UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 17/7/18 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Se V è uno spazio vettoriale di dimensione 4 e sono dati in V vettori v_1, v_2 linearmente indipendenti e una base $\mathcal{B}$, per completare v_1, v_2 a una base di V si possono scegliere due elementi qualsiasi di $\mathcal{B}$? Illustrare tutte le situazioni possibili.

2. Data la base $\mathcal{B} = (-9e_1 + 4e_2,\ 8e_1 - 5e_2)$ di $\mathbb{R}^2$, trovare $[11e_1 - 15e_2]_{\mathcal{B}}$.

3. Esibire oppure provare che non esistono sottospazî vettoriali X, Y, Z di $\mathbb{R}^6$ tutti di dimensione 3 e che si intersecano a coppie in $\{0\}$.

4. Risolvere $\begin{cases} 2x + 3y - z = -4 \\ x + 2y + 4z = 0 \\ 7x + 5y - 9z = 8. \end{cases}$

5. Se $A = (v_1,\ v_2) \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{C})$ ha determinante $4 + 3i$,
calcolare $\det((1-2i)v_1 + (1+i)v_2,\ (3-i)v_1 + (2+3i)v_2)$.

6. Dire quante sono le orlate di una sottomatrice 3×3 di una matrice 7×8.

7. Posto $X = \{x \in \mathbb{R}^3 :\ x_1 + 5x_2 - 2x_3 = 0\}$ e $Y = \mathrm{Span}(-4e_1 + 3e_2 + e_3)$ esibire la matrice della proiezione su X rispetto alla decomposizione $\mathbb{R}^3 = X \oplus Y$, verificandone la proprietà caratterizzante.

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / I parte — Scritto del 17/7/18 — Esercizî

1. Al variare di $s \in \mathbb{R}^3$ considerare in $\mathbb{R}^3$ il sottospazio

$$W_s : \begin{cases} (8-5s)x + (3s^2-2s-7)y + 3(2s+1)z = 0 \\ -6sx + 2(s+5)y + (3s^2-s-20)z = 0. \end{cases}$$

(A) (2 punti) Esibire una base di W_0.

(B) (4 punti) Esibire i due valori $s' < s''$ di s per i quali W ha dimensione 2. [Aiuto: $s', s'' \in \mathbb{Z}$.]

(C) (2 punti) Trovare $y, z \in \mathbb{R}$ tali che $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ z \end{pmatrix} \right)$ sia una base di $W_{s'}$.

(D) (2 punti) Trovare $x, y \in \mathbb{R}$ tali che $\mathcal{B}' = \left(\begin{pmatrix} x \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ y \\ 2 \end{pmatrix} \right)$ sia una base di $W_{s''}$.

(E) (2 punti) Provare che $\begin{pmatrix} 4 \\ -3 \\ 5 \end{pmatrix} \in W_{s'}$ e calcolare la sua immagine tramite $f : W_{s'} \to W_{s''}$ lineare tale che $[f]^{\mathcal{B}''}_{\mathcal{B}'} = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

2. Al variare di $t \in \mathbb{R}$ considerare le applicazioni lineari $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ tali che

$$f\begin{pmatrix} t-1 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t-3 \\ t-2 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} 2 \\ t-3 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}, \quad f\begin{pmatrix} t+1 \\ -5 \\ 9 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

(A) (4 punti) Provare che per $t = 0$ tale f esiste unica e calcolare $f^{-1}(e_1 + 3e_2 - 5e_3)$

(B) (5 punti) Stabilire quante tali f esistono al variare di t.

(C) (3 punti) Stabilire per quali t tale f esiste unica ma non è iniettiva.

1. $\spadesuit$ 2. $\heartsuit$ 3. $\spadesuit$ 4. $\clubsuit$ 5. $\diamondsuit$ 6. $\spadesuit$ 7. $\clubsuit$ 8. $\heartsuit$ 9. $\clubsuit$ 10. $\diamondsuit$

Risposte ai quesiti

5. ♢

1. No, si possono scegliere due elementi a caso di $\mathcal{B} \setminus \mathrm{Span}(v_1, v_2)$, che può essere $\mathcal{B}$ oppure contenere 3 o 2 dei vettori di $\mathcal{B}$.

2. $\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix}$

3. $X = \mathrm{Span}(e_1, e_2, e_3),\ Y = \mathrm{Span}(e_4, e_5, e_6),\ Z = \mathrm{Span}(e_1 + e_4, e_2 + e_5, e_3 + e_6)$

4. $x = 6,\ y = -5,\ z = 1$

5. 25

6. 20

7. $A = \frac{1}{9}\begin{pmatrix} 13 & 20 & -8 \\ -3 & -6 & 6 \\ -1 & -5 & 11 \end{pmatrix}$; $A \cdot A = A$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♢

1.

(A) $\begin{pmatrix} 11 \\ 16 \\ 8 \end{pmatrix}$

(B) $s' = -2,\ s'' = 1$

(C) $y = 1,\ z = 2$

(D) $x = 2,\ y = 3$

(E) $\begin{pmatrix} 22 \\ -4 \\ -10 \end{pmatrix}$

2.

(A) $-2e_1 + 9e_2 - 17e_3$

(B) Infinite per $t = 4$, nessuna per $t = -\frac{1}{2}$, una altrimenti

(C) $t = \frac{1}{6}$