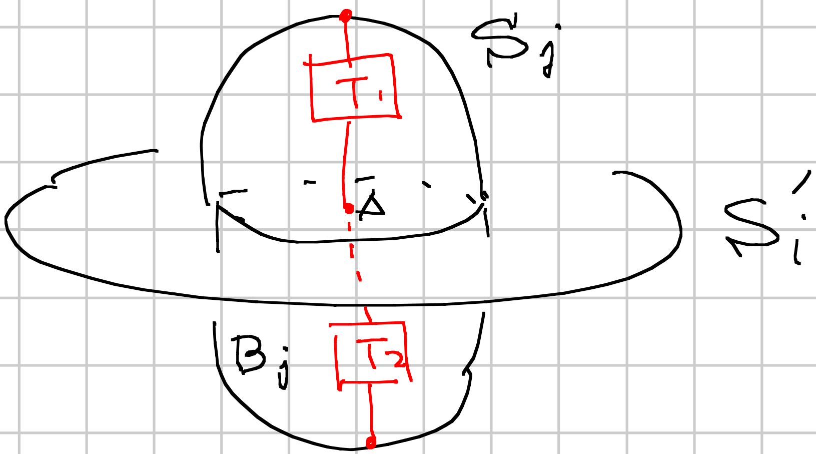
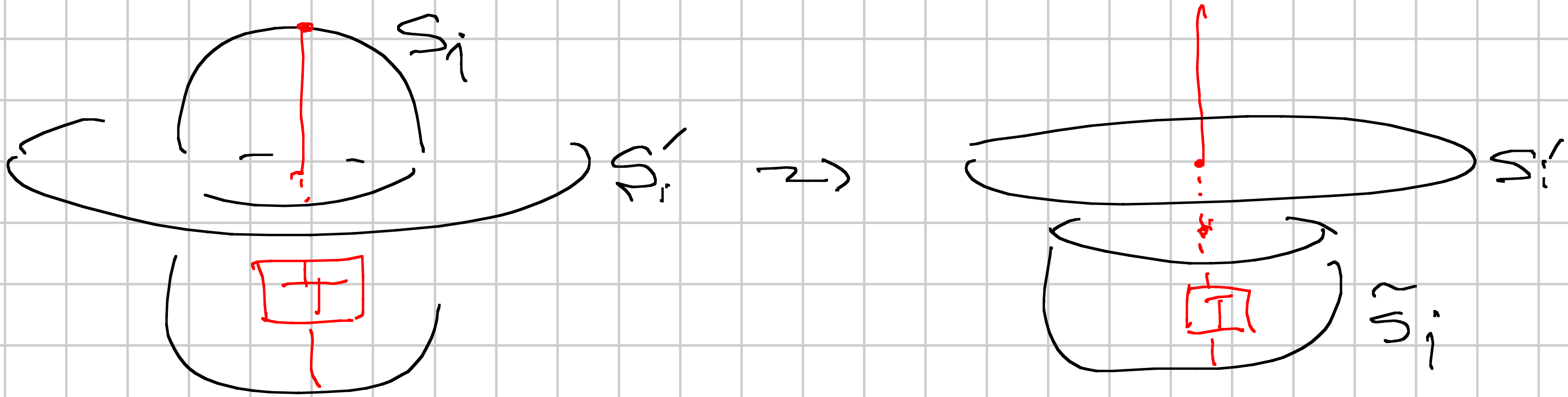
Teoria dei Nodi 27/10/16

$\mathcal{S}, \mathcal{S}'$ sistemi che danno decomposizioni

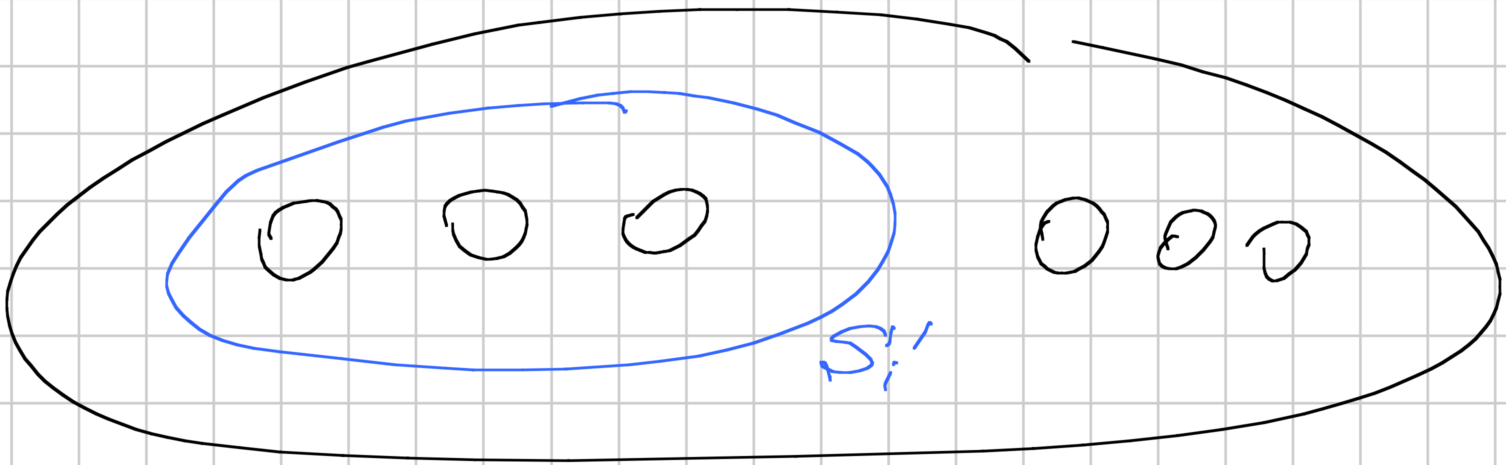
alcune componenti comuni + le altre si incontrano.



Poiché $(B_j, K \cap B_j)$ determina nodo primo $\Rightarrow$ uno tra T_1 e T_2 è banale

$\Rightarrow$ 

Mi riduco a $\mathcal{S} \subset \mathcal{S}'$: se esistesse $S_i' \in \mathcal{S}' \setminus \mathcal{S}$ prendo la compo C_i di $S^3 \setminus \mathcal{S}$ che contiene S_i'



Potrei sostituire come nel primo passo S_i' con una delle $\mathcal{I}$ $\Longrightarrow$ due sfere // che determinano $\bigcirc$. $\blacksquare$

Prop: $p, q \geq 2$ coprimi $\Rightarrow \mathbb{Z}/p * \mathbb{Z}/q$ determina $\{p, q\}$

Dim: otteniamo che gli el. di ordine finito sono

$$w \cdot a_p^j \cdot w^{-1} \quad \text{o} \quad w \cdot a_q^i \cdot w^{-1}.$$

Per induzione sulla lunghezza: $L(a_p^3 \cdot a_q^5) = 2$.

Lunghezza pari: non ha ordine finito perché ogni sua potenza ha scrittura ridotta.

