

Teoria dei nodi 30/11/16

$$P = \sum_k A^{l(k)} \cdot A^{-r(k)} \cdot (-A^2 - A^{-2})^{|k|-1}$$

Claim: se da k sostituisco una l con una r ottenendo s'
il grado max dell'addendo di s' $\leq$ grado max dell'addendo di s : r
e $<$ stulho se $k = \text{"tutto } l \text{"}$

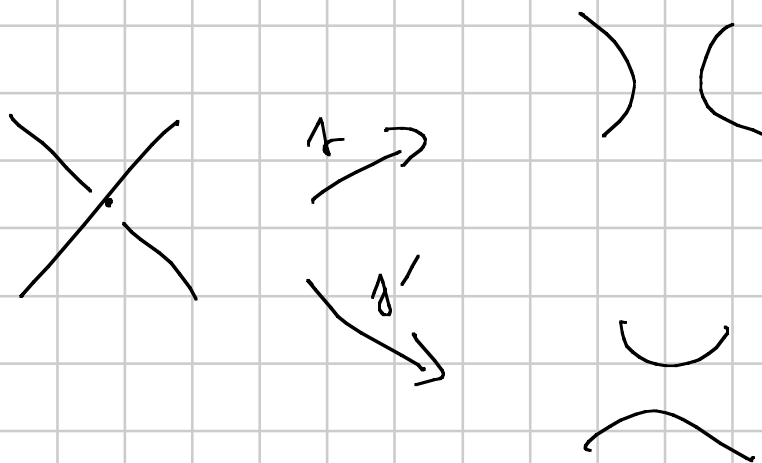
$$\text{Grado max per } s' : l(s') - r(s') + 2(|s|-1)$$

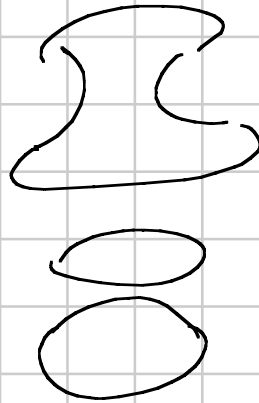
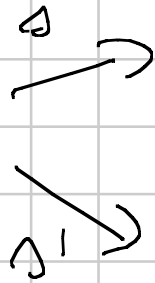
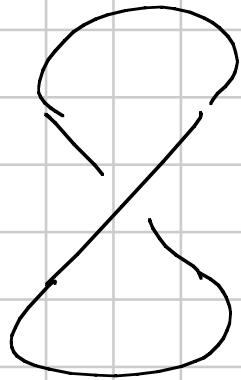
$$= l(\delta) - 1 - (\pi(\delta) + 1) + 2(|\delta'| - 1)$$

$$= \underbrace{l(\delta) - \pi(\delta) + 2(|\delta| - 1)}_{\text{grado max per } \delta} - 2(\underbrace{|\delta| - |\delta'| - 1}_{\text{der. provare che è } \geq 0})$$

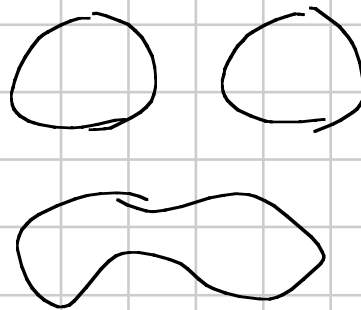
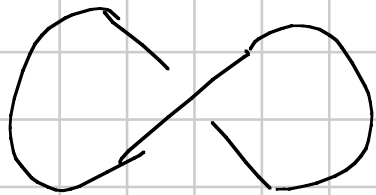
der. provare che è ≥ 0

e > 0 per $\delta = \text{tutti } \ell$





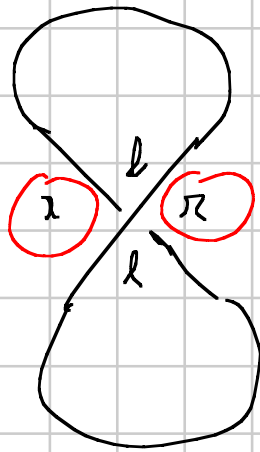
take the other
circuits, now
the same



$$\Rightarrow |\Delta'| \leq |\Delta| + 1$$

Supponiamo che $f = \pm 1$ e esprimiamo tutte le
simplificazioni tranne quelle in cui s' differisce da s :

