

Algebra Lineare 4/16/17

$$V = \mathbb{R}[t]$$

• Dato $d \in \mathbb{N}$ $\mathbb{R}_{\leq d}[t] = \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(p(t)) \leq d \}$
sotto spazio.

• $\{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : \deg(p(t)) = d \} \cup \{0\}$

$$1 + x^7 + (-x^7)$$

Non è un
spazio.

$$\bullet \{ p(t) \in \mathbb{R}[t] : p(-2) = 0 \} = W$$

$$\text{Se } p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + \dots$$

l'equaz. è

$$a_0 - 2a_1 + 4a_2 - 8a_3 + \dots = 0$$

equaz. polinom. omog. di $\mathbb{Z}$
prendo nei coeff. di $p(t)$

Queste equaz. definiscono
sempre sottospazi

$$p(t) = a_0 + a_1 t + \dots \in W$$

$$q(t) = b_0 + b_1 t + \dots$$

$$\alpha p(t) + \beta q(t) = (\alpha a_0 + \beta b_0) + (\alpha a_1 + \beta b_1)t + \dots$$

$$\alpha a_0 + \beta b_0 - 2(\alpha a_1 + \beta b_1) + 4(\alpha a_2 + \beta b_2) + \dots$$

$$= \alpha (a_0 - 2a_1 + 4a_2 \dots) + \beta (b_0 - 2b_1 + 4b_2 \dots)$$

$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0. \quad \checkmark$$

Oss: le operazioni di somma e prodotto per

scelare per polinomi visti come funzioni
coincidono con quelli delle funzioni:

$$p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + \dots \iff \mathbb{R} \ni t_0 \mapsto p(t_0) \in \mathbb{R}$$

$$q(t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + \dots \iff \mathbb{R} \ni t_0 \mapsto q(t_0) \in \mathbb{R}$$

$$p(t) + q(t) = a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t + (a_2 + b_2)t^2 + \dots$$

$$\begin{array}{c} \updownarrow \\ \mathbb{R} \ni t_0 \mapsto a_0 + b_0 + (a_1 + b_1)t_0 + (a_2 + b_2)t_0^2 \\ = p(t_0) + q(t_0) \end{array}$$

• Se $p(t) = \sum_{j=0}^{+\infty} a_j t^j$ polinomio

$$p'(t) = \sum_{j=1}^{+\infty} j \cdot a_j \cdot t^{j-1} \quad (\text{derivata})$$

$$(-7 - 2t + 12t^2 - \sqrt{3}t^3 + 11t^4)' = -2 + 24t - 3\sqrt{3}t^2 + 44t^3$$

$$W = \{ p(t) \in \mathcal{R}_{\leq 5}(t) : p'(-1) = 0 \}$$

$$\text{Se } p(t) = a_0 + a_1 t + a_2 t^2 + a_3 t^3 + a_4 t^4 + a_5 t^5$$

$$\underbrace{a_1 - 2a_2 + 3a_3 - 4a_4 + 5a_5 = 0}$$

eq. pol. omop. di I grado
nei coeff:

$\Rightarrow \exists$ un soluz.

• $W = \{ p(t) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[t] : p(7) \cdot p'(-2) = 0 \}$

$$\underbrace{(a_0 + 7a_1 + 49a_2 \dots) \cdot (a_1 - 2a_2 + 4a_3 \dots) = 0}$$

pol. di $\mathbb{I}$ grado [No]

$$p(t) = t - 7 \in W$$

$$q(t) = t^2 + 4t \in W$$

$$p(t) + q(t) = t^2 + 5t - 7 \notin W$$

$$(49 - 35 - 7) \cdot (-4 + 5) \neq 0$$

$$V = \mathcal{P}(X, \mathbb{R})$$

$$X = \{a, b, c\}$$

$$W = \{f : \{a, b, c\} \rightarrow \mathbb{R}\}$$

$$\underbrace{7f(a) - \sqrt{3}f(b) + \pi f(c)} = 0$$

eq. polinom. omop. di I grado
nei valori di f

Queste definiscono
sopra lo spazio

$$0 \in W \quad \checkmark$$

$$f, g \in W \quad \Rightarrow \quad \alpha f + \beta g \in W$$

$$\exists (\alpha f + \beta g)(a) - \sqrt{3}(\alpha f + \beta g)(b) + \pi(\alpha f + \beta g)(c) \neq 0$$