Lunghezza dispari: la potenza può essere 1 solo se

$$a_p^{j} \cdot (\dots) \cdot a_p^{p-j}$$

$$a_p^{p-j} = a_p^{-j}$$

ha ordine finito

$\Rightarrow$ concludo per induzione

$$\phi : \mathbb{Z}/p * \mathbb{Z}/q \longrightarrow \mathbb{Z}/r * \mathbb{Z}/s \quad \text{isomorfismo.}$$

$$\phi(a_p) = w \cdot a_r^{j} \cdot w^{-1} \qquad \phi \sim w^{-1} \phi\, w \Rightarrow \text{wlog } w = 1$$

$$\Rightarrow \phi(a_p) = a_r^{j}$$

$$p = ord(a_p) = ord(\phi(a_p)) = ord(a_r^j) = \frac{r}{MCD(r,j)} \Rightarrow r \geq p$$

$$\phi^{-1}(a_r) = y \cdot a_t^k \cdot y^{-1}$$ y finita con u dove $\{t,u\} = \{p,q\}$

$$\phi^{-1}(a_r^j) = y \cdot a_t^{kj} \cdot y^{-1}$$ ma $\phi^{-1}(a_r^j) = a_p$

se $a_t^{kj} = 1 \Rightarrow \phi^{-1}(a_r^j) = 1$ No

altrimenti è scritta ridotta $\Rightarrow y = 1 \quad t = p$

Provato $\phi^{-1}(a_r) = a_p^k \Rightarrow r = \frac{p}{MCD(p,k)} \Rightarrow p \geq r$

Dunque $r = p$ e j è coprimo con $p = r \Rightarrow a_t^j$ genera; wlog $j = 1$

$$\phi : \mathbb{Z}/p * \mathbb{Z}/q \longrightarrow \mathbb{Z}/p * \mathbb{Z}/s$$

$$\phi(a_p) = a_t$$

Ora $\quad \phi(a_q) = w \cdot a_t^j \cdot w^{-1} \quad$ w finisce con u

$\{t, u\} = \{p, s\}$

$q = \mathrm{ord}(a_p) = \mathrm{ord}(a_t^j) =$ divisore di $t \in \{p, s\}$

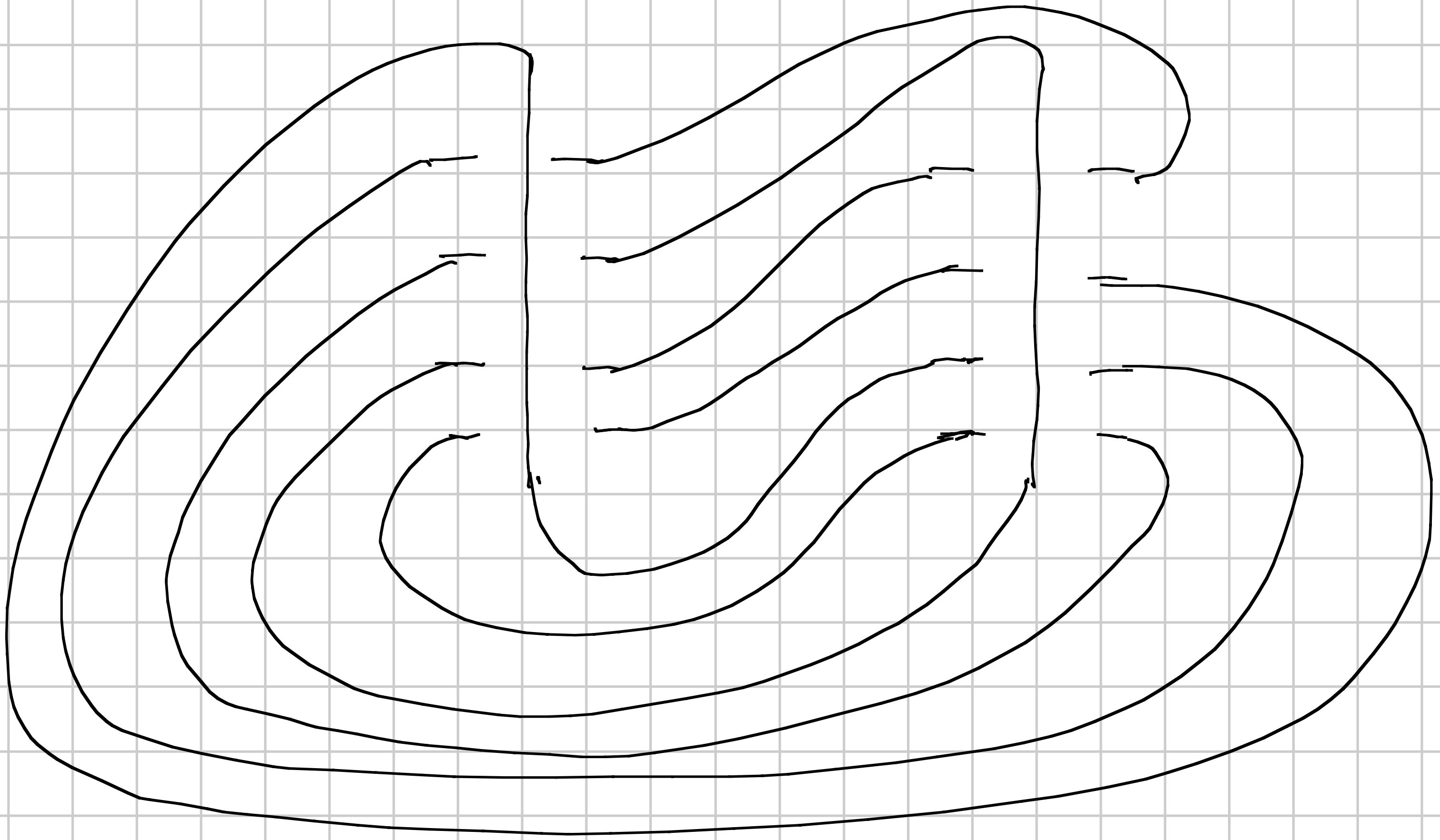
q coprimo con $p \Rightarrow t = s$ e .

