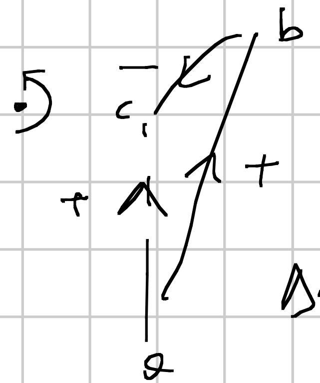
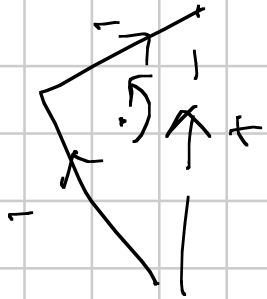
Teoria dei Nodi 23/11/16

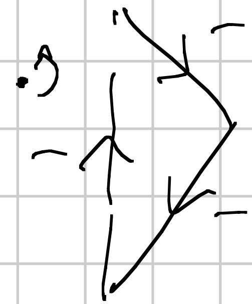
Eliminaz. di max isolati del tipo

$$L \xrightarrow{\varepsilon} L'' \xrightarrow{\zeta} L'$$

ε :

1)  $\Delta h = +1$

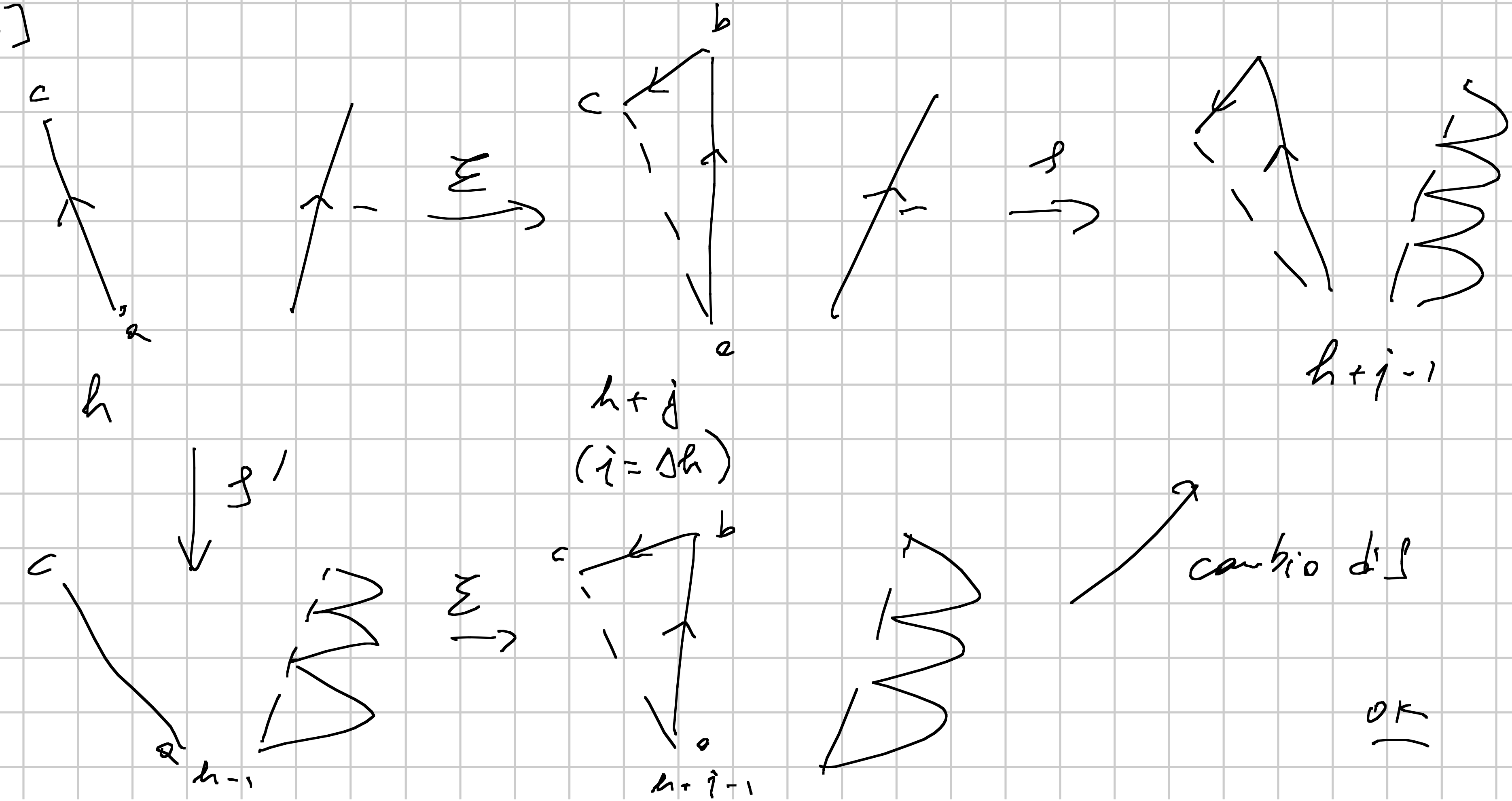