$$\alpha \exists f(a) + \beta \exists g(a) - \alpha \sqrt{3} f(b) - \beta \sqrt{3} g(b) + \alpha \pi f(c) + \beta \pi g(c) \neq 0$$

$$\alpha (\underbrace{\exists f(a) - \sqrt{3} f(b) + \pi f(c)}_0) + \beta (\underbrace{\exists g(a) - \sqrt{3} g(b) + \pi g(c)}_0) \neq 0 \quad \checkmark$$

$$\bullet \{ f: \{a, b, c\} \rightarrow \mathbb{R} : f(a) \cdot f(b) - f(c)^2 = 0 \} = W$$

Now is so $\vec{W}$ is a subspace.

Now role 2: $f: \begin{cases} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 0 \\ c \mapsto 0 \end{cases}$

$g: \begin{cases} a \mapsto 0 \\ b \mapsto 1 \\ c \mapsto 0 \end{cases}$

$f, g \in W$

$f+g: \begin{cases} a \mapsto 1 \\ b \mapsto 1 \\ c \mapsto 0 \end{cases}$

$f+g \notin W$

Non role 3 :

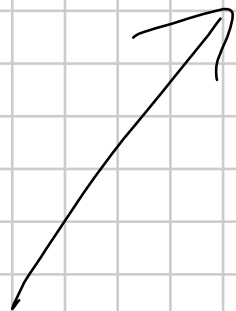
$$f: \begin{cases} a \mapsto 8 \\ b \mapsto 1 \\ c \mapsto 2 \end{cases}$$

$$2f: \begin{cases} a \mapsto 16 \\ b \mapsto 2 \\ c \mapsto 4 \end{cases}$$

$$16 \cdot 2 - 4^3 \neq 0$$

- $\{f \in \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) : f \text{ continuous}\}$ sobsp.
- For $X = \mathbb{N}$ $\mathcal{C}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) = \mathcal{Q} = (\mathcal{Q}_n)_{n=0}^{+\infty}$

$$\{a \in \mathcal{F}(\mathbb{N}, \mathbb{R}) : a_{n+2} = a_n + a_{n+1} \quad \forall n \in \mathbb{N}\}$$



definisce un
sottospazio

equaz. pol. omop. d. 1° grado
nei valori

————— 0 —————

Fissiamo V sp. vet. su $\mathbb{R}$.

Prop: se $W, Z \subset V$ sono sottospazi
allora $W \cap Z$ è un sottosp.

Dim: $0 \in W \cap Z$ poiché $0 \in W, 0 \in Z$.

$$u, v \in W \cap Z \Rightarrow \alpha u + \beta v \in W \cap Z$$

$$\Downarrow$$
$$u \in W, v \in W \Rightarrow \alpha u + \beta v \in W$$

$$u \in Z, v \in Z \Rightarrow \alpha u + \beta v \in Z$$

Σ :



Prop: Se $W, Z \subset V$ sono sottospazi,
allora $W \cup Z$ è sottosp $\iff W \cap Z \subset W$ o $Z \subset W$

Dim: $\Leftarrow$ ovvia.

$\Rightarrow$ per assurdo,
supponiamo

$$W \not\subset Z \text{ e } Z \not\subset W$$

$$\Downarrow$$

$$\exists w \in W, w \notin Z$$

$$\Downarrow$$

$$\exists z \in Z, z \notin W$$

Nota: $\subset$ = "contenuto o uguale"
 ~~$\subsetneq$~~ = "stretto contenuto"
 $\neq$ = "non uguale"

