Teoria dei nodi 26/10/16

Giov 10/11 probabilmente no lezione

Teo: se p, q coprimi $\geq 2 \Rightarrow K_{p,q}$ determina $\{p, q\}$

$$\pi_1(S^3 \setminus K_{p,q}) = \langle u, v \mid u^p = v^q \rangle =: G_{p,q}$$

Visto: $$G_{p,q} / Z(G_{p,q}) = \mathbb{Z}/_p * \mathbb{Z}/_q .$$

Oss: $$H(\mathbb{Z}/_p * \mathbb{Z}/_q) = \mathbb{Z}/_p \times \mathbb{Z}/_q = \mathbb{Z}/_{p \cdot q}$$

Prop: $\mathbb{Z}/p * \mathbb{Z}/q$ determina $\{p,q\}$. ($p,q \geq 2$ coprimi)

Dim: sia $\mathbb{Z}/p = \langle a_p : a_p^p = 1 \rangle$.

Oss: ogni el di $\mathbb{Z}/p * \mathbb{Z}/q$ si scrive in modo unico come 1,

o $a_p^{n_1} a_q^{m_1} \cdots a_p^{n_k} a_q^{m_k}$, $a_q^{m_0} a_p^{n_1} \cdots a_p^{n_k}$,

$a_q^{m_0} \cdots a_q^{m_k}$

$\Rightarrow$ gli unici elementi di ordine finito (esercizio) sono potenze di a_p e a_q.

Se $\phi : \mathbb{Z}/p * \mathbb{Z}/q \to \mathbb{Z}/r * \mathbb{Z}/s$ isomorfismo

$\phi(a_p) =$ pot. di a_r o a_s

$\phi(a_q) =$ pot di a_r o a_s

$\Longrightarrow \ldots \quad \{p, q\} = \{r, s\}$. $\boxtimes$

Def: chiamo $M^{(m)} \subset \mathbb{R}^N$ sottovar. PL è localmente piatta se $(\mathbb{R}^N, M) \underset{\text{PL}}{\overset{\text{loc.}}{\cong}} (\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^m \times \{0\})$.

Oss: se $M^{(2)} \subset \mathbb{R}^4$ è loc. piatta, $p \in M$

$M \cap \partial N(p)$ è nodo banale in S^3.
$$\begin{array}{c} \partial N(p) \\ \cong \\ S^3 \end{array}$$

Oss: se K nodo non banale in S^3,

M = cono con vertice $0 \in D^4$ e base K

è disco PL $\subset D^4$ ma non loc piatto in 0

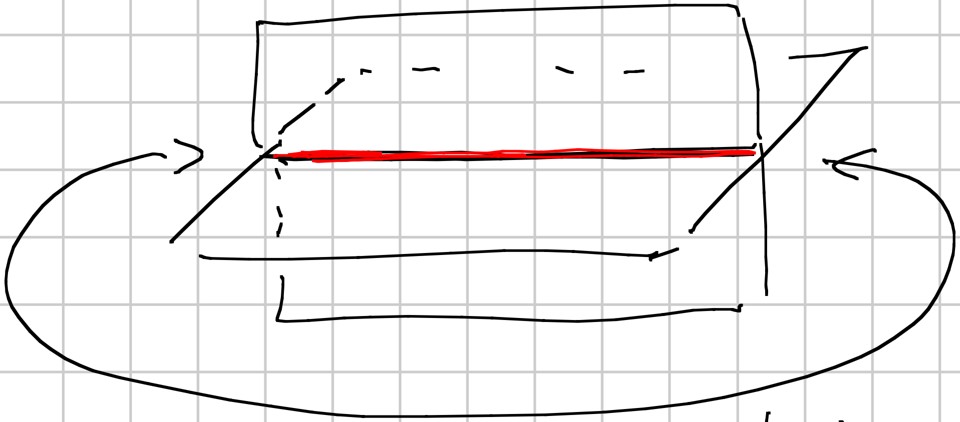
infatti $(\partial N(0), M \cap \partial N(0)) \cong (S^3, K)$

Def: chiamo K nodo slice se $K = \partial \Delta$
$\Delta \subset D^4$ disco loc. piatto propriamente embedded

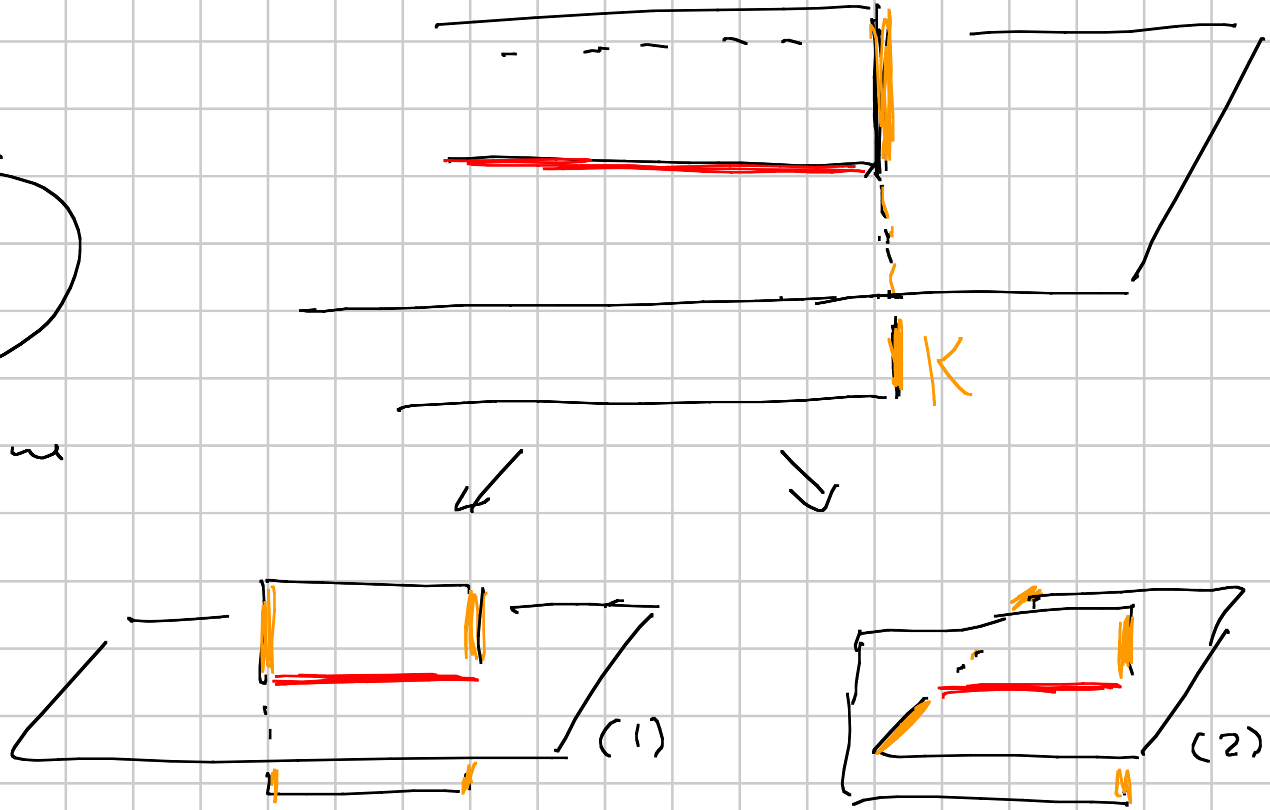
Oss: equivalentemente $K \subset S^3$ slice se
$K = \Sigma \pitchfork S^3$ dove $\Sigma \subset S^4$, $\Sigma \cong S^2$ loc. piatta
S^3 = equatore di S^4.