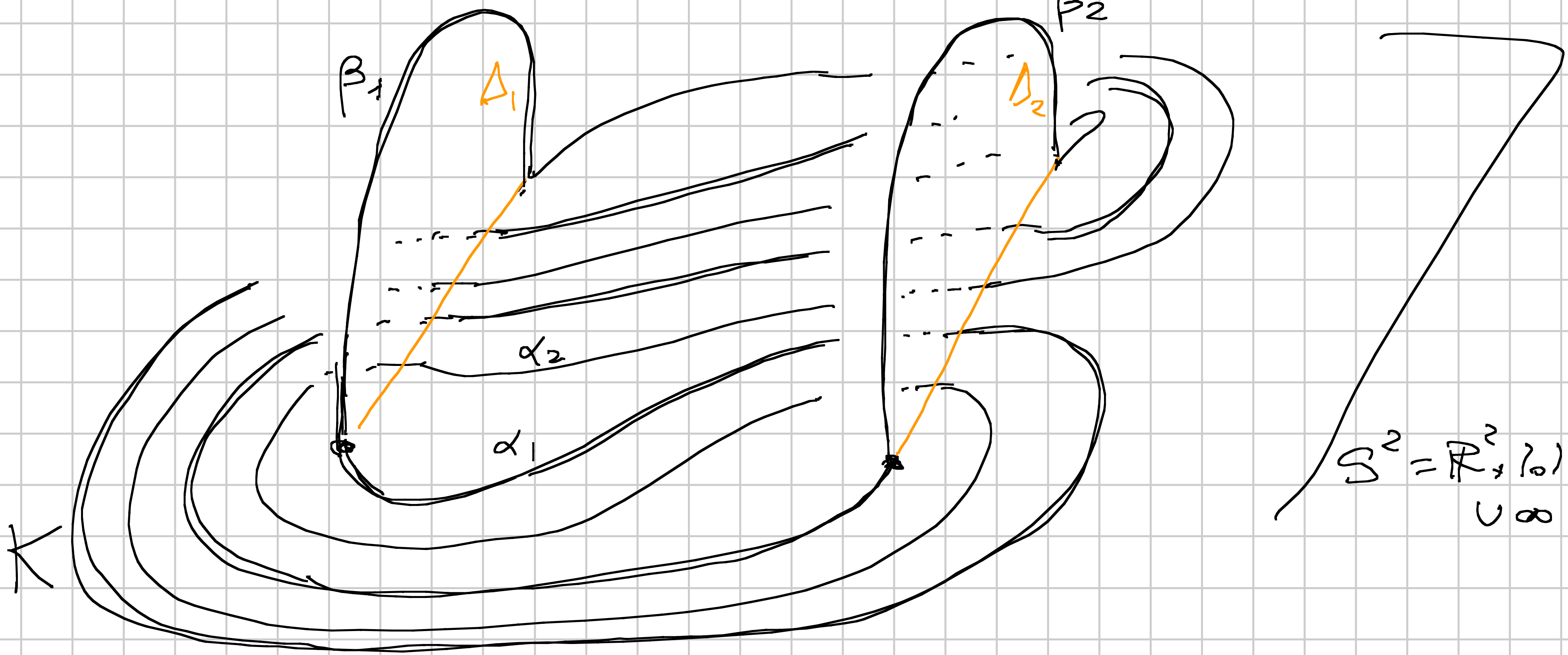
$$q = \frac{s}{MCD(s, j)} \Rightarrow q \le s \text{ ; per simmetria } s \le q. \quad \blacksquare$$

Oss: i nodi di genere 1 sono primi (additività genere).

Prop: i nodi a 2 ponti sono primi.

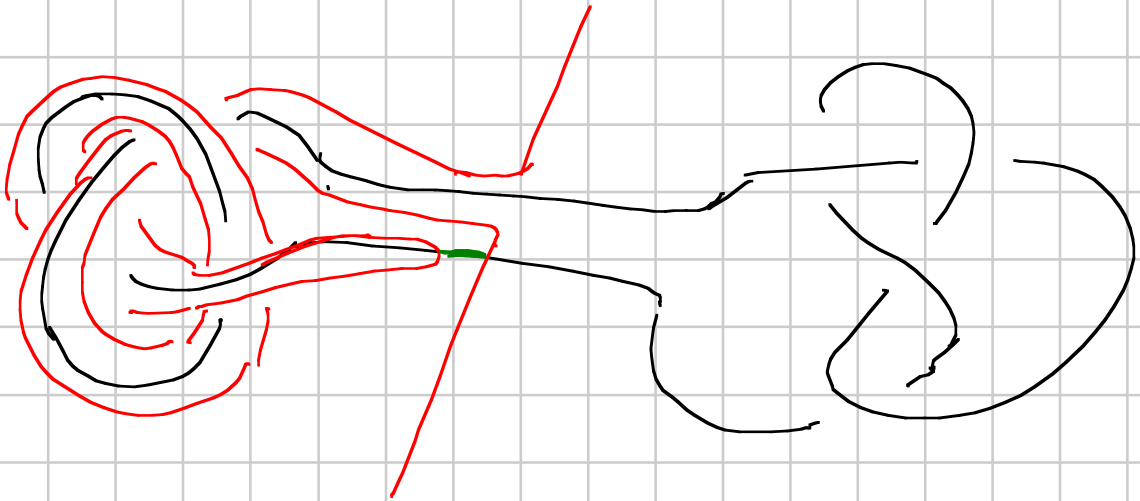
Dim: come si dipinge un nodo a 2 ponti (da cui segue che dipende solo da un numero razionale):



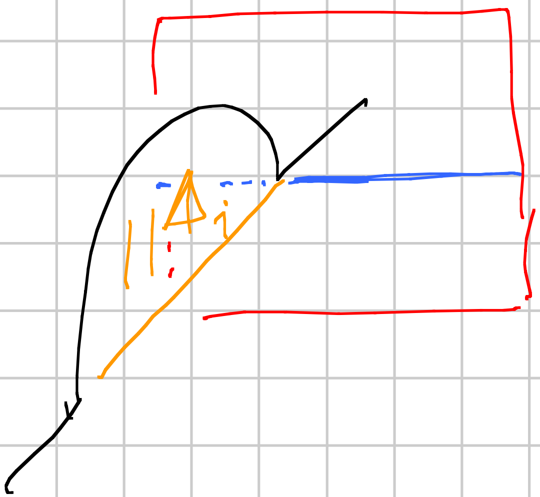


β_1
β_2
Δ_1
Δ_2
α_2
α_1
K
$S^2 = \mathbb{R}^2 \times \{0\}$
$\cup \infty$

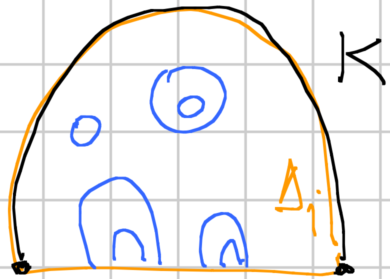
Sia S una 2-sfera che spezza il nodo in # non banale.
Posso supporre che $S \cap K$ = estremità di α_1 e dunque S separa α_1 da α_2.