Se $W \cup Z$ fosse um sub-espaço

$$\begin{aligned} w \in W \subset W \cup Z \\ z \in Z \subset W \cup Z \end{aligned} \Rightarrow w+z \in W \cup Z$$



$$w+z \in W$$

$$w+z \in Z$$

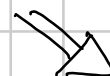


$$w+z = w' \in W$$



$$z = w' - w \in W$$

contradição



$$w+z = z' \in Z$$

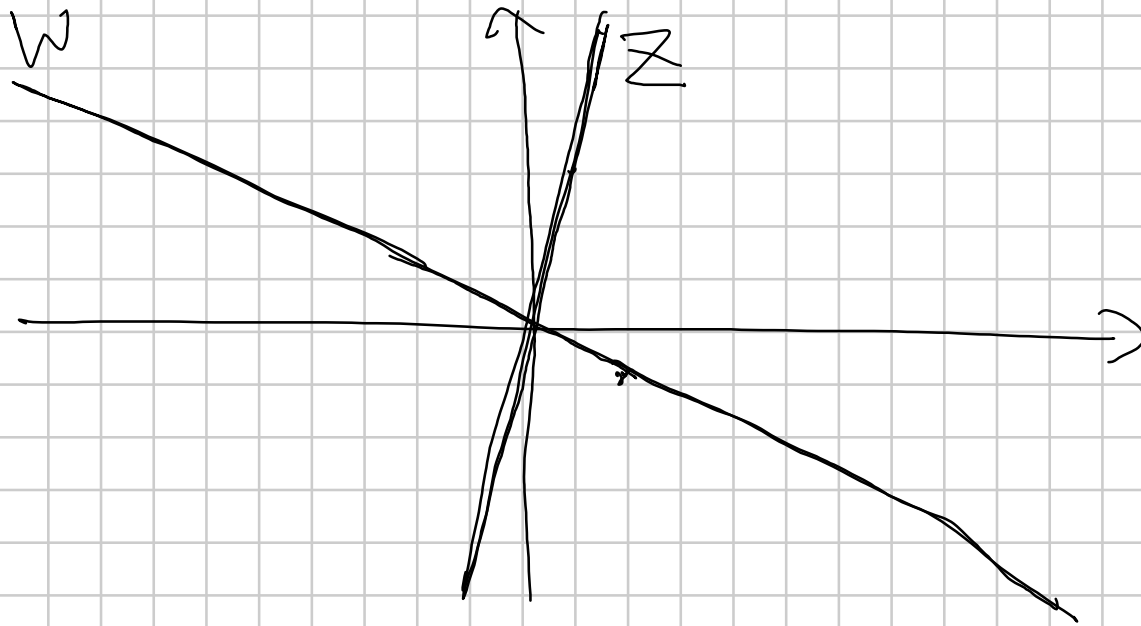
$$w = z' - z \in Z$$

contradição



Q55: $W \cup Z$ additive to $\mathbb{R}$

Es: $W = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_1 + 2x_2 = 0\}, Z = \{x \in \mathbb{R}^2 : 3x_1 - x_2 = 0\}$



Prop: Se $X \subset V$ esiste uno e un solo
 $\bar{W} \subset V$ t.c.

1. $W \supset X$

2. W è un sottospazio

3. " W è il più piccolo sottospazio di V che contiene X "
se $Z \subset V$ è un sottosp. e contiene X
allora $Z \supset W$.

Def: chiamo $\text{Span}(X)$ "sottospazio generato da X "
tale W .

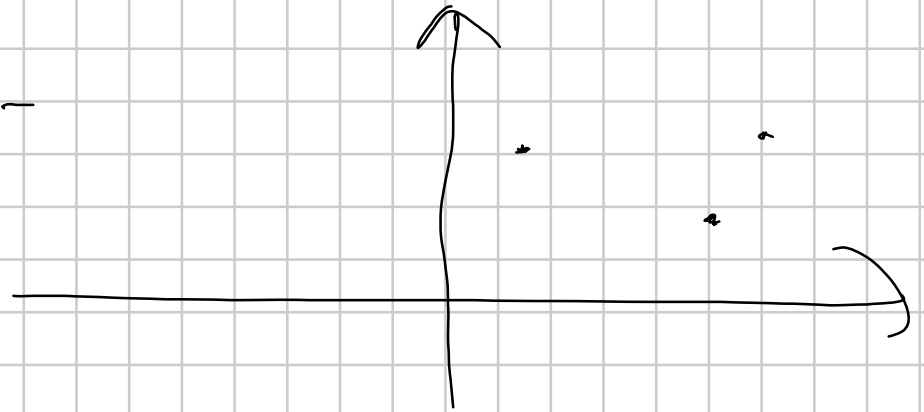
Rim: Unicità / Esistenza.

