Algebra Lineare 3/10/17

Def: V sp. vett se $+ : V \times V \to V$, $\cdot : \mathbb{R} \times V \to \mathbb{R}$

1. $\exists\, 0 \in V$ t.c. $v + 0 = v \quad \forall v$
2. $\forall v \in V \quad \exists (-v)$ t.c. $v + (-v) = 0$
3. $v + (w + z) = (v + w) + z$
4. $v + w = w + v$
5. $\lambda \cdot (\mu \cdot v) = (\lambda \cdot \mu) \cdot v$
6. $\lambda (v + w) = \lambda \cdot v + \lambda \cdot w$
7. $(\lambda + \mu) \cdot v = \lambda \cdot v + \mu \cdot v$
8. $1 \cdot v = v$

Oss:

- posso scrivere $v_1 + v_2 + \dots + v_n$ (3)
- posso scrivere $\lambda_1 \cdot \lambda_2 \cdot \ldots \cdot \lambda_n \cdot v$ (5)
- $u + v = u + w \Longrightarrow v = w$

infatti: $u + v = u + w \Longrightarrow (-u) + (u + v) = (-u) + (u + w)$

$$\underset{(3)}{\Longrightarrow} ((-u) + u) + v = ((-u) + u) + w$$

$$\underset{(2)}{\Longrightarrow} 0 + v = 0 + w \underset{(1+4)}{\Longrightarrow} v = w$$

- $0 \cdot v = 0$ infatti:

$$\underset{\substack{(1)\ \| \\ 0 + \cancel{0 \cdot v}}}{0 \cdot v} = (0 + 0) \cdot v \underset{(7)}{=} 0 \cdot v + \cancel{0 \cdot v}$$

- $\lambda \cdot 0 = 0$ infatti: $\lambda \cdot 0 = \lambda \cdot (0 + 0) = \lambda \cdot 0 + \cancel{\lambda \cdot 0}$

$$\lambda \cdot 0 = 0 + \cancel{\lambda \cdot 0}$$

- $\lambda \cdot v = 0 \Rightarrow \lambda = 0$ oppure $v = 0$

  infatti: se $\lambda \neq 0$ ho

$$0 = \lambda \cdot v \Rightarrow \underbrace{\lambda^{-1} \cdot 0}_{=0} = \lambda^{-1} \cdot (\lambda \cdot v) \overset{(5)}{=} 1 \cdot v \overset{(8)}{=} v$$

- $(-1) \cdot v = -v$ infatti:

$$(-1)\cdot v \underset{(1)}{=} 0+(-1)\cdot v \underset{(2)}{=} \big((-v)+v\big)+(-1)\cdot v$$

$$\underset{(3)}{=} (-v)+\big(v+(-1)\cdot v\big) \underset{(8)}{=} (-v)+\big(1\cdot v+(-1)\cdot v\big)$$

$$\underset{(7)}{=} (-v)+\big(1+(-1)\big)\cdot v = (-v)+0\cdot v = (-v)+0 = -v$$

———— o ————

Esempi: (1) $\mathbb{R}^n$ (2) $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$

(3) $\mathbb{R}[t]$ con $+, \cdot$ soliti

Oss: l'operaz. di prodotto tra polinomi non entra nella def. di sp. vett.

(4) X insieme $\qquad \mathcal{F}(X,\mathbb{R}) =$ "l'insieme delle funzioni da X a $\mathbb{R}$"

$$= \{ f : X \to \mathbb{R} \}$$

Operazioni:

date $f, g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$ devo definire $f+g \in \mathcal{F}(X,\mathbb{R})$;
la definisco ponendo