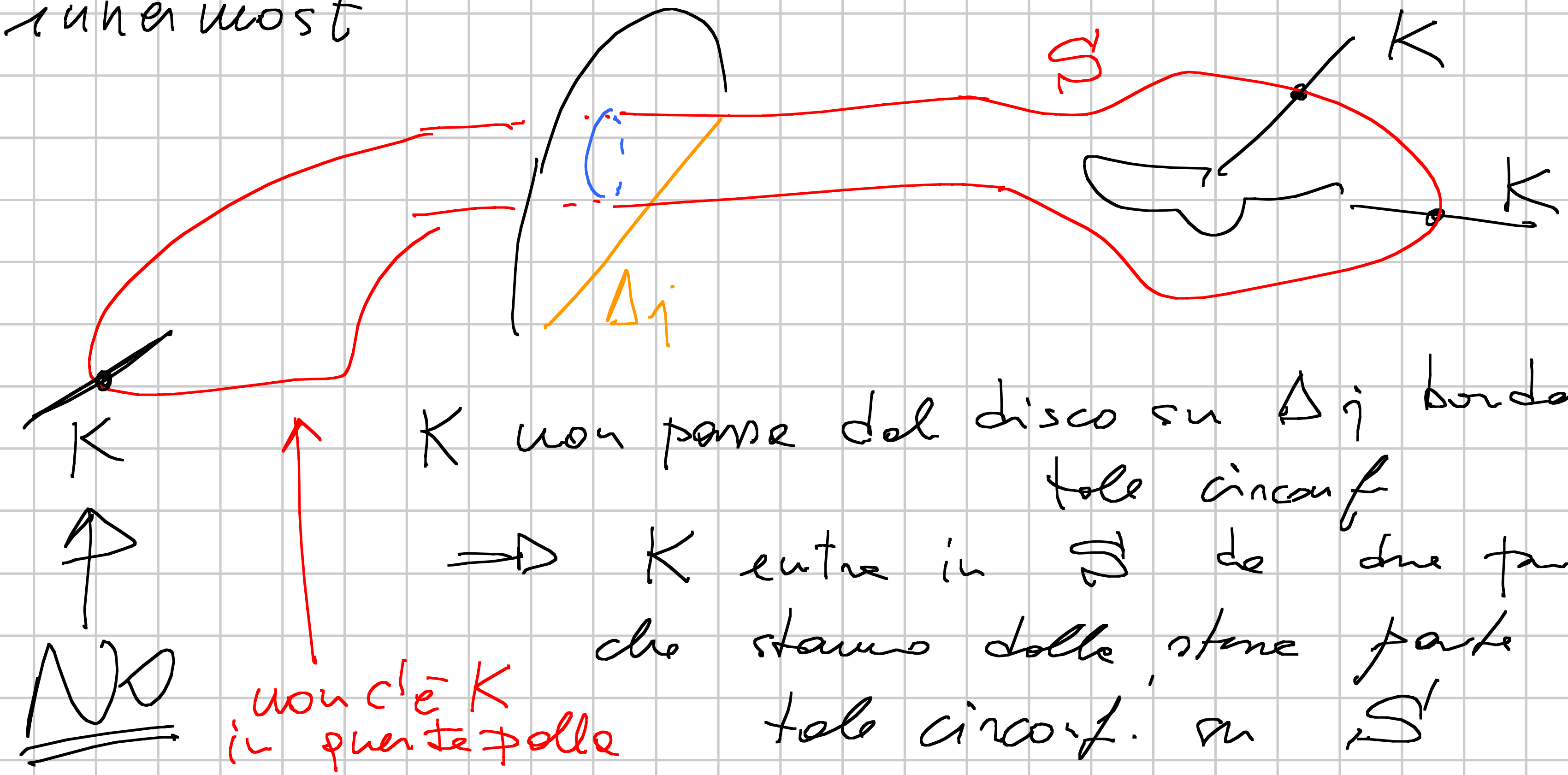
Inoltre decido che S vicino a tali estremi di α, e suppongo $S \pitchfork S^2$, $S \cap \Delta_j$



$\Rightarrow$ le intersezioni di S con S^2 sono circonferenze e quelle con Δ_j sono



Se esiste una circonferenza in $\Delta_j \cap S$ ne prendo una innermost

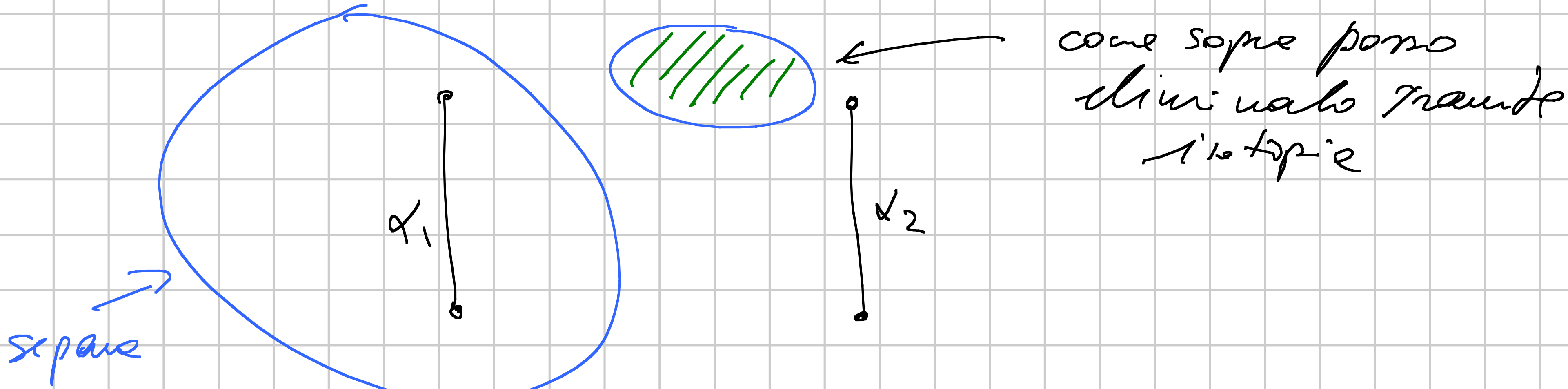


K non passa dal disco su Δ_j bordato da tale circonf.

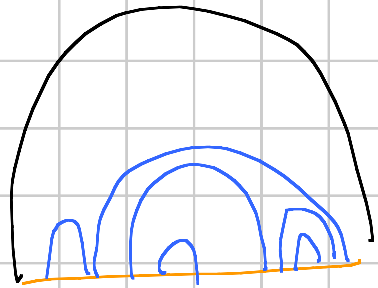
$\Longrightarrow$ K entra in S da due parti che stanno dalla stessa parte di tale circonf. su S

$\Rightarrow$ posso isotopare $\tilde{S}$ attraverso queste palle diminuendo l'intersezione.

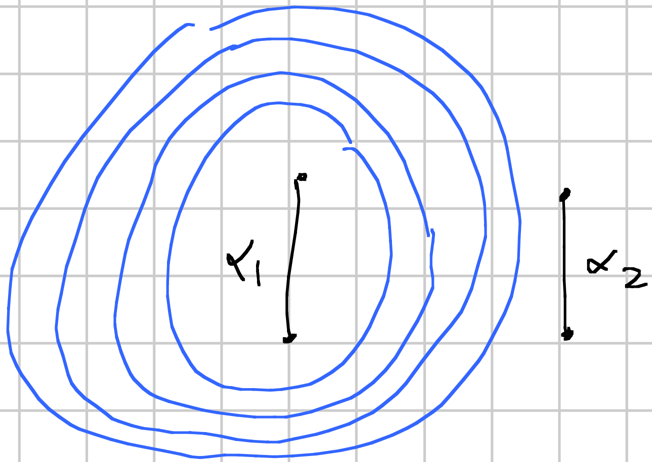
Se ho su $\tilde{S}^2$ una circonferenza in $S \cap \tilde{S}^2$ che non separa fra loro α_1 e α_2