Se si ottiene il caso $|s'| = |s| + 1$ significa che abbiamo

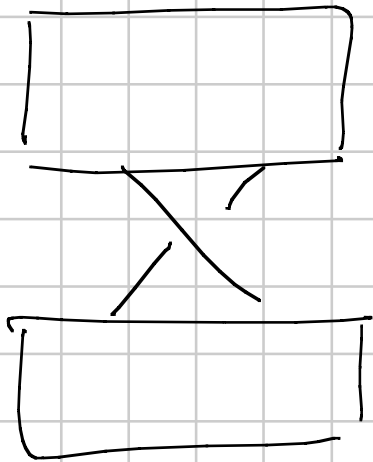


giacché due π sono nella stessa
regione dopo le altre semplificaz.

ma le altre semplificaz. non tutte
quindi hanno fatto solo ℓ con ℓ

$\Rightarrow$ le due π erano nella stessa
regione anche prima di

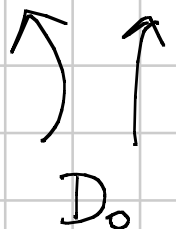
full le replication row



No: D rid ∇_0



Visto : $\mu V = P \mid A = q^{-1/4}$ sale



$$q^{-1} \cdot V(D_+) - q \cdot V(D_-) = (q^{1/2} - q^{-1/2}) \cdot V(D_0)$$

cioè

$$V(D_+) = f_+(V(D_-), V(D_0))$$

$$V(D_-) = f_-(V(D_+), V(D_0))$$

(Manturov)

Teo: Sia A un insieme con due operazioni binarie $\circ$ /
e $(a_n)_{n=1}^{\infty} \subset A$ t.c.

i) $(a \circ b) / b = a$ $(a / b) \circ b = a$

$$(2) \quad a_n = a_n \circ a_{n+1} = a_n / a_{n+1}$$

$$(3) \quad (a \circ b) \circ (c \circ d) = (a \circ c) \circ (b \circ d)$$

$$(4) \quad (a / b) / (c / d) = (a / c) / (b / d)$$

$$(5) \quad (a / b) \circ (c / d) = (a \circ c) / (b \circ d)$$

Allora esiste un'unica invariante W di link orientati t.c.

$$(v) \quad W(\underbrace{\bigcirc \dots \bigcirc}_n) = a_n$$

$$(s) \quad W(L_+) = W(L_-) \circ W(L_0)$$

$$(\Rightarrow W(L_-) = W(L_+) \wedge W(L_e))$$

Se è noto che W esiste ed è invariante le formule (U) e (S) consentono il calcolo per induzione su c e e $\Rightarrow$ viceversa.

Motivazione delle proprietà: (1) simmetrie $f_{\pm}$

$$(2) \quad q_n \stackrel{(U)}{=} W(\underbrace{\bigcirc \rightarrow \dots \rightarrow \bigcirc}_n) = W(\underbrace{\bigcirc \rightarrow \dots \rightarrow \bigcirc}_{n-1} \bigcirc \begin{matrix} \nearrow \\ + \\ \nwarrow \end{matrix})$$

$$\stackrel{(S)}{=} W(\underbrace{\bigcirc \rightarrow \dots \rightarrow \bigcirc}_{n-1} \bigcirc \begin{matrix} \nwarrow \\ - \\ \nearrow \end{matrix}) \circ W(\underbrace{\bigcirc \rightarrow \dots \rightarrow \bigcirc}_{n-1} \bigcirc \rightarrow \bigcirc)$$

$$= a_n \circ a_{n+1}$$

$$; \quad a_n = a_n / a_{n+1} \quad \text{de } (1)$$

(3)

$$W \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \times \\ + \end{array} \quad \begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \times \\ + \end{array} \right)$$

$$\parallel (s) \text{ a } sx$$

$$\parallel (s) \text{ a } \downarrow x$$

$$W \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \nearrow \\ \times \times \times \end{array} \right) \circ W \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \nearrow \\ \times \times \times \end{array} \right)$$

$$\parallel (s) \text{ a } \downarrow x$$

$$W \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \nearrow \\ \times \times \times \end{array} \right) \circ W \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \nearrow \\ \times \times \times \end{array} \right)$$