Unicità: supponiamo che W_1 e W_2 soddisfino 1, 2, 3
Uso lo 3 per $W=W_1$ con $Z=W_2$ (posso farlo perché W_2 soddisfa 1+2)
 $\Rightarrow W_2 \supset W_1$; viceversa $W_1 \supset W_2 \Rightarrow W_1 = W_2$.

Esistenza: Abbiamo visto che $\cap$ di 2 sottosp. è sottosp.;
non per guadarsi famiglia.

Pouco $W =$ l'intersezione di tutti i sottospazi
di V che contengono X

(la famiglia contiene V) -



1. $W \supset X$ ✓
2. W sottosp. ✓

3. Se Z è un sottosp. che contiene X ,
non compare nella famiglia di vici intersecate
 $\Rightarrow Z \supset W$. 

QSS: • $\text{Span}(\emptyset) = \{0\}$

• $W \text{ sottosp} \Rightarrow \text{Span}(W) = W$

• $\text{Span}(\text{Span}(X)) = \text{Span}(X)$.

————— o —————

Def: dati $v_1, \dots, v_m \in V$, $\alpha_1, \dots, \alpha_m \in \mathbb{R}$

chiamo combinazione lineare di $v_1, \dots, v_m$

con coeff. $\alpha_1, \dots, \alpha_m$ l'espressione

$$\alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \dots + \alpha_m \cdot v_m$$

(e anche il suo risultato)

$$(4 + 7 = 11)$$

Prop: dato $X \subset V$, $X \neq \emptyset$, ho

$\text{Span}(X) =$ "l'insieme di tutte le comb. lin.
di elementi di X "

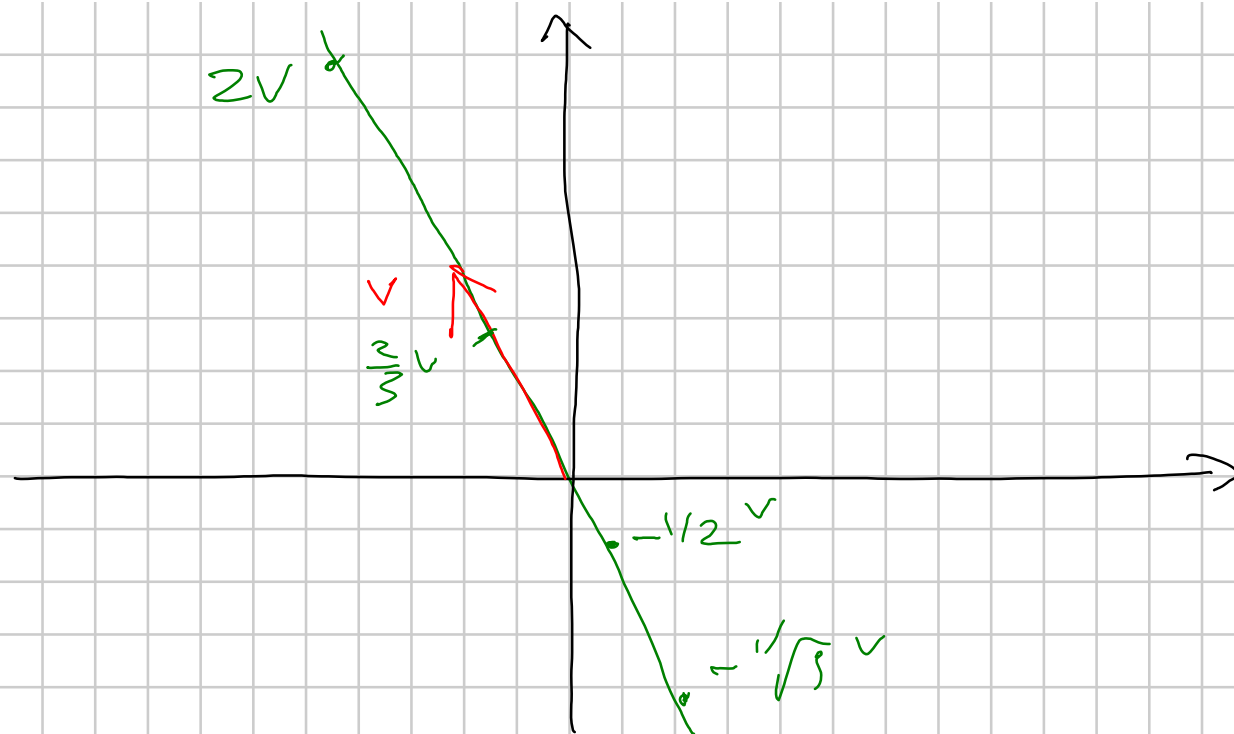
$$= \left\{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n : n \in \mathbb{N}, \right.$$