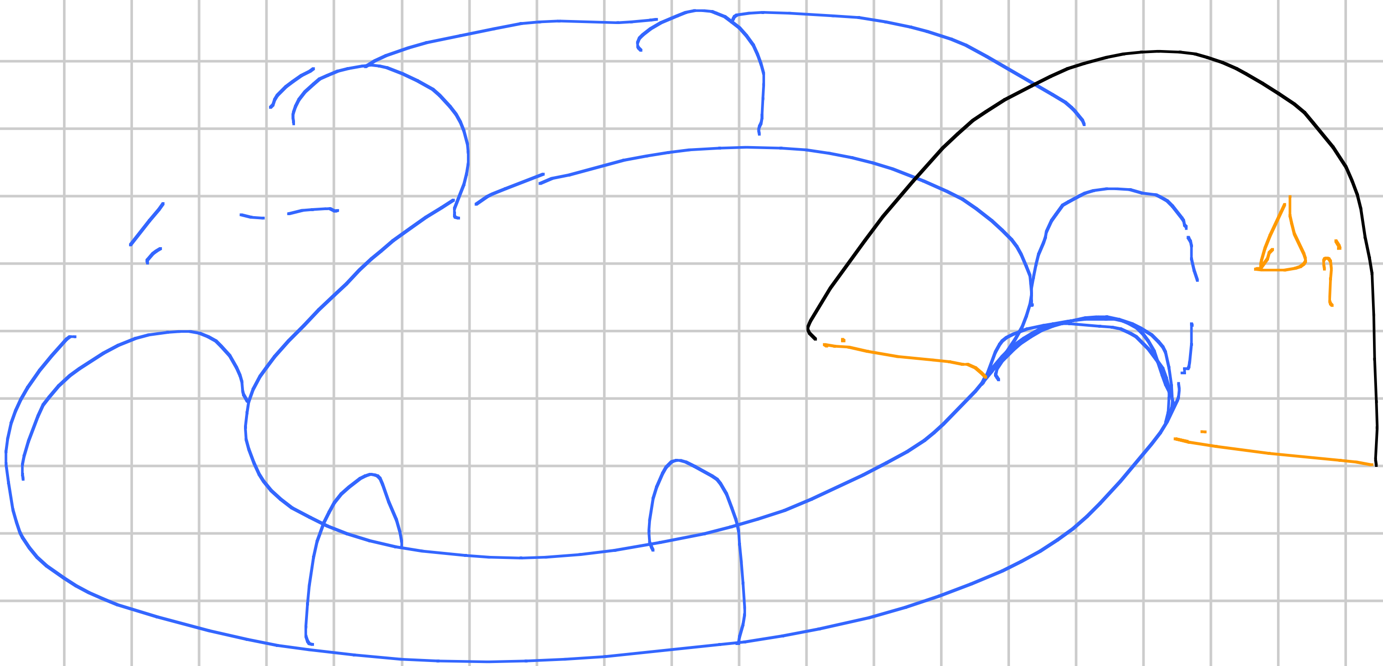
Mi sono ridotto a intersezioni solo



e



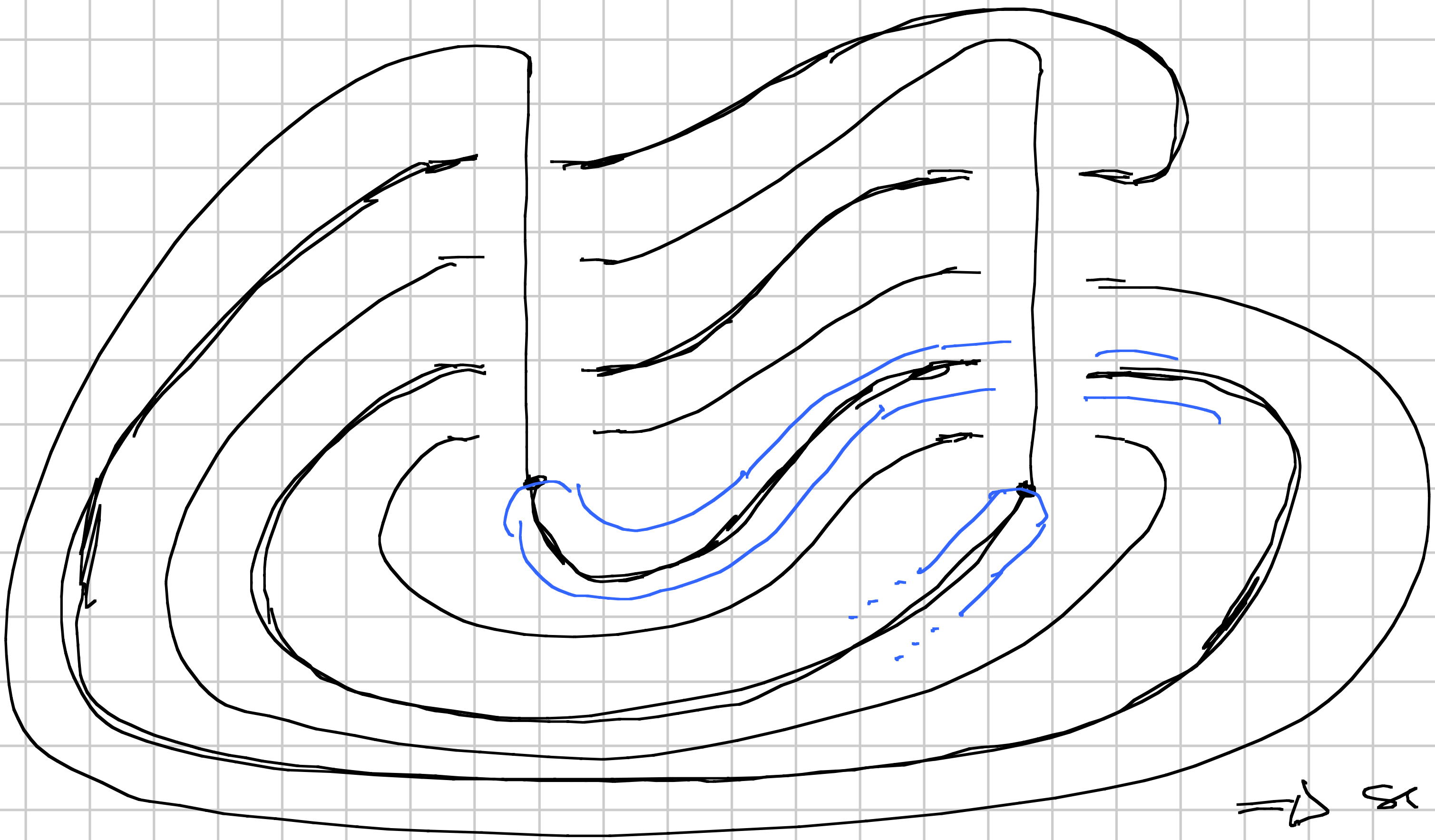
Se $S \cap S^2$ contiene almeno 2 tali circonferenze ne prendo due consecutive; l'anello che esse delimitano non tocca K



dentro tale toro solido non compare K

$\Rightarrow$ posso spingerlo sotto S^2 eliminando
le due circonferenze.