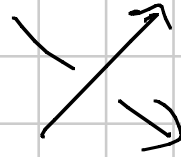
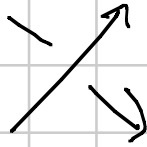
$$\parallel (s) \text{ a } sx$$

$$\left(W \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \nearrow \\ \times \times \times \end{array} \right) \circ W \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \nearrow \\ \times \times \times \end{array} \right) \right)$$

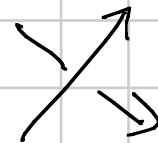
$$\circ \left(W \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \nearrow \\ \times \times \times \end{array} \right) \circ W \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \nearrow \\ \times \times \times \end{array} \right) \right)$$

$$(a \circ c) \circ (b \circ d)$$

(4)-(5) stesso con



e



Dim: Sia $\mathcal{D}_k = \{\text{diagrammi orientati con } \leq k \text{ incroci}\}$

Prova per induzione su k che esiste unico

$W_k : \mathcal{D}_k \rightarrow A$ che soddisfa (U) e (S)

ed è invariante per mosse di Reidemeister dentro $\mathcal{D}_k$.

Questo basta perché $W_h|_{\mathcal{D}_k} = W_k$ per $h > k$

$\Rightarrow W = \lim_{k \rightarrow \infty} W_k$ è ben def. $\forall$ diagramma,
soddisfa (U) e (S) ed è invariante per mosse $\perp \mathbb{R}$.

Con $k=0$: $W_0(\text{diagrammi su } n \text{ componenti}) = a_n$



Supponiamo costruita W_k e sia $D \in \mathcal{D}_{k+1}$ in $\mathcal{D}_0$.

Sia $b = (b_1, \dots, b_m)$ con b_j un punto su ciascuna componente di L che non sia incrocio per D
(Oss: scelgo ordine delle componenti + un pto su ciascuna).

Definisco ora $W_k(D, b)$ e provo invariante, $(S), (U)$
indipendenza da b .

Percorro L a partire da b_1 , poi da b_2 etc... e dico

un incrocio buono se viene percorso prima sotto, coltiro

se prima sopra. Per ricorrenza su $h = \# \text{incroci cattivi}$.

Per $h=0$ tengo $W^k(D, b) = a_m$ (motivazione: L è banale).

Per $h > 0$ prendo il primo inaccio cattivo e depurisco

se $P > 0$

$$W_{k+1}(\underbrace{D_{(P,+)}^h}_D, b) = W_{k+1}(D_{(P,-)}, b) \circ W_k(D_{(P,0)})$$

$\uparrow$ def padre
 $D_{(P,-)}$ ha $h-1$ inacci cattivi

$\uparrow$ def e non riduce b padre
 $C(D_{(P,0)}) = k$
 e ipotesi induttive.

se $P < 0$

$$W_{k+1}(\underbrace{D_{(P,-)}}_D, b) = W_{k+1}(D_{(P,+)}) \setminus W_k(D_{(P,0)})$$

Claim 1: vale (S) cioè

$$W_{k+1} \left(\begin{array}{c} \nearrow \\ \nwarrow \\ D(q,+) \end{array}, b \right) = W_{k+1} \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \nwarrow \\ D(q,-) \end{array}, b \right) \circ W_k \left(\begin{array}{c} \nearrow \nearrow \\ \nwarrow \\ D(q,0) \end{array} \right).$$

Se Q è cattivo per $D(q,+)$ allora $\bar{c}$ è buono per $D(q,-)$

$\Rightarrow D(q,-)$ ha meno invasi cattivi di $D(q,+)$.

Sia P il primo invaso cattivo di $D(q,+)$ e

supponiamo che Q si incontri $\bar{c}$ per la prima volta dopo nella lista

dei calli per $D = D(Q, t)$. Se $l = 0$, cioè $Q = P$

la (5) vale per costruzione di W_{k+1} . Affermo che vale sempre per induzione su l . Sia $l \geq 1$.

