UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 30/1/18 — Quesiti

Nome ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

1. Dati 3 vettori linearmente indipendenti in $\{x \in \mathbb{R}^{11} : 5x_1 + 7x_4 = 2x_8 + 3x_{11}\}$, quanti bisogna aggiungerne per ottenere una base?

2. Data la base $\mathcal{B} = (-4e_1 + 7e_2 + e_3,\ e_1 + 2e_2 + 2e_3)$ di $\{x \in \mathbb{R}^3 :\ 4x_1 + 3x_2 - 5x_3 = 0\}$, trovare $[2e_1 - e_2 + e_3]_{\mathcal{B}}$.

3. Se $X \subset \mathbb{C}^7$ è un sottospazio di dimensione 4 e $f : \mathbb{C}^5 \to \mathbb{C}^7$ è lineare tale che $X \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$, che dimensione può avere $\mathrm{Ker}(f)$?

4. Risolvere $\begin{cases} 7x + 2y - 4z = 1 \\ 2x - 5y + 3z = -29 \\ 6x + 3y + 2z = 14. \end{cases}$

5. Data $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & -1 \\ -9 & 4 & 1 \\ 2 & -5 & 1 \end{pmatrix}$ calcolare $(A^{-1})_{23}$.

6. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ i vettori $(t-1)e_1 + 4e_2 - 2e_3,\ (2t-1)e_1 - e_2 + 3e_3,\ e_1 - 9e_2 + (2t+1)e_3$ siano linearmente dipendenti.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(3e_1 - 4e_2 + e_3)$ trovare la matrice A (rispetto alla base canonica in partenza e in arrivo) della proiezione di $\mathbb{R}^3$ su X rispetto alla decomposizione in somma diretta $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$, provando che soddisfa la proprietà caratterizzante delle proiezioni.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

1. Considerare $W = \{q(x) \in \mathbb{R}_{\leq 3}[x] : \; 3q(-1) - q'(1) = 0\}$,

$\mathcal{B} = (1 + x + 7x^2 + x^3,\; 2 + x + 4x^2 + x^3,\; -1 + 2x + 5x^2 - x^3$ e $M_t = \begin{pmatrix} 4 & 3 & t+1 \\ t-2 & 1 & -4 \\ 10 & 8 & 4t+3 \end{pmatrix}$ al variare di $t \in \mathbb{R}$.

(A) (2 punti) Provare che $\mathcal{B}$ è una base di W.

Definire ora $g_t : W \to W$ come l'applicazione lineare tale che $[g_t]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = M_t$.

(B) (3 punti) Determinare i valori di t per i quali g_t non è iniettiva, verificando in particolare che ciò accade per un solo valore intero t_0.

(C) (3 punti) Trovare una base del nucleo di g_{t_0}, cioè di g_t per $t = t_0$.

(D) (4 punti) Provare che $-1 + 3x + 15x^2$ appartiene a W e calcolare la sua immagine tramite $g_{(-2)}$, cioè g_t per $t = -2$.

2. In $\mathbb{R}^4$ considerare al variare di $s, t \in \mathbb{R}$ i sottospazî affini

$$E_s = \begin{pmatrix} 1 \\ s \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} s+5 \\ s-9 \\ 5s-1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} s-5 \\ 8-7s \\ 9 \\ s-2 \end{pmatrix} \right),$$

$$F_t : \begin{cases} x_1 + (t+5)x_2 + (t+3)x_3 + x_4 = 1 - t \\ (t+2)x_1 + x_3 + (t+4)x_4 = -2. \end{cases}$$

(A) (3 punti) Trovare $s_0 \in \mathbb{R}$ e $n_0, n \in \mathbb{N}$ tali che E_s ha dimensione n_0 per $s = s_0$ e dimensione n per $s \neq s_0$.

(B) (3 punti) Trovare equazioni cartesiane di E_s per $s = 2$ e per $s = s_0$.

(C) (2 punti) Provare che F_t ha sempre dimensione 2.

(D) (4 punti) Descrivere $F_{(-3)} \cap E_2$ ed $F_{(-3)} + E_2$

Risposte ai quesiti

5. ♡

1. 7

2. $\frac{1}{3}\begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}$

3. Tra 2 e 5 compresi

4. $x = -1,\ y = 6,\ z = 1$

5. $\frac{1}{2}$

6. $t = 3$ e $t = \frac{5}{9}$

7. $A = \begin{pmatrix} -5 & -3 & 3 \\ 8 & 5 & -4 \\ -2 & -1 & 2 \end{pmatrix};\ A^2 = A$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♡

1.

(A) W ha dimensione 3 e $\mathcal{B}$ contiene tre vettori linearmente indipendenti di W

(B) $t_0 = 4,\ t = -\frac{3}{4}$

(C) $37 + 5x - 25x^2 + 11x^3$

(D) $-29 + 5x + 11x^2 - 16x^3$

2.

(A) $s_0 = -1,\ n_0 = 1,\ n = 2$

(B) $\begin{cases} x_1 + 10x_2 + 7x_3 = 21 \\ 6x_2 + 4x_3 + 3x_4 = 9; \end{cases}$ $\qquad \begin{cases} x_1 - 2x_4 = 3 \\ x_2 + 5x_4 = -6 \\ x_3 + 3x_4 = -3 \end{cases}$

(C) La matrice incompleta del sistema che definisce F_t ha sempre rango 2

(D) Una retta e un sottospazio affine di dimensione 3