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x) \quad \forall x \in X.$$

operaz. che sto definendo

tra due numeri

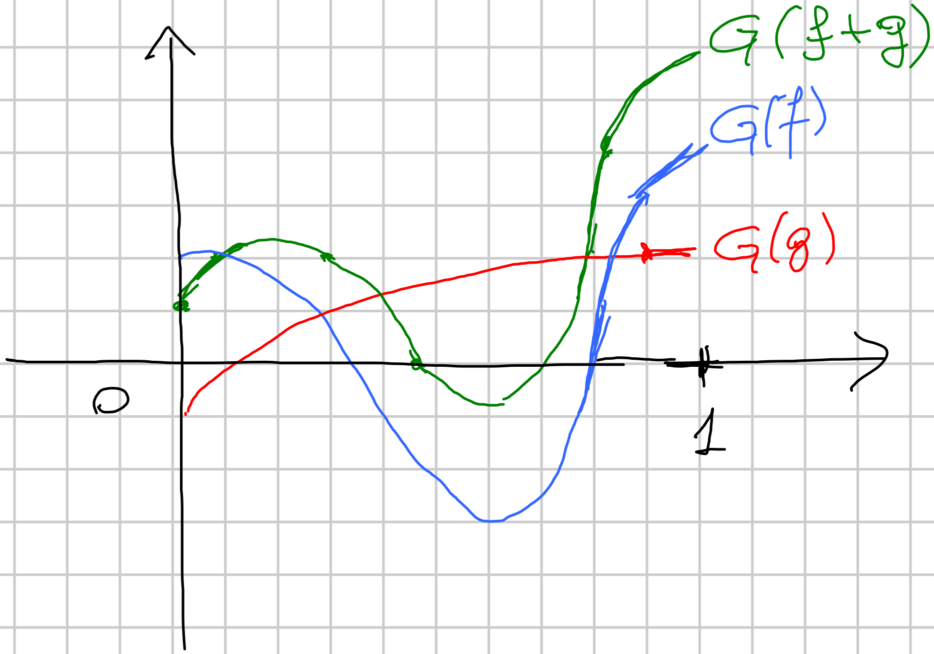
dato $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ devo definire $\lambda \cdot f \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$.

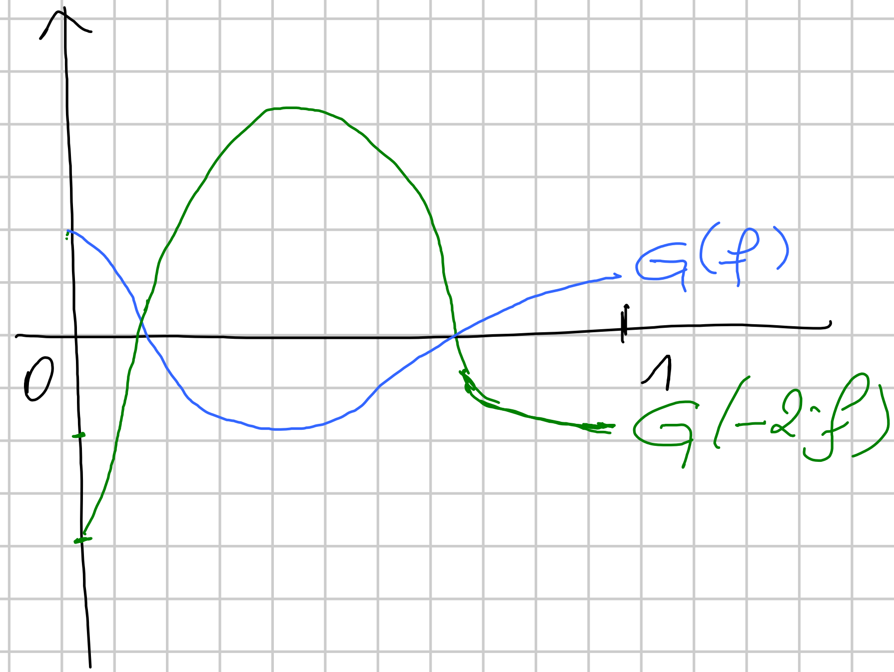
pongo $(\lambda \cdot f)(x) = \lambda \cdot f(x) \quad \forall x \in X$

nuovo

vecchio

Es: $X = [0,1]$





La funzione 0 è quella che vale sempre 0.
Devo verificare le 8 proprietà:

Verifico la 3: date $f, g, h \in \mathcal{F}(X, \mathbb{R})$ devo provare che $(f+g)+h = f+(g+h)$. Sia $(f+g)+h$ sia $f+(g+h)$ sono funz. da X a $\mathbb{R}$; devo vedere che

$$((f+g)+h)(x) = (f+(g+h))(x) \quad \forall x \in X.$$

nuovo

vecchio

$(f+g)(x) + h(x)$

$(f(x)+g(x)) + h(x)$

$f(x) + (g+h)(x)$

$f(x) + (g(x)+h(x))$

quindi per assoc. del + tra numeri.