Mi sono ricondotto a una sola circonf. di intersezione

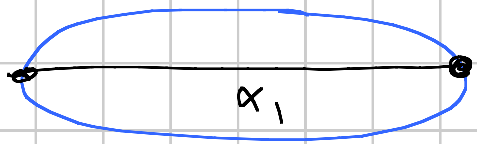


$\Rightarrow$ st $S = \partial B$

$(B_1, K \cap S) = (B, \alpha_1)$

determina nodo banale

$\Rightarrow$



$\blacksquare$

Prop: $K_{p,q}$ ($p, q \geq 2$ coprimi) è primo.

Dim: $K_{p,q} \subset T = \partial U_1 = \partial U_2 \qquad U_j \cong D^2 \times S^1$

Sia $S \cong S^2$ con $S \pitchfork K_{p,q} = 2$ pti che dà # non banale.

Suppongo $S \pitchfork T$ e prendo $\gamma \subset S \pitchfork T$ circonf

innermost in S $\Rightarrow$ bordo $\Delta \cong D^2$ in U_1 o U_2. Casi:

I : $\gamma \cap K_{p,q} = \emptyset$ e γ bordo disco in T

$\Rightarrow$ posso eliminare γ via isotopie

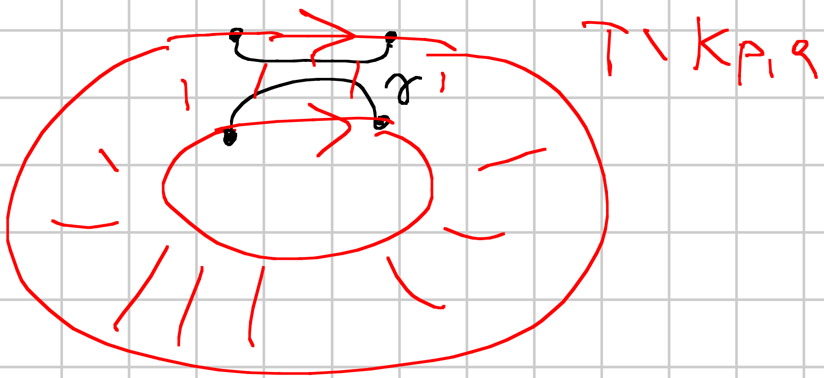
II : $\gamma \cap K_{p,q} = \emptyset$ ed è il cuore dell'anello $T \setminus K_{p,q}$

$\Rightarrow$ $\gamma \parallel K_{p,q}$ $\Rightarrow$ $K_{p,q}$ bordo disco in U_1 o U_2

$\Rightarrow$ sarebbe un meridiano $\Rightarrow$ $\{p,q\} = \{1,0\}$.

III : $\gamma \cap K_{p,q} = 2$ pti

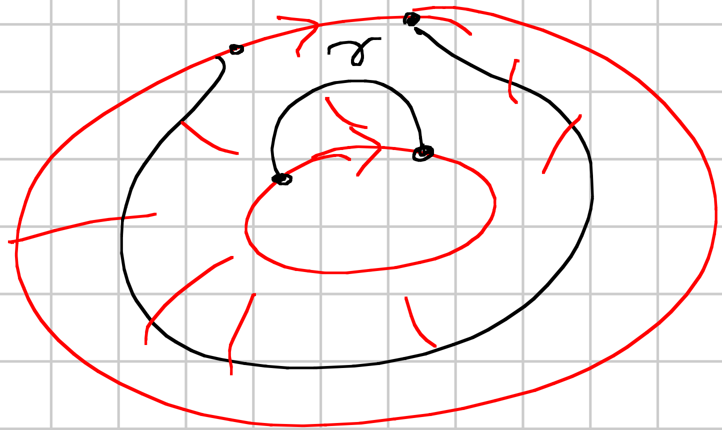
III-a



$\Downarrow$

S splitta $K_{p,q}$ in una $\#$ con una coppia banale <u>NO</u>

III-b



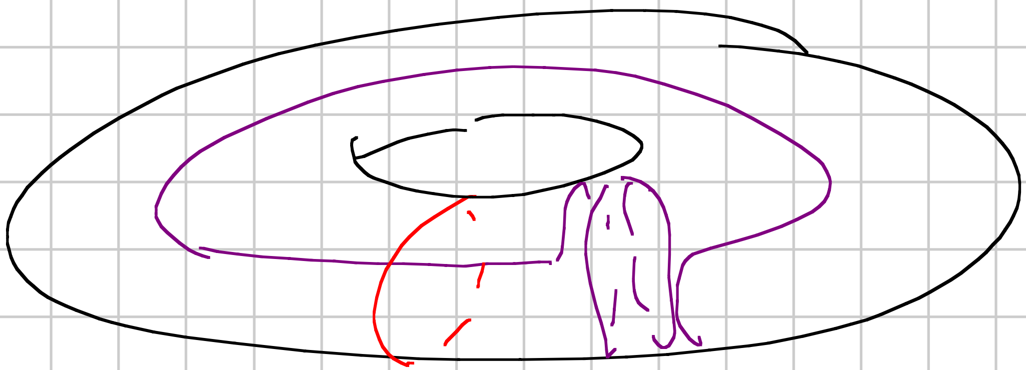
$\Downarrow$

$K_{p,q}$ meridiano <u>NO</u>

$\underline{\text{IV}}$ $\gamma \cap K_{p,q} = 1$ pto

$\Rightarrow$ γ incontra un meridiano di U_1 in un pto

$\Rightarrow$ $\{p,q\} \geq 1$



$\underline{\text{No}}$

$\boxtimes$

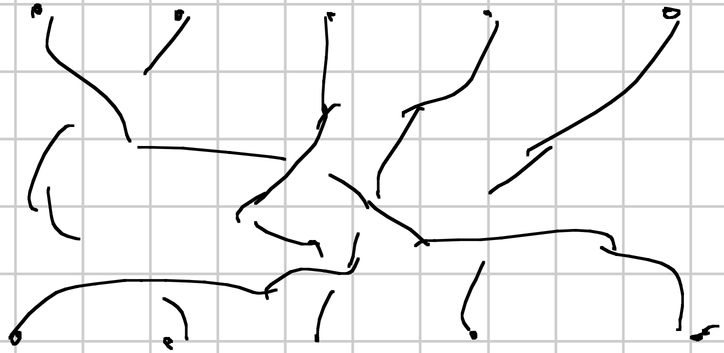
Presentazione dei nodi come chiusure di trecce.

$$B_n = \left\{ \alpha = (\alpha^{(1)}, \dots, \alpha^{(n)}) : [0,1]^n \to \mathbb{R}^2 \times [0,1] \text{ embedding proprio} \right.$$

$\mathrm{Im}(\alpha)$:

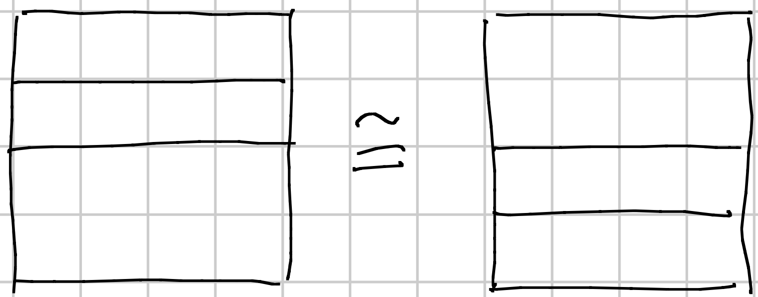
$\alpha_3^{(j)}$ è monotona crescente

$\alpha_3^{(j)}(0) = (j, 0, 0)$, $\alpha_3^{(j)}(1) = (j, 0, 1)$ $\Big\} \Big/$ isotopie tramite oggetti della stessa natura