Se un nodo B ha segno ε scrivo

$$W(D_{(B, \varepsilon)}) = W(D_{(B, -\varepsilon)}) \tilde{\varepsilon} W(D_0)$$

$\begin{array}{cc} \circ & \circ \\ \nearrow & \searrow \\ \varepsilon = + & \varepsilon = - \end{array}$

$$W_{k+1} \left(\begin{array}{c} D_{(P, \varepsilon)} \\ (Q, t) \end{array}, b \right) = W_{k+1} \left(\begin{array}{c} D_{(P, -\varepsilon)} \\ (Q, t) \end{array}, b \right) \tilde{\varepsilon} W_k \left(\begin{array}{c} D_{(P, 0)} \\ (Q, t) \end{array} \right)$$

in $D(P, -\varepsilon)$ l'angolo
 Q è in posizione $l-1$
 nella lista ordinate
 dei colturi

induc. su k
 $W_k(D_{(P,0)}^{(Q,-)}) \circ W_k(D_{(P,0)}^{(Q,0)})$

$\Downarrow$ induzione su l

$$W_{k+1}(D_{(P,-\varepsilon)}^{(Q,-)}, b) \circ W_k(D_{(P,-\varepsilon)}^{(Q,0)}) \quad (\varepsilon = +)$$

(3)-(5)

$$\begin{aligned} & \Downarrow \\ & = \underbrace{\left(W_{k+1}(D_{(P,-)}^{(Q,-)}, b) \circ W_k(D_{(P,0)}^{(Q,-)}) \right)}_{W_{k+1}(D_{(P,+)}^{(Q,-)})} \circ \underbrace{\left(W_k(D_{(P,-\varepsilon)}^{(Q,0)}) \circ W_k(D_{(P,0)}^{(Q,0)}) \right)}_{W_k(D_{(P,+)}^{(Q,0)})} \end{aligned}$$

poiché P è il primo
racocio cattivo in H
diop u_{anna}

poiché W_k soddisfa (S)

Caso P negativo analogo.

Caso Q buono per $D(q, +)$ è cattivo per $D(q, -)$

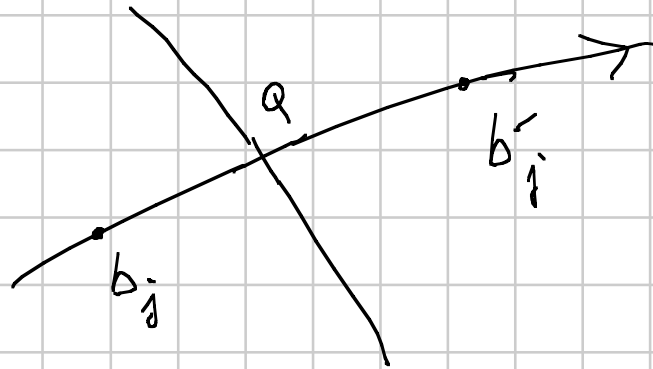
e come sopra prova che

$$W_{k+1}(D(q, -)) = W_{k+1}(D(q, +)) / W_k(D(q, 0)) \Rightarrow \textcircled{1}$$

Claim 2: $W_{k+1}(D, b)$ è indipendente dalla posizione di b_j
sulle i -esime componenti

(non cambio ordine componenti)

Basta prendere

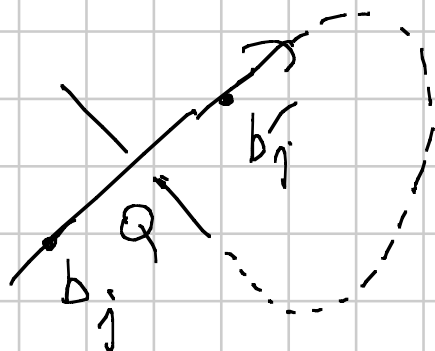


Se Q è buono sia per b sia per b' il primo caso è lo stesso in (D, b) e $(D, b') \Rightarrow \underline{OK}$