— o —

Def: $W \subset V$ si dice sottospazio vettoriale se

1. $0 \in W$
2. $w_1, w_2 \in W \Longrightarrow w_1 + w_2 \in W$
3. $w \in W,\ \lambda \in \mathbb{R} \Longrightarrow \lambda \cdot w \in W$.

"W è chiuso in V rispetto alle operaz. di sp. vett."

Oss: W è un sottospazio $\Leftrightarrow$

1. $0 \in W$

2+3. $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$.

Verifichiamolo:

$2,3 \Rightarrow 2+3$: $w_1, w_2 \in W$, $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R} \underset{3}{\overset{2}{\Rightarrow}} \lambda_1 \cdot w_1, \lambda_2 \cdot w_2 \in W$

$\underset{2}{\Rightarrow} \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2 \in W$

$2+3 \Rightarrow 2,3$

$w_1, w_2 \in W \Rightarrow w_1 + w_2 = 1 \cdot w_1 + 1 \cdot w_2 \in W$

$$1 \in \mathbb{R},\ w \in W \implies 1 \cdot w = \frac{1}{2} \cdot w + \frac{1}{2} \cdot w \in W$$

$$= 1 \cdot w + 0 \cdot 0$$

$$1 \cdot 0$$

$$0 \cdot w$$

Esempi:

- $W = \{ x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 7 \}$

1. $0 \notin W$ **No**

(neppure 2 e 3)

$. \; W = \{ x \in \mathbb{R}^n : x_1 - 2x_2 + 3x_3 - 4x_4 \cdots = 0 \}$

$= \{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \cdot j \cdot x_j = 0 \}$

1. $0 \in W$ ✓

2+3. $x, y \in W \quad \alpha, \beta \in \mathbb{R} \overset{?}{\Rightarrow} \alpha x + \beta y \in W$

✓

$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \cdot j \cdot x_j = 0$

$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \cdot j \cdot y_j = 0$

$\sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \cdot j \cdot (\alpha x + \beta y)_j \overset{?}{=} 0$

$= \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} \cdot j \, (\alpha x_j + \beta y_j)$

$= \sum_{j=1}^{n} (\alpha (-1)^{j+1} \cdot j \, x_j + \beta (-1)^{j+1} j \, y_j)$

$$W = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} \sqrt[3]{j^2-7} \cdot x_j = 0 \right\}$$

$$-\sqrt[3]{6}\,x_1 - \sqrt[3]{3}\cdot x_2 + \sqrt[3]{2}\cdot x_3 + \sqrt[3]{9}\,x_4 + \dots = 0$$

0 ✓

$x, y \in W, \alpha, \beta \in \mathbb{R}$

$$= \underbrace{\alpha x_1 + \beta y_1}_{j=1} \underbrace{- 2\alpha x_2 - 2\beta y_2}_{j=2} \underbrace{+ 3\alpha x_3 + 3\beta y_3}_{j=3}$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha(-1)^{j+1} j x_j + \sum_{j=1}^{n} \beta(-1)^{j+1} j y_j$$

$$= \alpha \cdot \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} j x_j + \beta \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} j y_j$$

$$= \alpha \cdot 0 + \beta \cdot 0 = 0$$ ✓

$$-\sqrt[3]{6}\,x_1 - \sqrt[3]{3}\,x_2 + \sqrt[3]{2}\,x_3 \dots = 0$$

$$-\sqrt[3]{6}\,y_1 - \sqrt[3]{3}\,y_2 + \sqrt[3]{2}\,y_3 \dots = 0$$

$$\alpha\,\mathrm{I} + \beta\cdot\mathrm{II} = 0 \qquad -\sqrt[3]{6}\underbrace{(\alpha x_1 + \beta y_1)}_{(\alpha x + \beta y)_1} - \sqrt[3]{3}\underbrace{(\alpha x_2 + \beta y_2)}_{(\alpha x + \beta y)_2} \dots = 0$$

In generale:

$$\left\{ x \in \mathbb{R}^n : \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot x_j = 0 \right\} \text{ è un sottospazio}$$

$$\overbrace{\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \dots + \alpha_n x_n = 0}$$