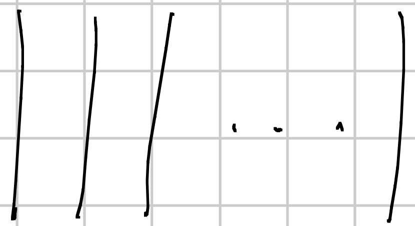


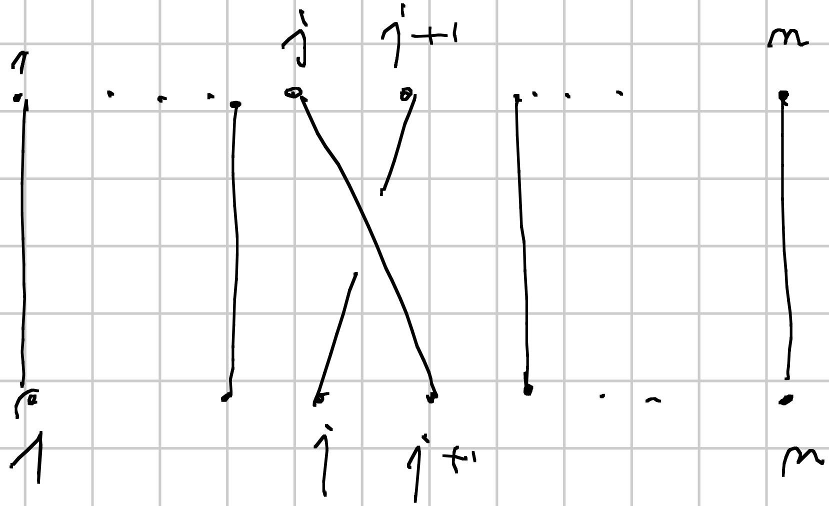
B_n è in modo naturale un gruppo

$$\boxed{b_1} \cdot \boxed{b_2} = \begin{array}{|c|}\hline b_1 \\ \hline b_2 \\ \hline \end{array}$$



<u>associative</u>

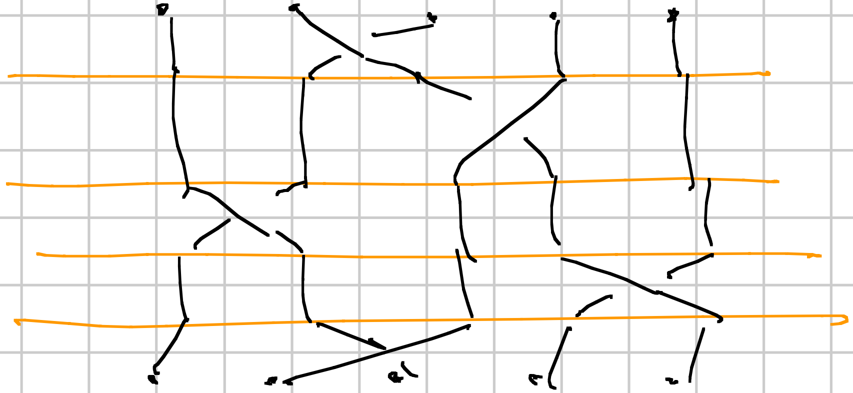
1 : 

Oss: σ_j : 

; $\sigma_j^{-1} =$ 

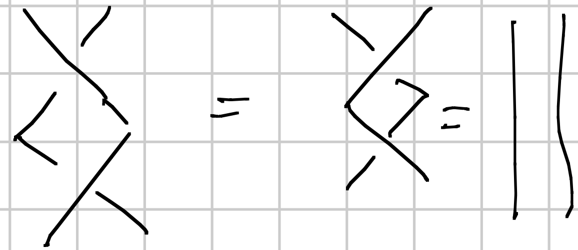
$\sigma_1^{\pm 1}, \ldots, \sigma_{n-1}^{\pm 1}$ generano B_n come semigruppo

(basta isotopare una treccia mettendo gli incroci ad altezze diverse



)

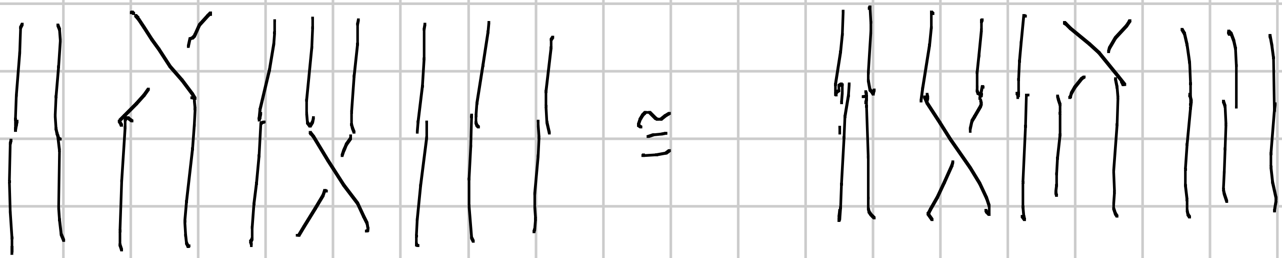
$$\sigma_i \cdot \sigma_i^{-1} = \sigma_i^{-1} \cdot \sigma_i = 1$$

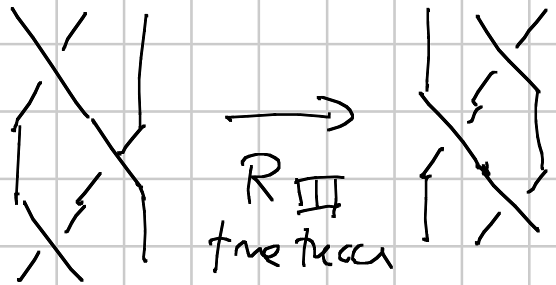


Prop: $B_n = \langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} : \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad |i-j| \geq 2$

$\sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad \forall i \rangle.$

Dimo: le relazioni valgono:





rappresentato da diagramma D

<u>Bastano</u>: data $b \in B_n$ treccia, scrivere b come prodotto dei generatori significa scegliere un ordine discendente degli incroci di D (non arbitrario).

Due trecce sono uguali se i diagrammi sono isotopi tra diagrammi di trecce. Tale isotopia è generata da: isotopie planari tra diagrammi di trecce e R_I, R_{II}, R_{III} tra diagrammi di trecce.

