RITA PARDINI

Ricevimento: Venerdì 14 - 16

Venerdì 9 - 11

$\longmapsto$

$f : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}^2$, definita da $n \longrightarrow (n^2, 3n-2)$

f è iniettiva? surgettiva?

(1) iniettività:

siano $n, m \in \mathbb{N}$: $f(n) = f(m)$

$$f(n) = f(m) \iff (n^2, 3n-2) = (m^2, 3m-2)$$

$$\iff \begin{cases} n^2 = m^2 \\ 3n-2 = 3m-2 \end{cases} \implies 3n - \cancel{2} = 3m - \cancel{2}$$

$$\implies n = m.$$

$$\implies f \text{ è iniettiva.}$$

(2) surgettività:

f è surgettiva $\iff \forall (a,b) \in \mathbb{N}^2$ $\exists\, n \in \mathbb{N} : f(n) = (a,b)$

$$\iff (n^2, 3n-2) = (a,b) \iff$$

$$\begin{cases} n^2 = a \\ 3n - 2 = b \end{cases}$$

Prendo, ad es., $a = 2$.

l'eq. $n^2 = 2$ non ha sol in $\mathbb{N}$

$\Rightarrow$ i punti della forma $(2, b)$, $b \in \mathbb{N}$,

non sono immagine di alcun $n \in \mathbb{N}$

$\Rightarrow$ f **non** è suriettiva

Data $f : X \longrightarrow Y$, $\quad \operatorname{Im} f = \{ y \in Y \mid \exists x \in X \ f(x) = y \}$

In particolare: f è suriettiva $\iff$

$$\operatorname{Im} f = Y$$

$$g : \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$$
$$n \longrightarrow 2n$$

$g(n) = g(m) \iff \cancel{2}n = \cancel{2}m \iff n = m$

$\Rightarrow g$ è iniettiva.

$y \in \operatorname{Im} g \iff \exists\, n \in \mathbb{N} : \underset{\substack{\parallel \\ 2n}}{g(n)} = y$

$\iff \exists\, n : y = 2n \iff y$ è pari.

$\operatorname{Im} g = \{ y \in \mathbb{N} \mid y \text{ è pari} \}$

$\Rightarrow g$ non è surgettiva.

$\vdash$

X insieme; $\#X = n$

$$\mathcal{P}(X) = \{ A \mid A \subseteq X \}$$

Es: $X = \{2, 5\}$

$$\mathcal{P}(X) = \{ \emptyset, \{2\}, \{5\}, \{2,5\} \}$$

Prop: $\# \mathcal{P}(X) = 2^n$, $\forall n \in \mathbb{N}$

Dim: x induzione

$n = 0$: $X = \emptyset$, $\mathcal{P}(X) = \{\emptyset\}$

$\# \mathcal{P}(X) = 1 = 2^0$ ✓.

$P(n) \Rightarrow P(n+1)$

Suppongo: $\# X = n \Rightarrow \# \mathcal{P}(X) = 2^n$

Considero $X = \{1, 2, 3, \dots, n+1\}$

$$Y = \{ A \in \mathcal{P}(X) \mid n+1 \in A \}$$

$$Z = \{ A \in \mathcal{P}(X) \mid n+1 \notin A \}$$

$$\mathcal{P}(X) = Y \,\dot{\cup}\, Z, \quad Y \cap Z = \emptyset$$

$$\Rightarrow \quad \# \mathcal{P}(X) = \# Y + \# Z$$

- $A \in Y \iff A \subseteq \{1, 2, \ldots, n\} = X_1$

$\Rightarrow \quad \# Y = \# \mathcal{P}(X_1) = 2^n \leftarrow$ ipotesi induttiva.

- $F : Z \longrightarrow \mathcal{P}(X_1)$

$A \longrightarrow A \cap X_1$

$G : \mathcal{P}(X_1) \longrightarrow Z$

$B \longrightarrow B \cup \{n+1\}$

F e G sono una l'inversa dell'altra.

$\Rightarrow \quad \# Z = \# \mathcal{P}(X_1) = 2^n$ ← ip. induttiva

$$\# \mathcal{P}(X) = \# Z + \# Y = 2^n + 2^n = 2^{n+1}$$