Oss: se $\Sigma \subset S^3$ è $\underbrace{\text{superficie}}_{\text{con bordo}}$ immersa con $\partial\Sigma = K$
nodo o link, le singolarità di Σ sono di

questi tipi:



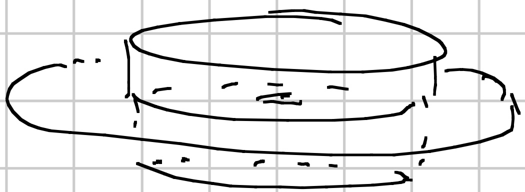
incollamento con rotazione
(0)



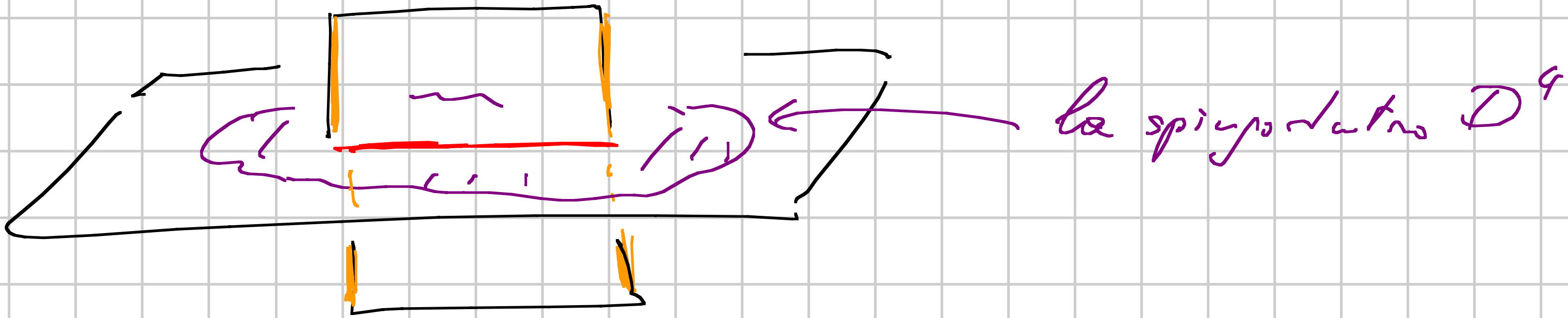
Def: nodo K è ribbon se $K = \partial\Delta$, Δ disco $\subset S^3$ embedded con autointersezioni solo (0) e (1)

Oss: ribbon $\Rightarrow$ slice. Infatti elimino le singolarità (0) e (1) spingendo parte di Δ dentro D^4:

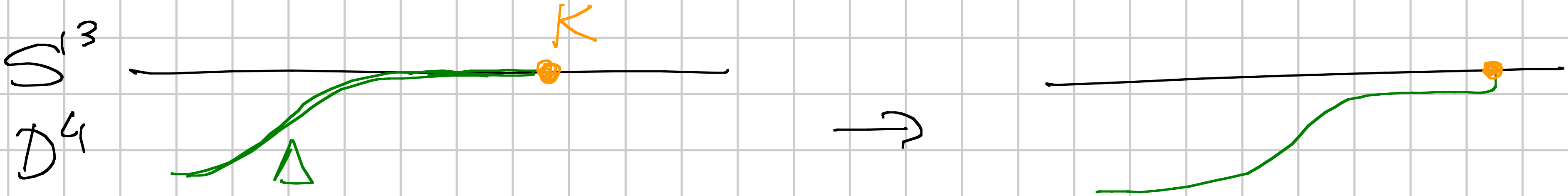
(0) punto $\gamma \cong S^1$ di autointersez innermost $\Rightarrow$ bordo disco che incide 1 solo volta su γ

$\Rightarrow$  $\Rightarrow$ spingo dentro uno dei due

(1)

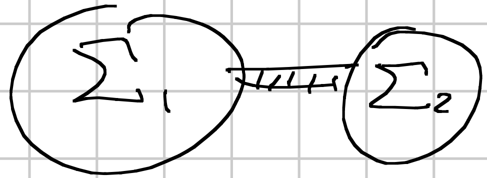


Ho ottenuto $\Delta \subset D^4$ embedded con $\partial \Delta = K$ ma



Prop: $g(K_1 \# K_2) \geq g(K_1) + g(K_2)$.

Dim: basta provare che se Σ è una sup di Seifert di g min per $K_1 \# K_2$ allora è



con Σ_j Seifert per K_j.

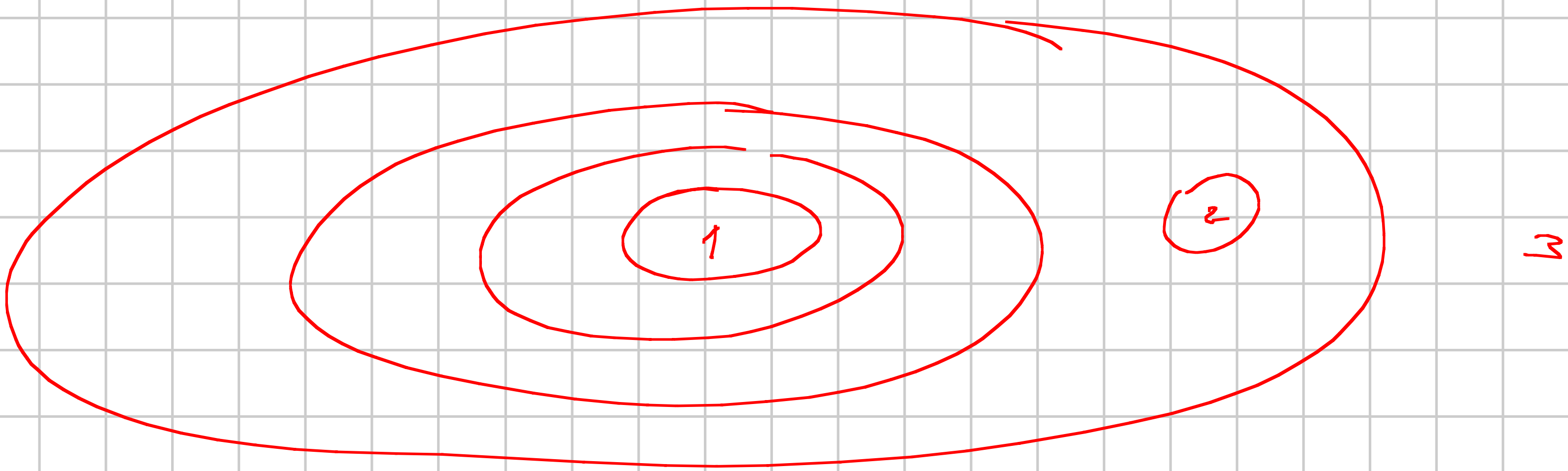
Sia $S \cong S^2$ t.c. $S \pitchfork K = 2$ pti $\quad (K = K_1 \# K_2)$

