $\mathbb{R}$ sono uguali:

$$(7-i)+(5+4i)=12+3i$$

$$\begin{pmatrix} 7 \\ -1 \end{pmatrix}+\begin{pmatrix} 5 \\ 4 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 12 \\ 3 \end{pmatrix}$$

$$6(4-3i)=24-18i$$

$$6\begin{pmatrix}4\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}24\\-18\end{pmatrix}$$

wie $\dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{R}^2) = 2$

$\Longrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\mathbb{C}) = 2$, $\dim_{\mathbb{C}}(\mathbb{C}) = 1$.

Oss: Uno sp. vett. complesso è anche reale:

$\mathbb{C}^2$ come sp. vett. reale ha

$$\begin{pmatrix} 7-i \\ 4+2i \end{pmatrix} +_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 5-4i \\ -2+7i \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 7-i \\ 4+2i \end{pmatrix} +_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 5-4i \\ -2+7i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12-5i \\ 2+9i \end{pmatrix}$$

$$7 \cdot_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 4-5i \\ 2+i \end{pmatrix} = 7 \cdot_{\mathbb{C}} \begin{pmatrix} 4-5i \\ 2+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 28-35i \\ 14+7i \end{pmatrix}$$

$$(1-2i) \cdot_{\mathbb{R}} \begin{pmatrix} 1+i \\ 7-i \end{pmatrix}$$

non ha senso poiché non è reale.

Prop: se V è sp. vett. su $\mathbb{C}$

$$\dim_{\mathbb{R}}(V) = 2 \cdot \dim_{\mathbb{C}}(V)$$

$$\mathbb{C}^3 = \left\{ \begin{pmatrix} u \\ z \\ w \end{pmatrix} : u, z, w \in \mathbb{C} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} a+ib \\ c+id \\ e+if \end{pmatrix}, \ a,b,c,d,e,f \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\dim_{\mathbb{C}} = 3 \qquad \dim_{\mathbb{R}} = 6$$

Dim: se $v_1, \dots, v_n$ è una $\mathbb{C}$-base

allora ogni $v \in U$ si scrive in modo unico

come

$$v = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \qquad \alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{C}$$

ovvero si scrive in modo unico come

$$v = (a_1 + ib_1) v_1 + \dots + (a_n + ib_n) v_n \qquad \begin{matrix} a_1 \dots a_n \\ b_1 \dots b_n \in \mathbb{R} \end{matrix}$$

ovvero si scrive in modo unico come

$$v = a_1 \cdot v_1 + b_1 \cdot (i v_1) + \dots + a_n v_n + b_n \cdot (i v_n)$$

$a_1 \dots a_n$
$b_1 \dots b_n \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow v_1, i v_1, \dots, v_n, i \cdot v_n$ sono una $\mathbb{R}$-base.

$\blacksquare$

Es:

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ $\mathbb{C}$-base di $\mathbb{C}^2$

$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ i \end{pmatrix}$ $\mathbb{R}$-base di $\mathbb{C}^2$.