$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}, v_1, \dots, v_m \in X \}$$

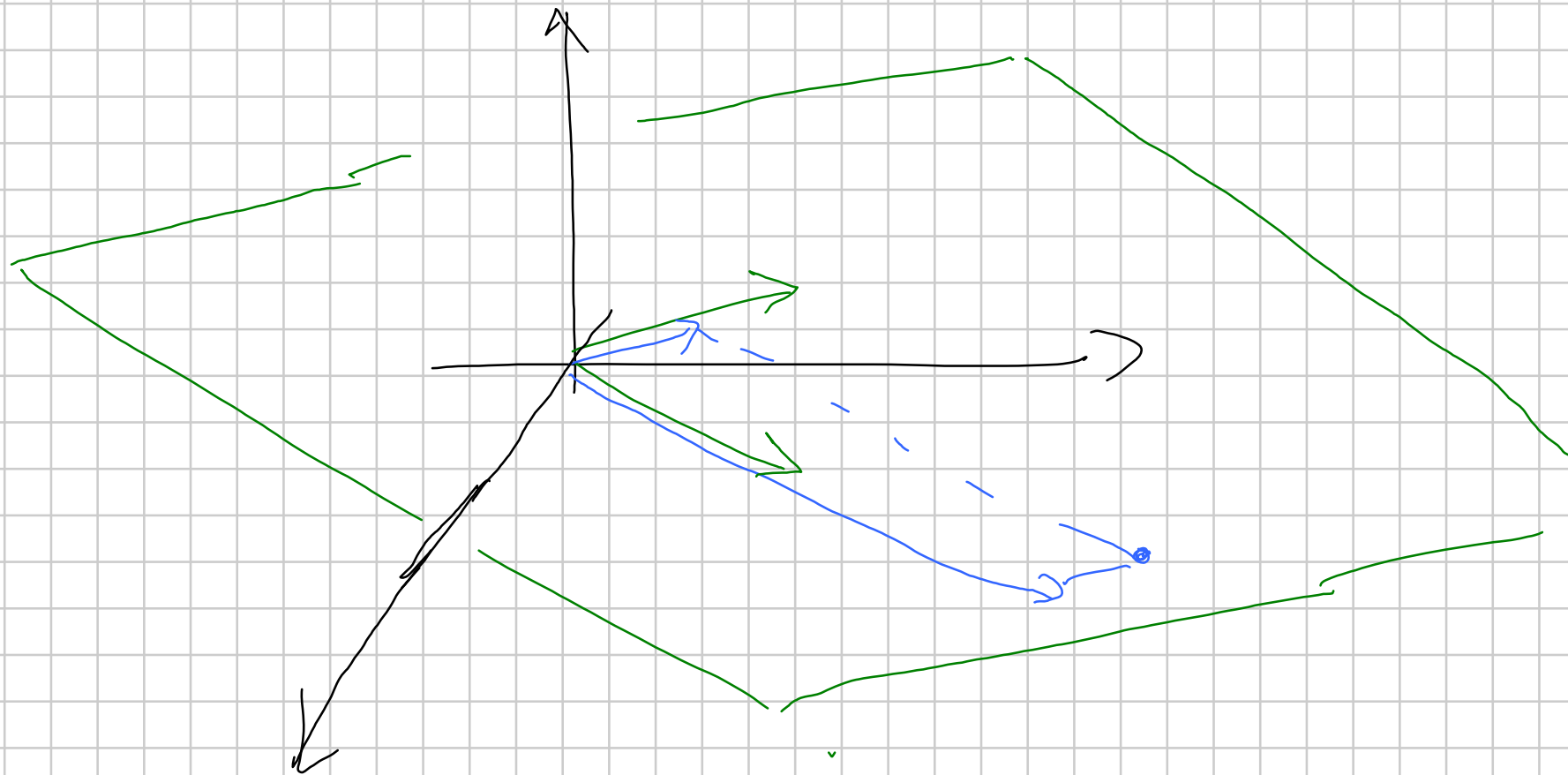
Def: dato $X = \{v_1, \dots, v_k\}$ ho

$$\text{Span}(X) = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k : \alpha_1, \dots, \alpha_k \in \mathbb{R} \}$$

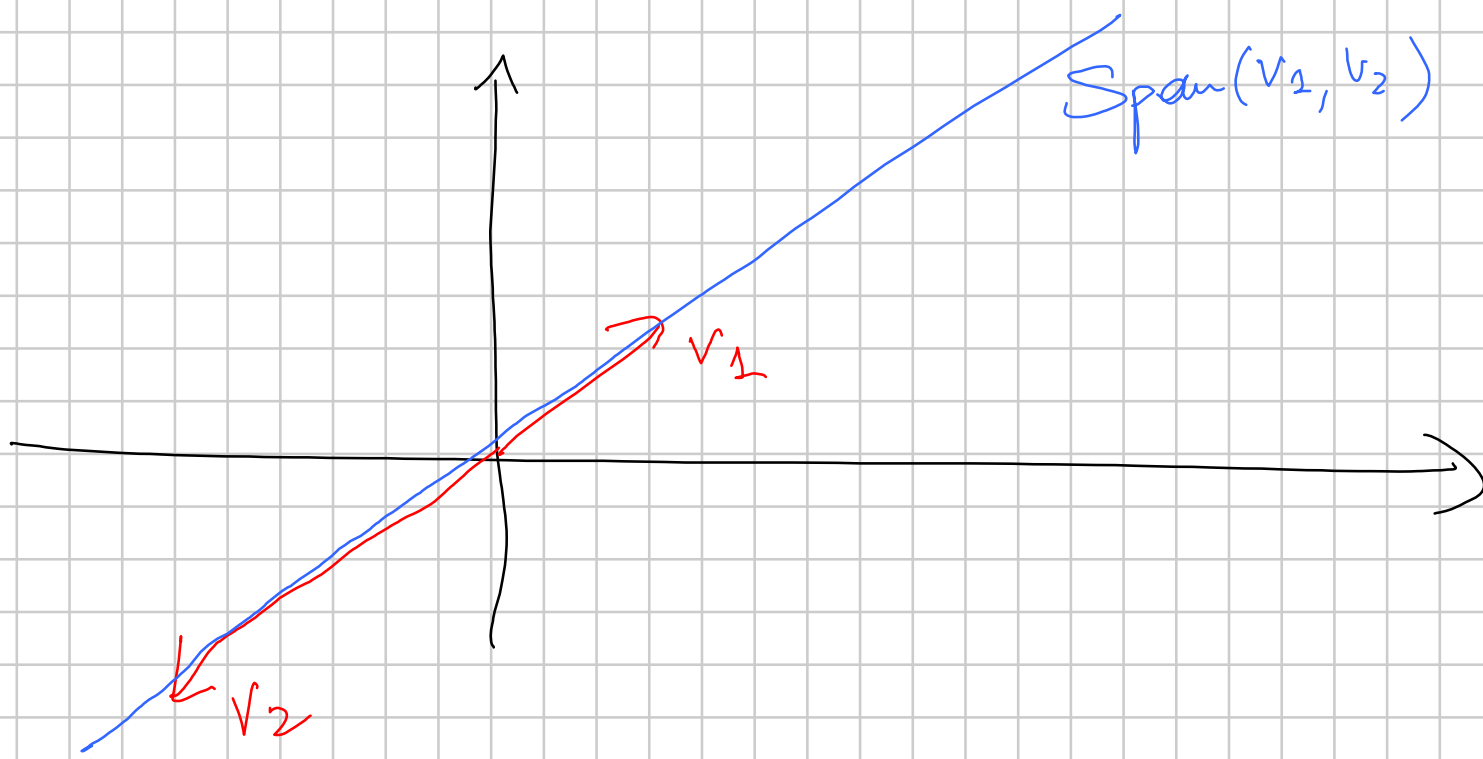
Es: $\text{Span}(v) = \{ \alpha \cdot v : \alpha \in \mathbb{R} \}$