K_j = chiusura con arco nel bordo di $K \cap D_j$, $S = \partial D_1 = \partial D_2$

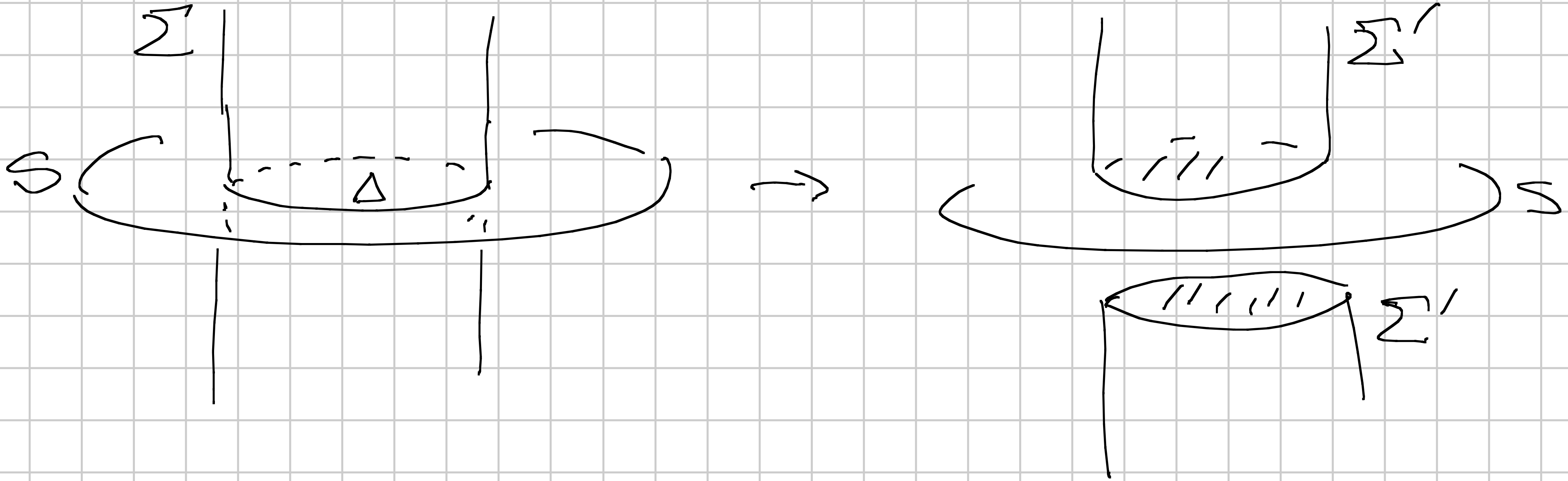
Posso supporre $S \pitchfork \Sigma_i$. Poiché $S \cap \partial \Sigma_i = 2$ pti
ho $S \cap \Sigma_i = 1$ segmento $+$ circonferenze.

Basta provare che senza cambiare $g(\Sigma_i)$ posso
eliminare le circonferenze (il segmento separa poi Σ_i
nelle Σ_1 e Σ_2 desiderate).

Noto che ci sono almeno due dischi innermost:



$\Rightarrow$ posso scegliere un disco innermost che non contiene il segmento $\Rightarrow$ è disgiunto da K.



poiché $\Delta \cap K = \emptyset$ ho Σ' è Seifert per K. Casi:

1) Σ' connessa $\Rightarrow g(\Sigma') = g(\Sigma) - 1$. No

2) $\Sigma' = \Sigma'' \sqcup \Sigma'''$ con genere positivo

$\partial \Sigma'' = K$, Σ''' chiusa

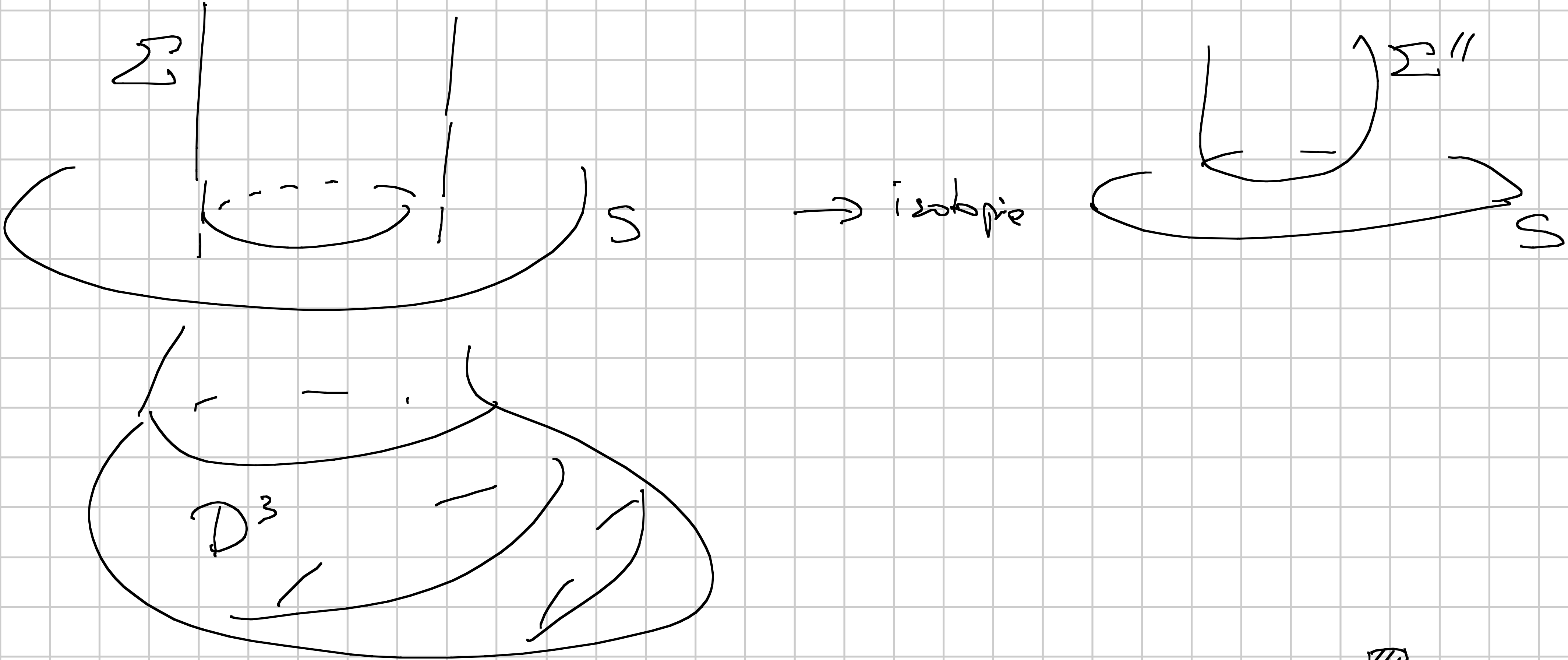
$\Longrightarrow \Sigma''$ Seifert , $g(\Sigma'') = g(\Sigma) - g(\Sigma''') < g(\Sigma)$ No