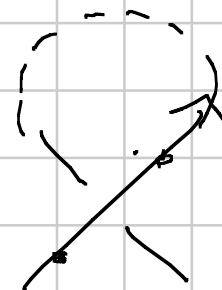
Se Q è cattivo sia per b sia per b' uso il Claim 1 per farlo diventare cattivo in $(\tilde{D}, b)$ e in $(\tilde{D}, b')$

e conduco facilmente -

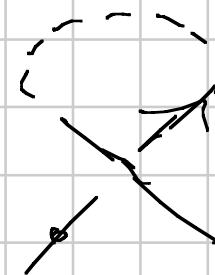
Reste : Q buono per b , cattivo per b' o viceversa -



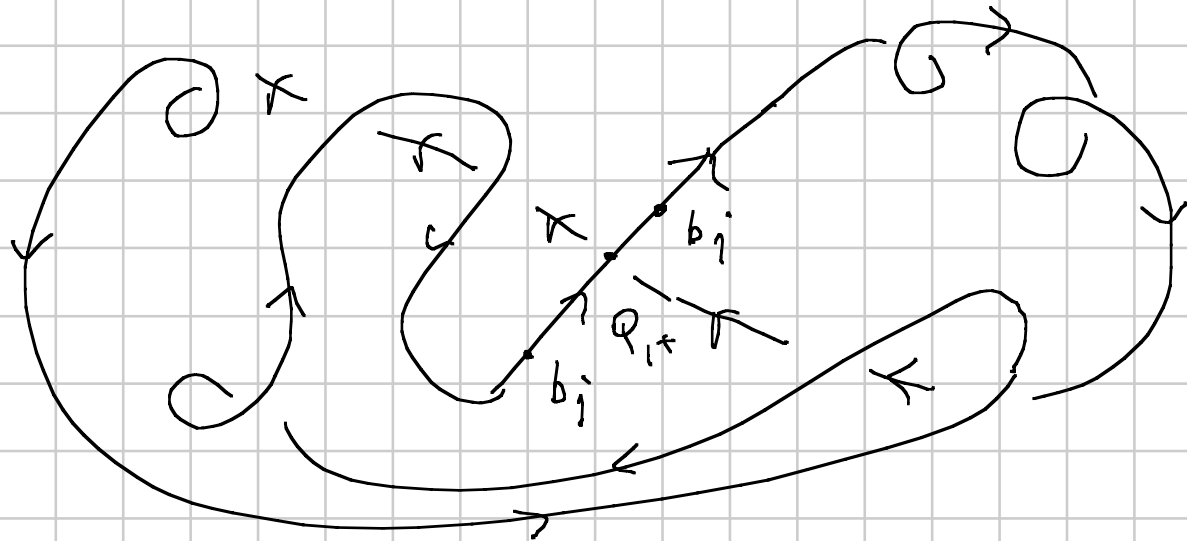
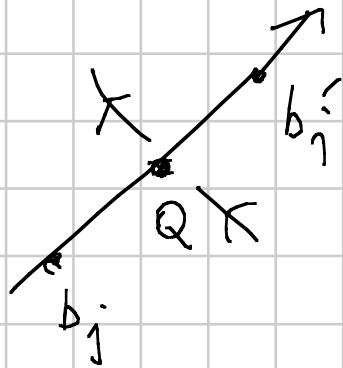
Q cattivo in (D, b)
buono in (D, b')



Q buono in (D, b)
cattivo in (D, b')



Tutti gli altri incroci hanno la stessa natura buono/cattivo
 sia in (D, b) sia in (D, b') - Usando il Claim 1
 posso ricondurre al caso in cui tutti gli altri siano buoni



$$W_{k+1}(D, b) = W_{k+1}(D_{(q, t)}, b) = \underbrace{W_{k+1}(D_{(q, t-1)}, b)}_{a_m} \cdot \underbrace{W_t(D_{(q, 0)})}_{a_{m+1}}$$

poiché $D_{(q, t-1)}$ non
ha incassi cattivi
e ha m componenti

poiché ha $m+1$
e rispetto a

b_i' b_i''

tutti gli incassi
sono buoni

$\Rightarrow$ per def. di W_k il
valore è a_{m+1}

NON barte dice che è un link
banale perché può essere un
membro di D_k

Altri casi analoghi.