Es: $\text{Span}(v_1, v_2) = \{ \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 : \alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R} \}$



QSS: Se $\text{Span}(v_1) = \text{Span}(v_2) = l$
 $\text{Span}(v_1, v_2) = l$



Dim: chiamo

$$W = \left\{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_k v_k : k \in \mathbb{N}, \alpha_j \in \mathbb{R}, v_j \in X \right\}$$

Affermo che $\bar{W}$ è $\text{Span}(X)$ cioè:

1. $W \supset X$

2. W è sottosp.

3. Se Z è sottosp., $Z \supset X \Rightarrow Z \supset W$.

1. Dato $x \in X$ devo provare che $x \in W$;

$$x = 1 \cdot x \in W \quad \checkmark$$

2. (1) $W \ni 0$; dopo $x \in X$ e ho $0 = 0 \cdot x \in W$ ✓

(2+3) Se $u, v \in W$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ devo vedere che
 $\alpha u + \beta v \in W$.

$$u = \gamma_1 u_1 + \dots + \gamma_m u_m$$

$$u_1, \dots, u_m \in X$$

$$v = \delta_1 v_1 + \dots + \delta_m v_m$$

$$v_1, \dots, v_m \in X$$

$$\alpha u + \beta v = (\alpha \gamma_1) u_1 + \dots + (\alpha \gamma_m) u_m + (\beta \delta_1) v_1 + \dots + (\beta \delta_m) v_m$$

comb. lin. di vech. $n+m$
con coeff. ... di vech. di X

3. Se Z è un sottosp., $Z \subset X$ dobbiamo
riferire che $Z \subset W$. Preso $w \in W$
dobbiamo vedere che $w \in Z$. Abbiamo

$$w = \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n, \quad v_1, \dots, v_n \in X$$

$$v_1, \dots, v_n \in X, \quad X \subset Z \Rightarrow v_1, \dots, v_n \in Z$$

ma $\mathbb{Z}$ sottosp. $\Rightarrow \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n \in \mathbb{Z}$. $\square$

Dim (Cor) : $\text{Span}(v_1, \dots, v_n) = \{ \alpha_1 v_1 + \dots + \alpha_n v_n : \alpha_j \in \mathbb{R} \}$

$$n=4$$

$$7v_1 - 2v_2 + 5v_4 = 7v_1 - 2v_2 + 0 \cdot v_3 + 5 \cdot v_4$$

la comb. lin più corta si fa
diretta d. eliminando $0 \cdot v_j$. $\square$

Q: l'espressione di un vettore come comb. lin.
di $v_1, \dots, v_n$ è unica?

Es: $7 \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ -16 \end{pmatrix}$

Unica?

$$\alpha \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 38 \\ -16 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4\alpha + 2\beta = 38 \\ -3\alpha + \beta = -16 \end{cases}$$

ha solo
la soluz?
 $\alpha = 7, \beta = 5$!

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 19 \\ -3\alpha + \beta = -16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 5\alpha = 35 \\ \beta = 3\alpha - 16 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \alpha = 7 \\ \beta = 5 \end{cases}$$

Sol : unica

$$2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + 7 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Unica?

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -13 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Se 2060
Se 20607
 $\alpha = 2, \beta = -4, \gamma = 7$

$$\begin{cases} \alpha + 2\beta - \gamma = -13 \\ 3\alpha + 5\beta + 2\gamma = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + 2\beta + 13 \\ 3\alpha + 5\beta + 2\alpha + 4\beta + 26 = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma = \alpha + 2\beta + 13 \\ 5\alpha + 9\beta = -26 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta = (-26 - 5\alpha) / 9 \\ \gamma = \dots \end{cases}$$

$\forall \alpha$  we have a solution.

No