3) $\Sigma' = \Sigma'' \sqcup \Sigma'''$ con $\Sigma''' \cong S^2$

$\Longrightarrow$ procedo con Σ''

(Osservo: Σ'' isotopa rel-K a Σ poiché

$\Sigma''' = \partial D_1 = \partial D_2$, uno dei quali non contiene K :

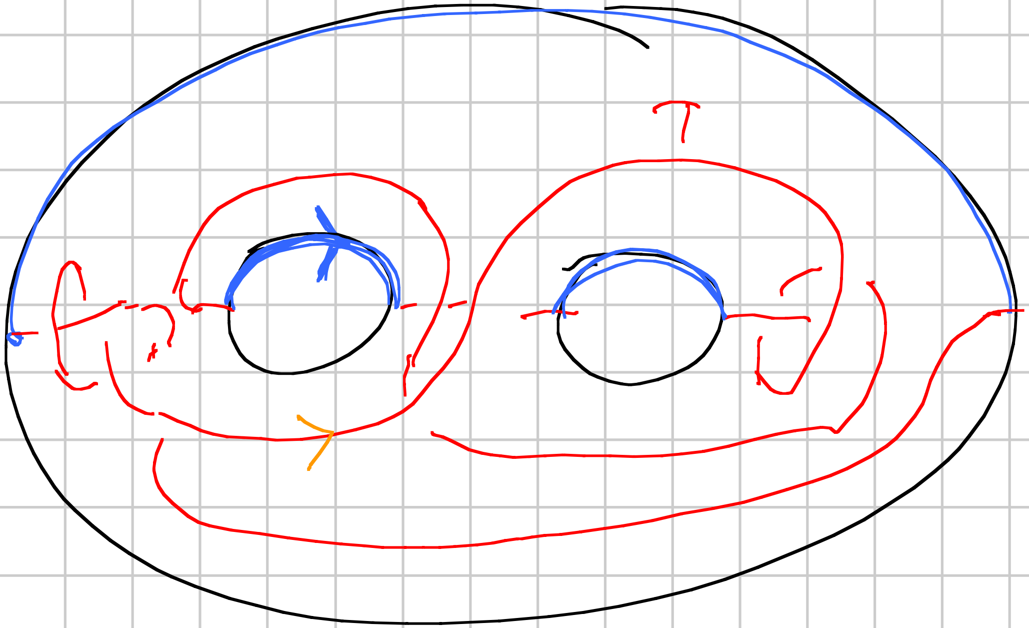

Σ
S
D³
isotopie
Σ''
S

Decomposizione in primi. (Nodi orientati)

Oss: $K_1 \# K_2 = K_2 \# K_1$; $K \# \bigcirc = K$

Def: sia M una palla con buchi $(D^3_0 \setminus (D^3_1 \sqcup \dots \sqcup D^3_k)) \subset S^3$
e sia $T \subset M$ una unione di archi propriamente embedded
t.c. $\partial T \cap \partial D^3_j = 2$ pti ; diciamo che T determina
un nodo K se K è ottenuto unendo i due pti

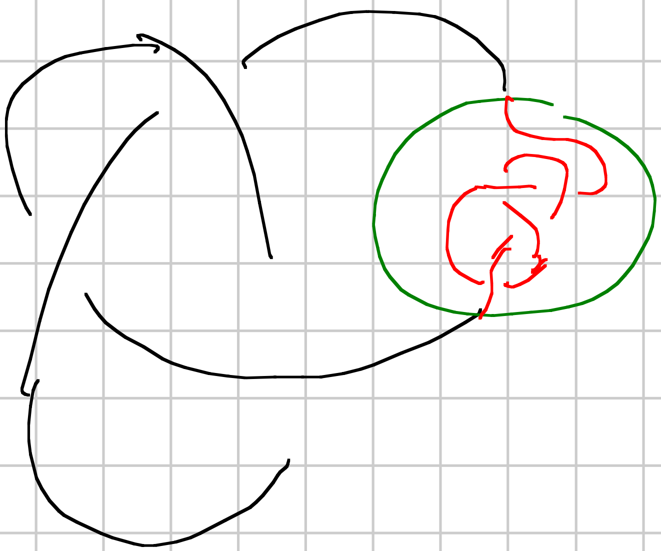
di ∂T su ogni ∂D_j :



Oss: è ben def

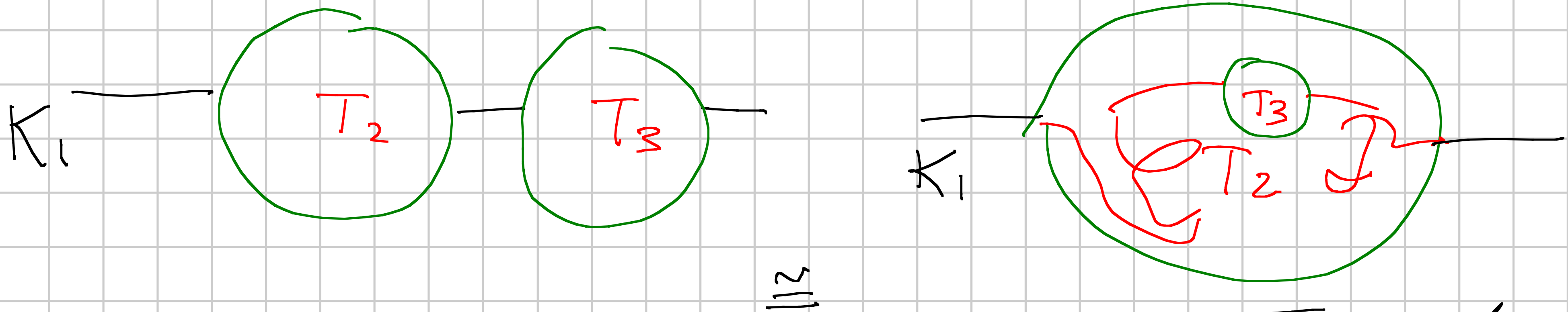
Oss: per ogni K c'è un (D^3, T) che lo determina

Oss: $K_1 \# K_2$ si può realizzare rimuovendo da K_1 una coppia $(D^3, T$ banale$)$ e sostituendola con (D^3, T) che determina K_2:



<u>Con</u>: # associativa:

$$(K_1 \# K_2) \# K_3 \overset{?}{=} K_1 \# (K_2 \# K_3)$$



da qui T_3 scivola fuori nel pos a sx.