2)  $\Delta h = +2$

3)  $\Delta h = +1$

La ζ si applica a un lato sup. di L'': se non è né $[a,b]$ né $[b,c]$ esiste un'altra ζ' su tale lato che evita

[a, b, c]

orig:



cambio di ∫

OK

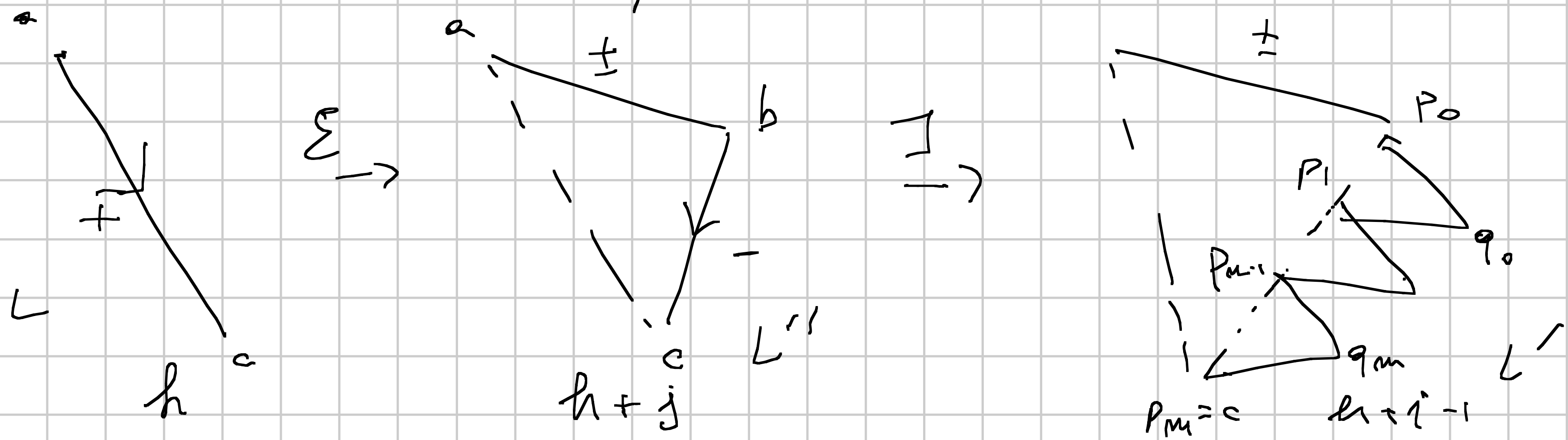
Supponiamo invece che J sia lungo $[b,c]$