L'isotopia planare ha effetto sull'ordine degli incroci che mi serve e scrivere b come parola negli $\sigma_1^{\pm 1}, \dots, \sigma_n^{\pm 1}$; l'accidente elementare

$\sigma_i \quad \sigma_j$

$\downarrow$

$\sigma_i \cdot \sigma_j$

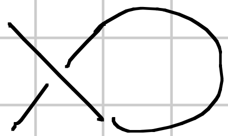
$\sigma_i \quad \sigma_j$

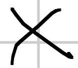
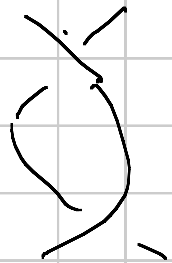
$\downarrow$

$\sigma_j \cdot \sigma_i$

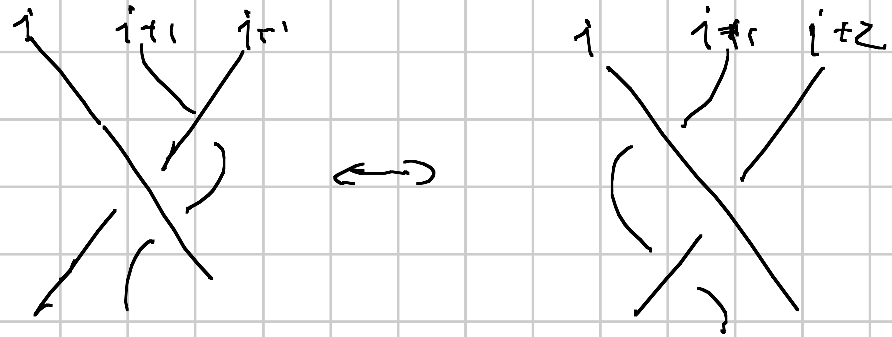
Ovviamente ho anche 

che danno $\sigma_i^{-1}\sigma_j = \sigma_j \sigma_i^{-1}$ e altre 2 che sono tutte conseguenze (nel senso delle presentazioni $\langle - \mid - \rangle$) di $\sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i$.

R_I:  MAI

R_{II}:  NO  INVECE:  $\sigma_i \cdot \sigma_i^{-1} = 1$

R_{III} :

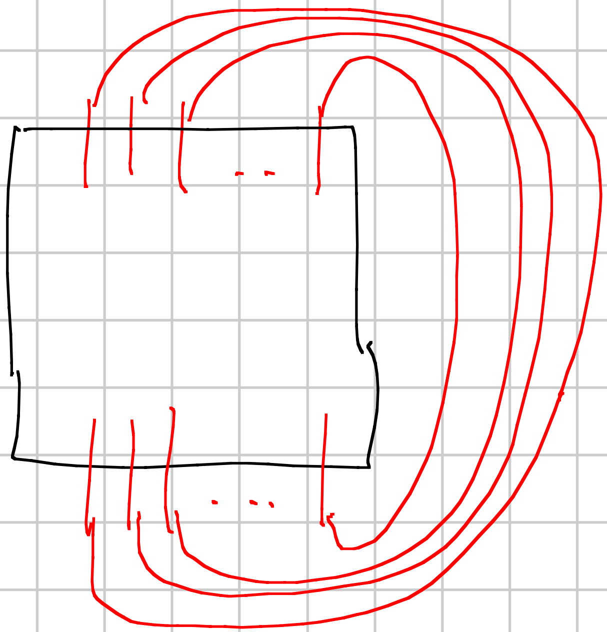


$$\sigma_{j+1}^{-1} \cdot \sigma_j \cdot \sigma_{j+1} \overset{?}{=} \sigma_j \, \sigma_{j+1} \cdot \sigma_j^{-1}$$

equivale a $\sigma_j \, \sigma_{j+1} \, \sigma_j = \sigma_{j+1} \, \sigma_j \, \sigma_{j+1}$

(fondamentale : le relaz. ī conseguenza ....) . ∎

$b \in B_n$ chiamo chiusura di b il link $\hat{b}$



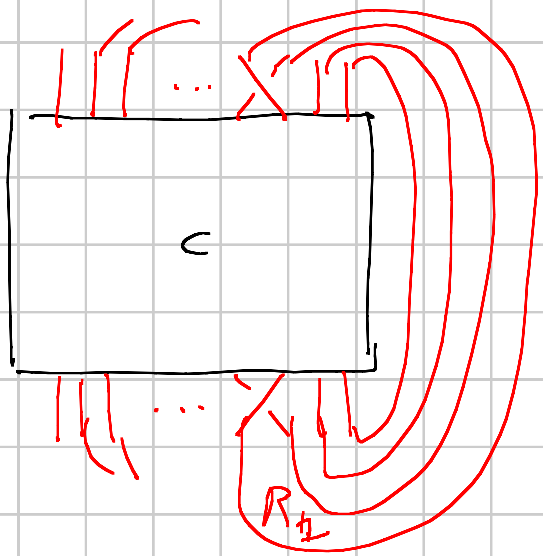
<u>Teo</u> (Alexander): ogni link è chiusura di qualche treccia

$(\forall L \ \exists n \ \exists b \in B_n$ t.c. $\hat{b} = L)$.

<u>Teo</u> (Markov): $b \in B_n$, $b' \in B_{n'}$, $\hat{b} = \hat{b'}$

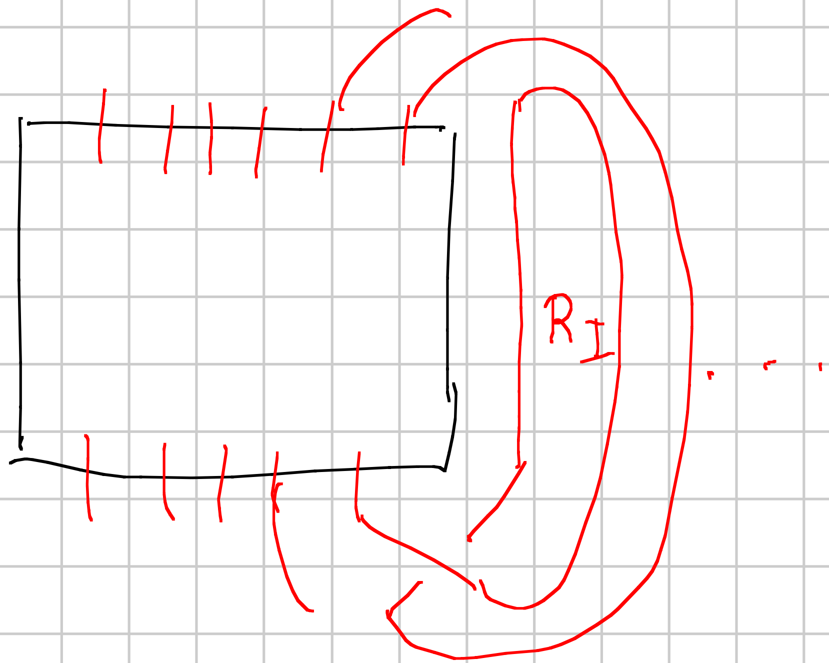
$\Rightarrow$ b e b' sono legati da successione di mosse (e loro inverse)

- $c \in B_m \rightsquigarrow w^{-1} \cdot c \cdot w \in B_m$, $w \in B_m$



- $c \in B_n \rightsquigarrow c \cdot \sigma_n \in B_{n+1}$

(stabilizzazione)


R I