Cor: $K_1 \# \dots \# K_n$ è ben definita e indip dall'ordine.

Def: diciamo che K è composto se $K = K_1 \# K_2$

con K_1, K_2 non banali. K primo se è non banale e non composto.

<u>Oss</u>: $K_1 \# K_2 = \bigcirc \Longrightarrow K_1 = K_2 = \bigcirc$

(o via genere oppure ricordando che $K_1 \# K_2$ è satellite di entrambi ma $\bigcirc$ è satellite solo di $\bigcirc$.)

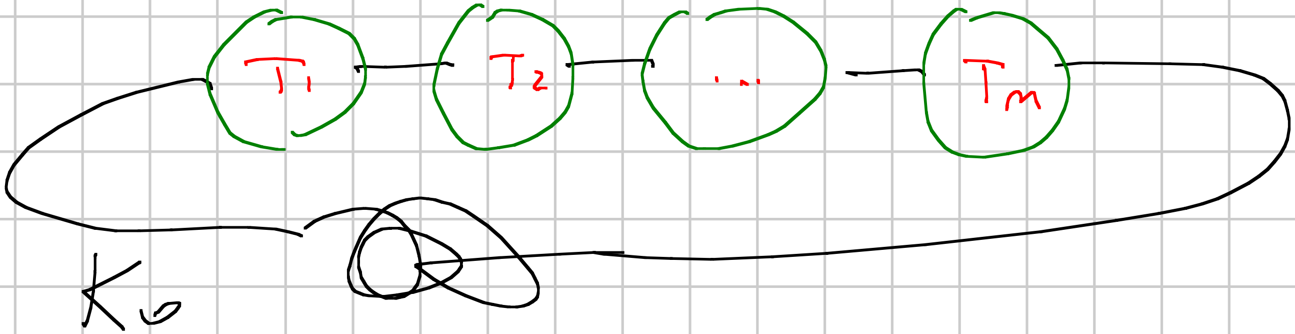
<u>Oss</u>: $K_1 \# K_2 = K_2 \Longrightarrow K_1 = \bigcirc$ (via genere).

Teo: ogni nodo non banale si esprime in modo unico come somma connessa di primi.

Dim: esistenza: ovvio via genere. Unicità: notiamo che una decomposizione di K in $K_0 \# \ldots \# K_m$ è sempre realizzata da una famiglia $\mathcal{J} = \{ S_1 \cup \ldots \cup S_m \}$ di sfere disgiunte t.c. K_j è il nodo determinato da $(C_j, C_j \cap K)$ dove $C_0, \ldots, C_m$

sono le componenti di $S^3 \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_m)$.

Ad es:

