5/12/17

Sottospazi affini: $\mathbb{R}^n$ $E = v_0 + W$ $v_0 \in \mathbb{R}^n$

$W \leq \mathbb{R}^n$ sottospazio vett.

giacitura di E

Eq. cartesiane: $E = \{ x \in \mathbb{R}^n \mid Ax = b \}$

Eq. parametriche: $E = \{ x_0 + \sum_{1}^{k} t_i v_i \mid t_i \in \mathbb{R} \}$

e $W = \operatorname{Span}(v_1, \dots, v_k)$

$\mathbb{R}^2$ $\qquad r \subseteq \mathbb{R}^2$ retta affine

Eq cartesiana: $\quad r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; ax + by = c \right\}$

$a, b, c \in \mathbb{R}$

$(a, b) \neq (0, 0)$

$\Updownarrow$

$a^2 + b^2 > 0$

La giacitura di r è: $\{ ax + by = 0 \}$

$\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ è una base della giacitura di r

Cerco $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in r$:

Prendo $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$ dove λ è un parametro da fissare.

Voglio: $a(\lambda a) + b(\lambda b) = c$

$\Rightarrow \lambda = \dfrac{c}{a^2+b^2}$

Ho: $r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \dfrac{c}{a^2+b^2} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix} \middle| t \in \mathbb{R} \right\}$

Se r è data in forma parametrica:

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}$ fissato

$$\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Giacitura di $r = \mathrm{Span}\left\{ \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} \right\}$

Un'equazione cartesiana per la giacitura di r è:

$$\{ \beta x - \alpha y = 0 \}$$

cerco c: $\{ \beta x - \alpha y = c \} = r$

poiché $\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} \in r$, ho: $\beta x_0 - \alpha y_0 = c$

Eq. cartesiana per r è: $r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \begin{matrix} \beta x - \alpha y = \\ \beta x_0 - \alpha y_0 \end{matrix} \right\}$.

$\longmapsto$

Sottospazi di $\mathbb{R}^3$: (solo sottospazi vett.)

$$r = \left\{ t \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \;\middle|\; t \in \mathbb{R} \right\}$$

fissato e $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Eq. soddisfatte da $\begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \\ \gamma \end{pmatrix}$:

$$\begin{cases} -\beta x + \alpha y = 0 \\ -\gamma x + \alpha z = 0 \\ -\gamma y + \beta z = 0 \end{cases} \quad \longleftarrow \quad \text{sottospazio } W \subseteq \mathbb{R}^3 :$$

$$r \subseteq W$$

Per vedere che $r = W$, mostro $\dim W = 1$

Considero:

$$\begin{pmatrix} \boxed{-\beta} & \alpha & \boxed{0} \\ -\gamma & 0 & \alpha \\ \boxed{0} & -\gamma & \boxed{\beta} \end{pmatrix} = A \qquad \det(A) = 0$$

$$rk(A) = 2 \quad \Longrightarrow \quad r = \left\{ \begin{array}{l} -\beta x + \alpha y = 0 \\ -\gamma x + \alpha z = 0 \\ -\gamma y + \beta z = 0 \end{array} \right\}$$

Se r è dato in forma cartesiana:

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{array} \right\}$$

dove $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{pmatrix}$ ha rango 2.

Cerco una sol. $\neq 0$ del sistema $A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0$.

$$0 = \det \begin{pmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 & b_1 & c_1 \end{pmatrix} = a_1 \underbrace{(b_1 c_2 - b_2 c_1)} +$$

$$+ b_1 \underbrace{(c_1 a_2 - a_1 c_2)}_{-} + c_1 \underbrace{(a_1 b_2 - a_2 b_1)}$$

Se faccio lo stesso con la II riga, scopro che:

$$\begin{pmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 \\ c_1a_2 - a_1c_2 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$ ed è una sol del sistema

$$r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} b_1c_2 - b_2c_1 \\ c_1a_2 - a_2c_1 \\ a_1b_2 - a_2b_1 \end{pmatrix} \middle| \ t \in \mathbb{R} \right\}$$

$$H = \{ ax + by + cz = 0 \} \qquad (a, b, c) \neq (0, 0, 0)$$

vettori che stanno in H:

$$\mathrm{Span}\left\{\begin{pmatrix}-b\\a\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-c\\0\\a\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\-c\\b\end{pmatrix}\right\} \subseteq H$$

Se mostro che il 1° sottospazio ha $\dim = 2 = \dim H$

ho che i 2 spazi coincidono.

in effetti: $\begin{pmatrix}-b & -c & 0\\ a & 0 & -c\\ 0 & a & b\end{pmatrix}$ ha rango 2, dato che a, b, c non sono tutti $= 0$

$$H = \left\{ t_1 \begin{pmatrix} -b \\ a \\ 0 \end{pmatrix} + t_2 \begin{pmatrix} -c \\ 0 \\ a \end{pmatrix} + t_3 \begin{pmatrix} 0 \\ -c \\ b \end{pmatrix} \;\middle|\; t_1, t_2, t_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

Se $$H = \left\{ t_1 \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \beta_1 \\ \gamma_1 \end{pmatrix}}_{v_1} + t_2 \underbrace{\begin{pmatrix} \alpha_2 \\ \beta_2 \\ \gamma_2 \end{pmatrix}}_{v_2} \;\middle|\; t_1, t_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

dove $\begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{pmatrix}$ ha rango 2.

Cerco equazione $\alpha x + \beta y + \gamma z = 0$ soddisfatta da v_1 e v_2.

$$0 = \det \begin{pmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_1 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_1 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_1 \end{pmatrix} = \alpha_1 (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) +$$

$$+ \beta_1 (\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2) + \gamma_1 (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2)$$

Si ha lo stesso con la seconda colonna.

$$H = \{ (\beta_1 \gamma_2 - \beta_2 \gamma_1) x + (\alpha_2 \gamma_1 - \alpha_1 \gamma_2) y + (\alpha_1 \beta_2 - \beta_1 \alpha_2) z = 0 \}.$$