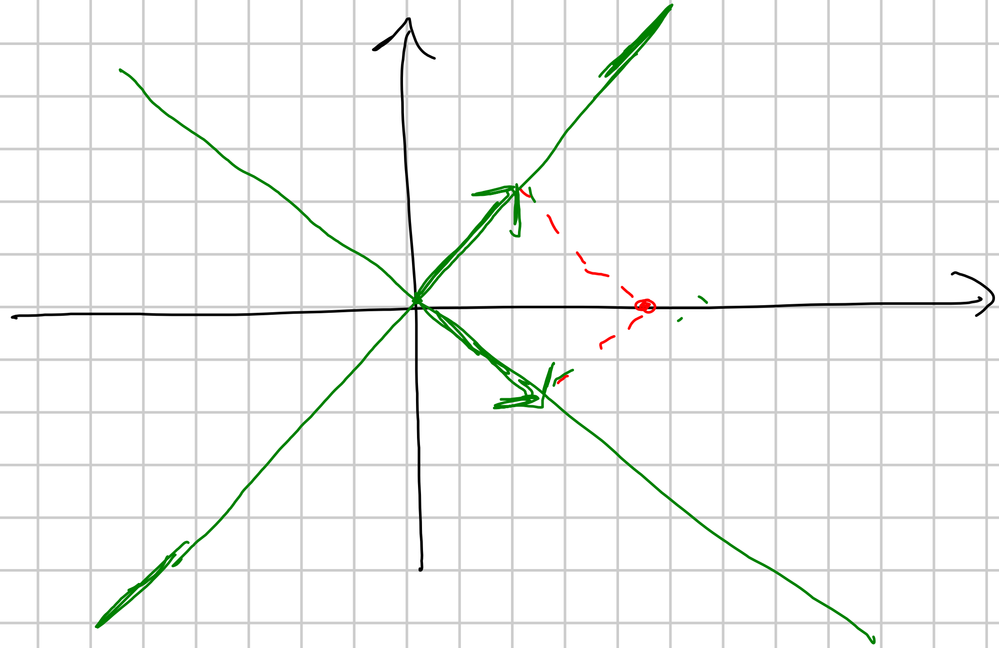
$$\alpha_1, \dots, \alpha_n \in \mathbb{R}$$

equazioni polinomiali omogenee di grado I nelle componenti di x

definiscono sempre sottospazi

Es: $\{ x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 - x_2^2 = 0 \}$

$x = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \quad y = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$



$x, y \in W$

$x + y = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} \notin W$ NO

(Però la 3 vale).

Es: $\{x \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 + x_2^2 = 0\} = \{0\}$ ✓

Oss: ogni sp. vett. V ha sempre due sottosp. banali

$\{0\}$, V

Es: $\{x \in \mathbb{R}^n : \sin(x_1 + 4x_2 + 9x_3 + 16x_4 + \dots) = 0\}$

$0 \in W$ ✓

$x, y \in W \longrightarrow x + y \in W$ ✓

$\alpha \in \mathbb{R},\ x \in W \overset{?}{\Longrightarrow} \alpha \cdot x \in W$ no

$$x = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \alpha = 1/2 \qquad \alpha \cdot x = \begin{pmatrix} \pi/2 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \notin W.$$

<u>NO</u>

<u>Notazione</u> : $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \qquad x, y \in \mathbb{R}^n \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \; y = \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

Es: $\{x \in \mathbb{R}^4 : \log(1 + |5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - \sqrt{2}\, x_4|) = 0\}$

$= \{x \in \mathbb{R}^4 : 5x_1 - 9x_2 + 4x_3 - \sqrt{2}\, x_4 = 0\}$

$\Longrightarrow$ è sottosp.