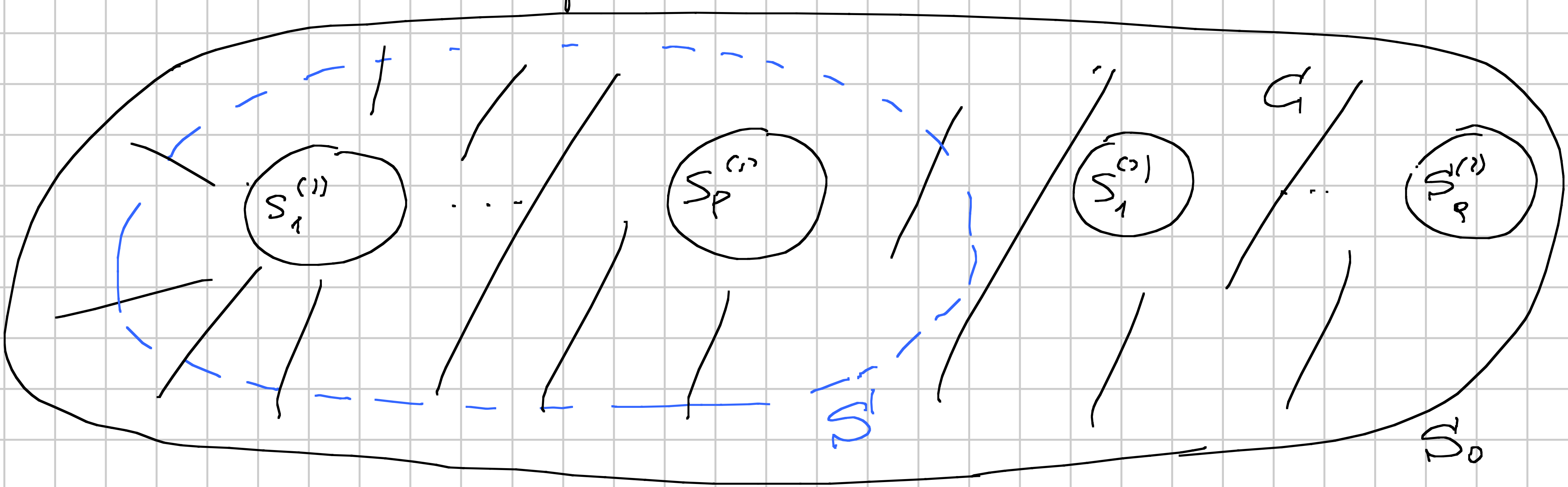


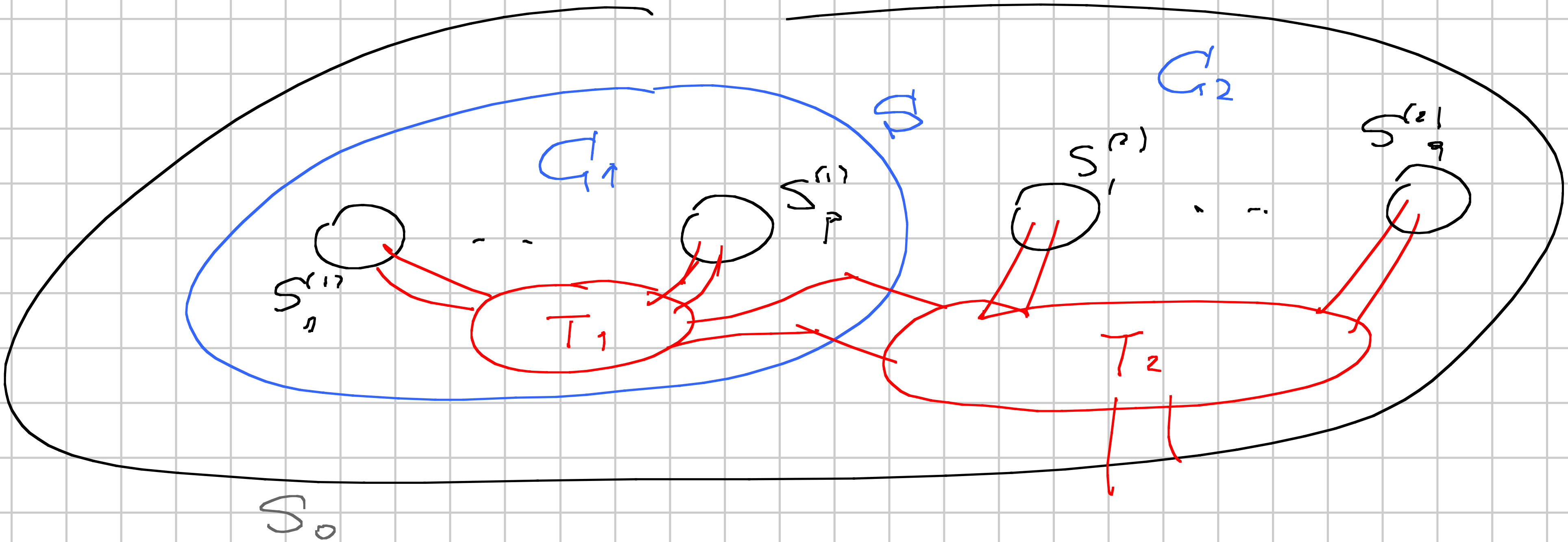
oppure

Lem: sia $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$ un sistema di sfere che realizza $K = K_0 \# \dots \# \underbrace{K_n}_{\text{primi}}$; sia $S \subset S^3$ disgiunta da $\mathcal{S}$ che incontra K in 2 pti; allora è possibile sostituire una delle S_j con S senza modificare $K_0 \# \dots \# K_n$.

Dim: sia C_i la componente di $S^3 \setminus (S_1 \cup \dots \cup S_m)$ che contiene S; C è palla con buchi (se ha 0 buchi ho già $S \parallel \partial C_i$ e non ho nulla da fare).

Stesso se S' non separa i buchi.

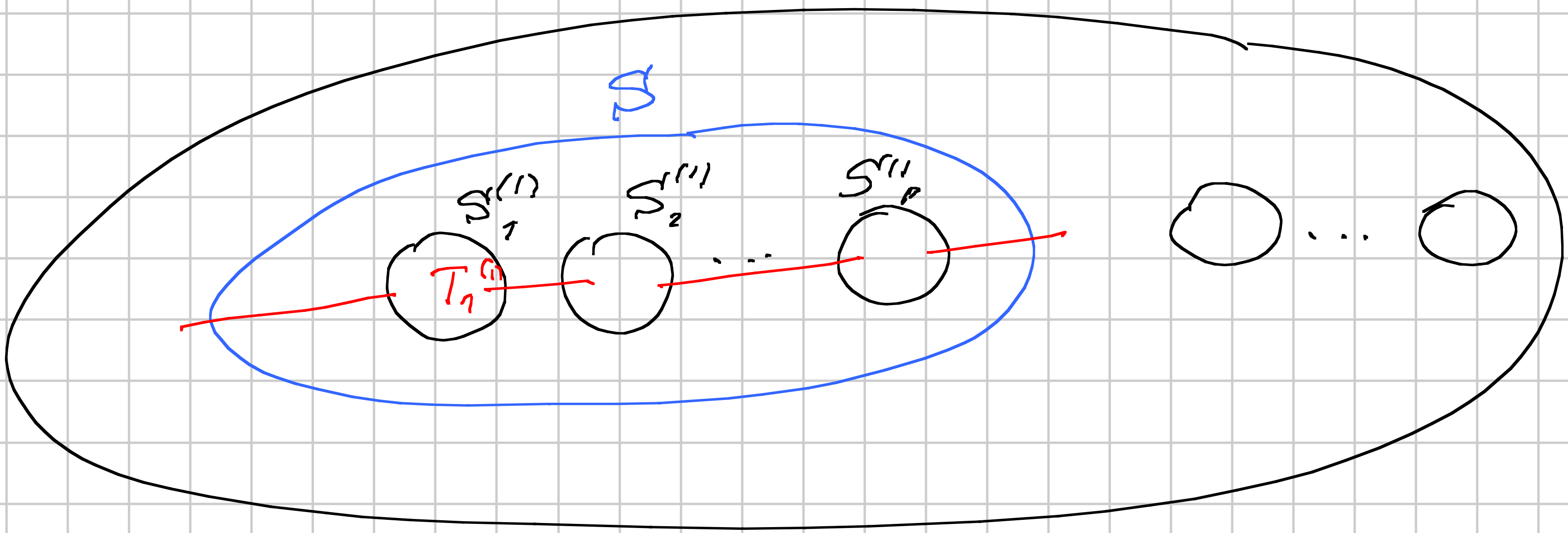




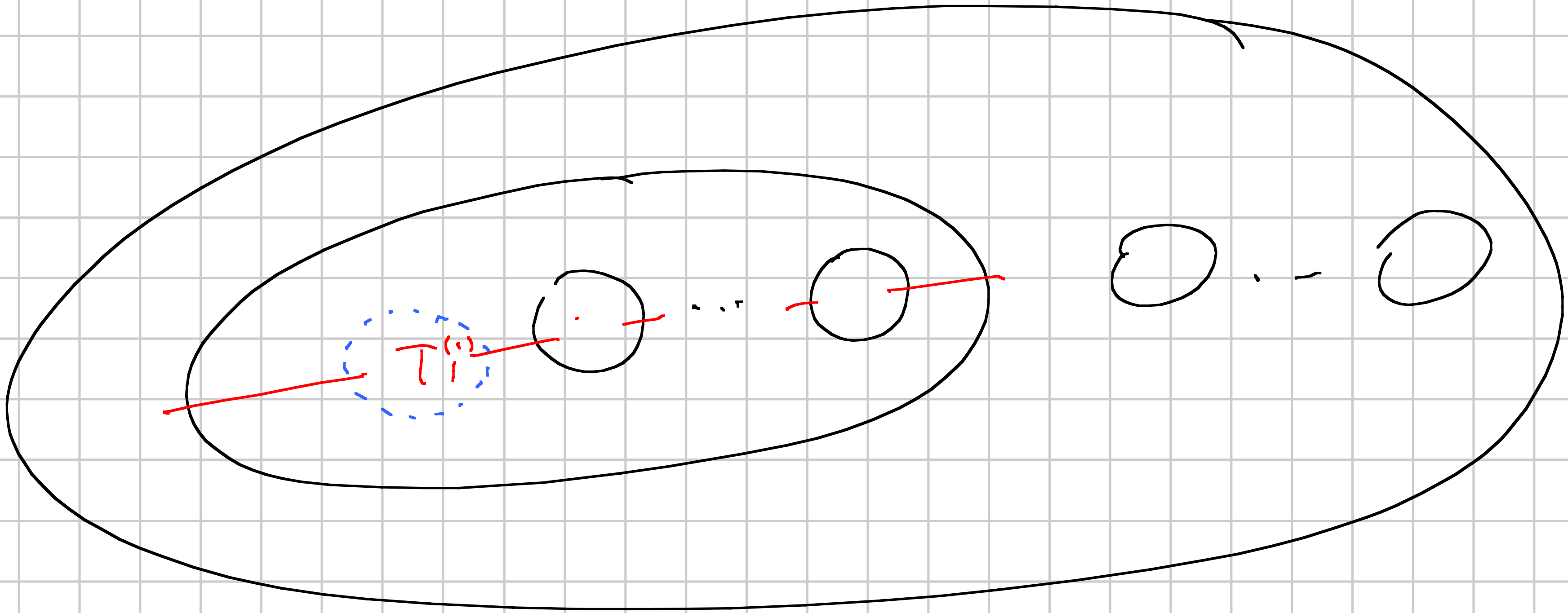
Il nodo denotato da $(C, K \cap C')$ è primo
ma è in modo naturale la # dei nodi

determinati da $(C_1, K\cap C_1)$ e da $(C_2, K\cap C_2)$

$\Longrightarrow$ uno dei due è banale; sia vero per C_1:



sostituendo $\Sigma_1^{(1)}$ con Σ'

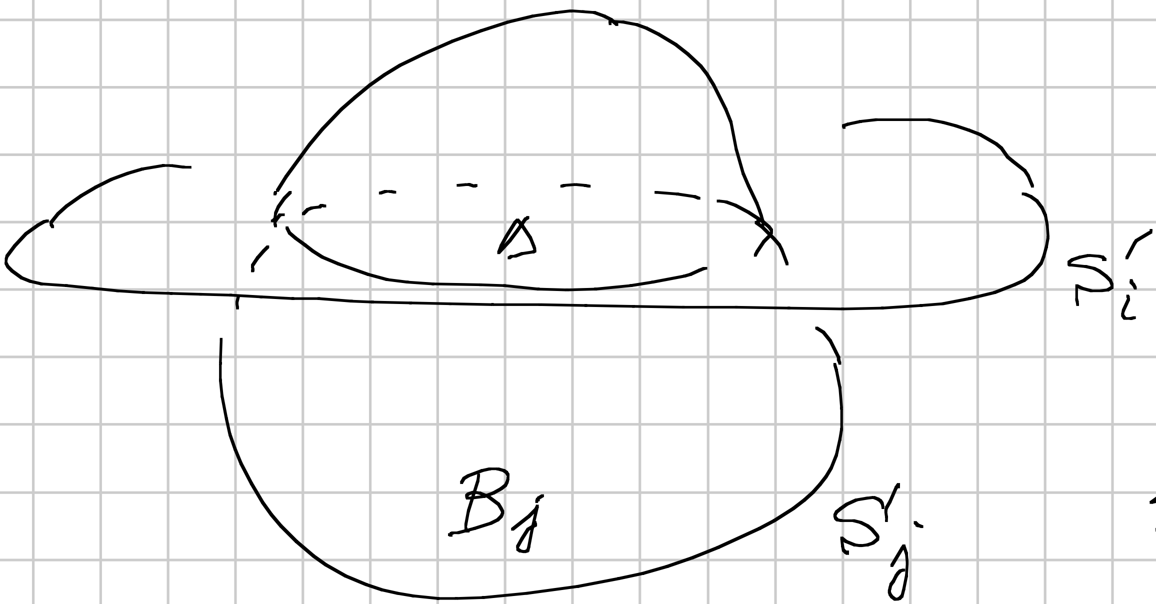


dà lo stesso splitting $K_0 \# \dots \# K_n$. $\boxtimes$

Conclusione: siano $\mathcal{S} = \{S_1, \dots, S_m\}$, $\mathcal{S}' = \{S'_1, \dots S'_{m'}\}$ sistemi che danno decomposizioni di K in # primi.

Se esiste S'_i che non incontra $\mathcal{S}$, posso sostituire una componente di $\mathcal{S}$ con S'_i. Procedo finché non ho che ogni compo di $\mathcal{S}'$ interseca $\mathcal{S}$ e viceversa.
Se alla fine $\mathcal{S}' = \mathcal{S}$ ok. Altrimenti sia $S'_i \notin \mathcal{S}$, suppongo $S'_i \pitchfork \mathcal{S}$. Prendo $\Delta \subset S'_i$ disco innermost

per $S_i' \pitchfork \mathcal{S}$, sia $\Delta = S_i' \pitchfork S_j$; chiamo B_j la palla bordata da S_j che contiene Δ;



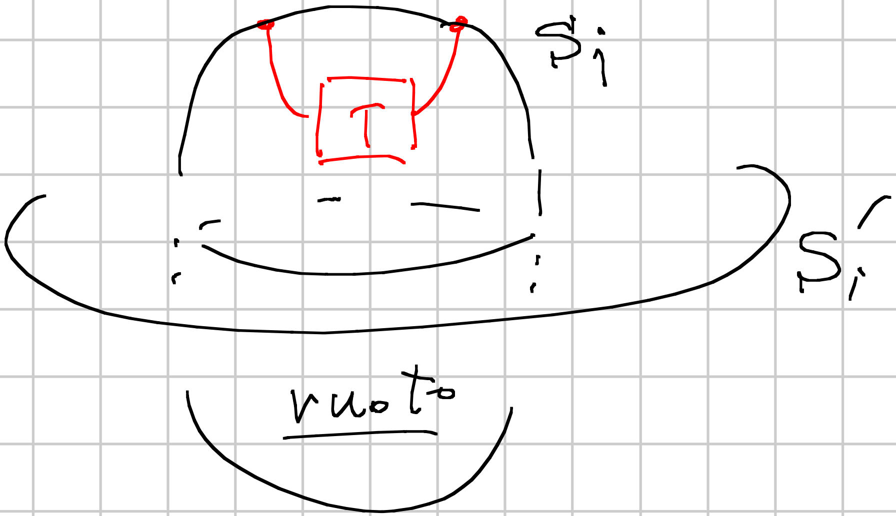
noto che B_j non contiene alcuna altra $S_k \in \mathcal{S}_i$