Es: $W = \{A = (a_{ij})_{\substack{i=1\dots m \\ j=1\dots m}} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) : 7a_{11} - 2a_{12} + 3a_{21} - \sqrt{11}\, a_{22} = 0\}$

$0 \in W$ ✓

$A, B \in W$

$7a_{11} - 2a_{12} + 3a_{21} - \sqrt{11}\, a_{22} = 0$

$7b_{11} - 2b_{12} + 3b_{21} - \sqrt{11}\, b_{22} = 0$

$$7\underbrace{(\alpha a_{11} + \beta b_{11})}_{(\alpha A + \beta B)_{11}} - 2\underbrace{(\alpha a_{12} + \beta b_{12})}_{(\alpha A + \beta B)_{12}} + \dots = 0$$

$\Rightarrow \alpha A + \beta B \in W$

equaz. polinom. omog. di I grado nei coeff della matrice

definire segno nel sottospazio

"le altre non vanno bene" (a meno che non siano mascherate).

Def: $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è detta <u>quadrata</u>.

$$tr(A) = a_{11} + a_{22} + \dots + a_{nn} = \sum_{j=1}^{n} a_{jj} = \sum_{j=1}^{n} (A)_{jj}$$

traccia

$$\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix}$$

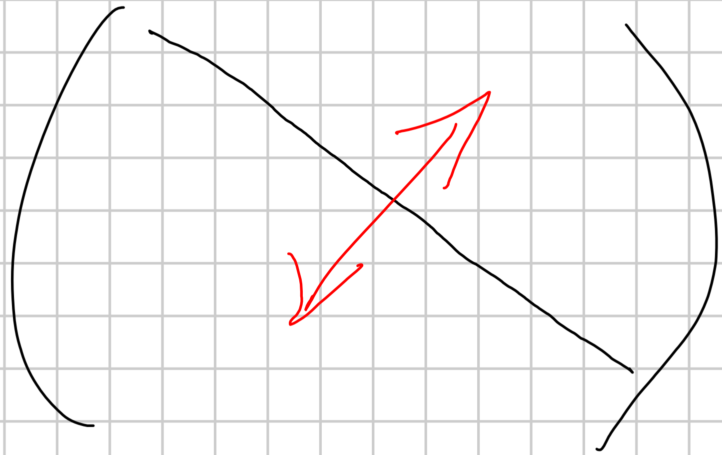
diagonale principale

Def: data $A \in M_{m \times n}(\mathbb{R})$ chiamo trasposta di A

$${}^tA \in M_{n \times m}(\mathbb{R}) \quad \text{dove} \quad ({}^tA)_{ij} = (A)_{ji}.$$

$${}^t\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 3 & -\pi \\ 19 & 41 & 16/3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boxed{\sqrt{2}} & \boxed{19} \\ \boxed{3} & \boxed{41} \\ \boxed{-\pi} & \boxed{16/3} \end{pmatrix}$$

Per $A \in M_{n \times n}$

${}^tA =$  rifl. risp. a diag. princ.

Es: $\{A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) : tr(A) = 0\}$

$a_{11} + a_{22} + a_{33} + a_{nn} \dots = 0$

è sottosp.

Es: $S_n = \{ A \in M_{n \times n}(\mathbb{R}) \ : \ {}^tA = A \}$

matrici simmetriche

$$\begin{pmatrix} -7 & 4 & \pi \\ 4 & \sqrt{3} & -11/7 \\ \pi & -11/7 & 19/4 \end{pmatrix}$$

È un sottosp.

Es: $\mathcal{A}_n = \{A \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{R}) : {}^tA = -A\}$

$$\begin{pmatrix} \boxed{0} & \boxed{17/3} & \boxed{-\pi} \\ \boxed{-17/3} & \boxed{0} & \boxed{-41} \\ \boxed{\pi} & \boxed{41} & \boxed{0} \end{pmatrix}$$

È un sottosp.

Es.: $\{ A \in M_{3\times 4}(\mathbb{R}) \; : \; |a_{ij}| \leq 5 \}$

$$\begin{pmatrix} 5 & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \in W \qquad 2 \cdot \begin{pmatrix} 5 & 0 & \cdots \\ 0 & & \\ \vdots & & \end{pmatrix} \notin W$$

no

Es.: $\{ A \in M_{5\times 7}(\mathbb{R}) \; : \; a_{ij} \in \mathbb{Q} \}$

$0 \in W \quad , x, y \in W \Rightarrow x + y \in W.$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \in W$$

$$\sqrt{2} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sqrt{2} & 0 & \cdots & \\ 0 & & & \\ \vdots & & & \\ \vdots & & & \end{pmatrix} \notin W.$$

<u>No</u>