infatti se $S_k \subset B_j$ avrei

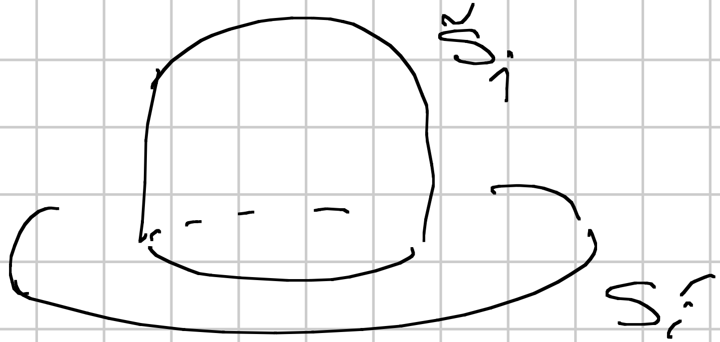
$S_k \cap S_i'$
- $\to$ vuoto dentro B_j perché $S_i' \cap B_j = \Delta$ ma $\Delta \cap S_k = \emptyset$
- $\to$ vuoto fuori da B_j poiché $S_k \subset B_j$

impossibile

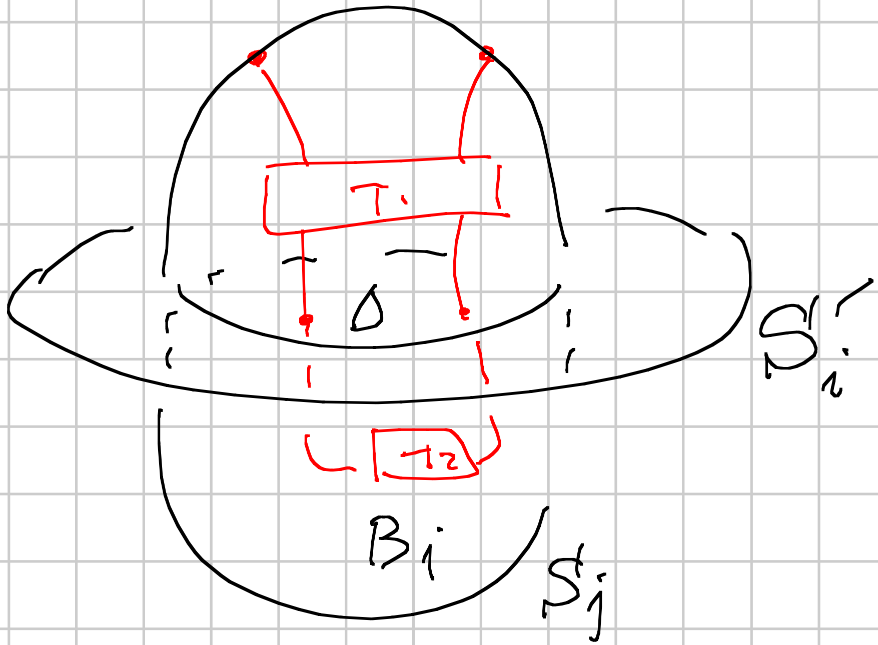
Casi possibili e corrispondenti operazioni:



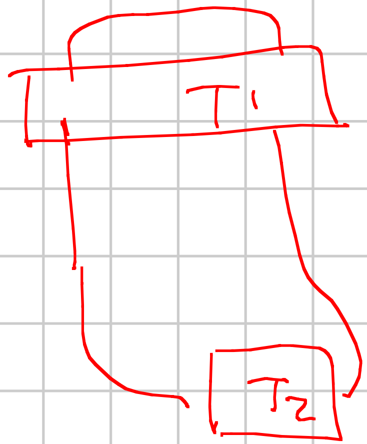
$\rightsquigarrow$



isotopia di J nel K

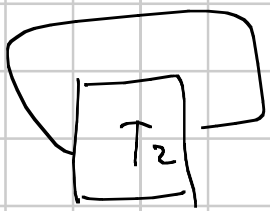


ma: il nodo determinato da B_j, $K \cap B_j$ è primo

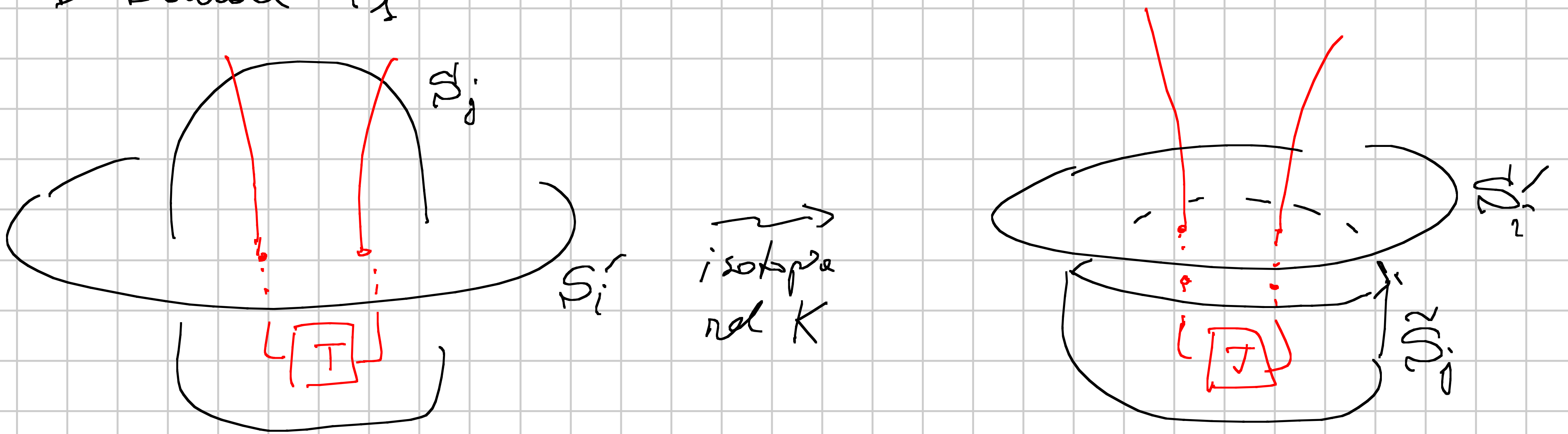


$\Longrightarrow$

banali

però  non può essere banale perché è uno dei nodi determinato da S'

$\Rightarrow$ banale T_1



(ultimi due casi domani + conclusione) –