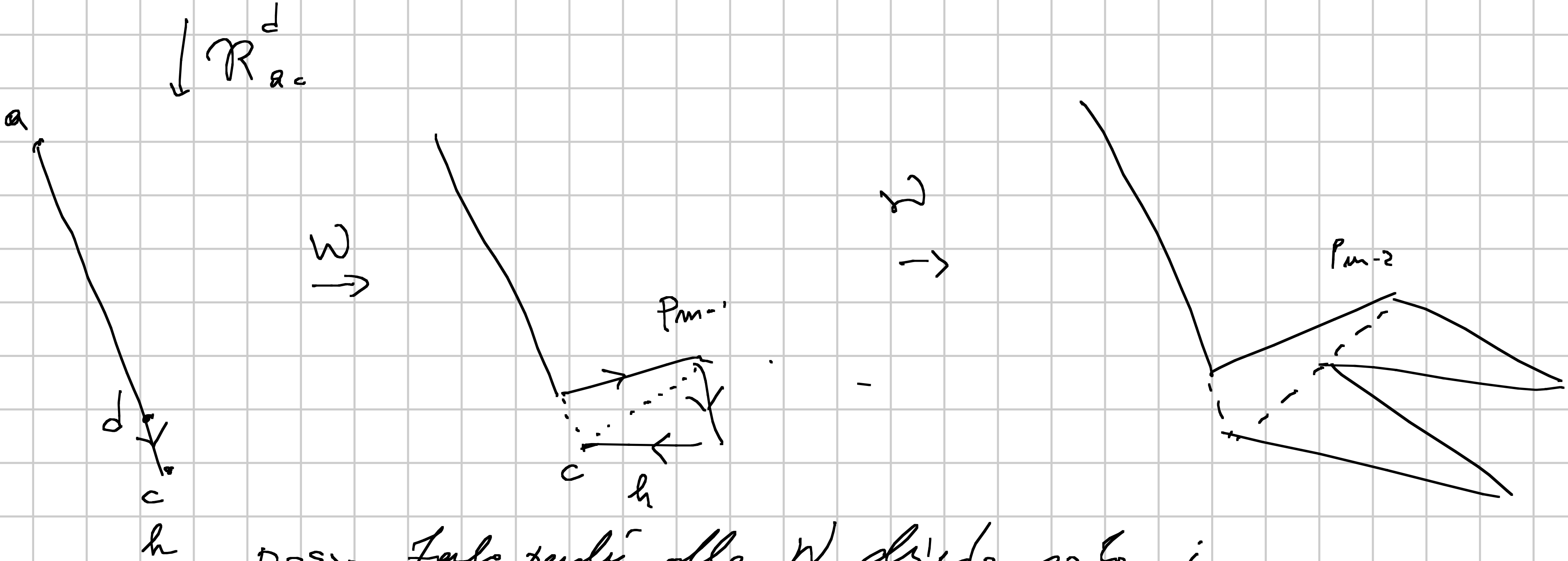
Caso I: $ac > 0$ ($\mathcal{E}$ di tipo 1 o 2):

$J = \left\{ \begin{smallmatrix} q_1 \cdots q_m \\ p_0 \cdots p_m \end{smallmatrix} \right.$. Prendo $d \in (a,c)$ molto vicino a c

dunque $dp_i > 0$ $i = 0 \dots m$

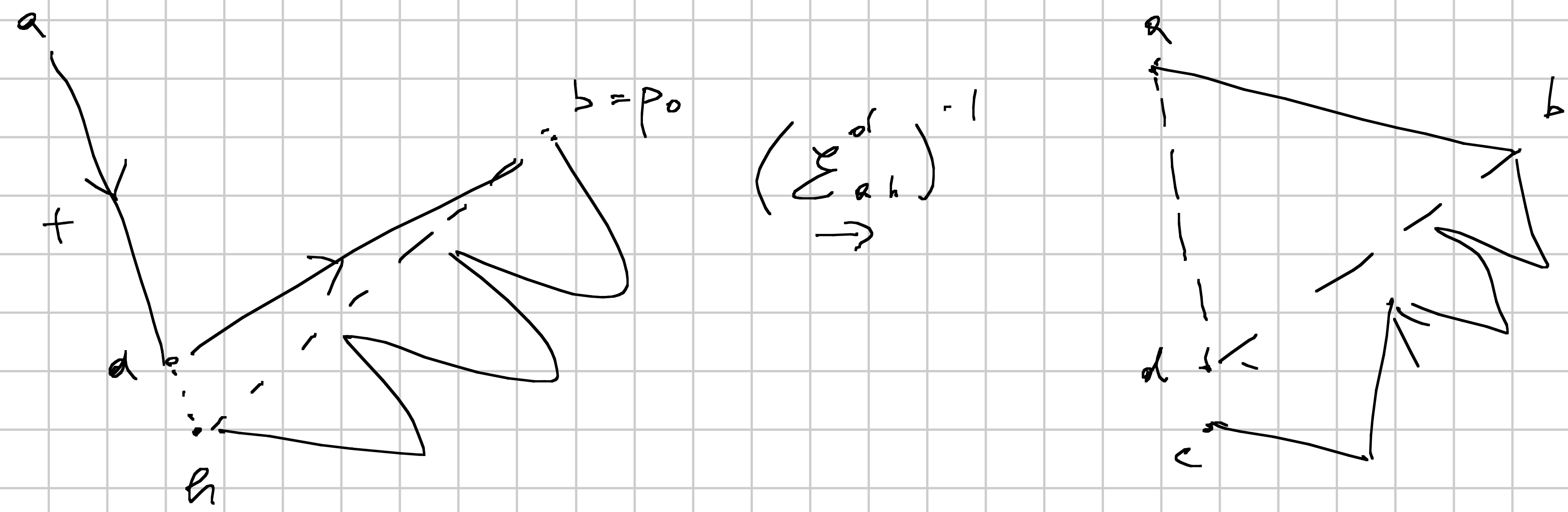
Orig:





posso farlo perché alle W dico solo i triangoli vuoti e non tutto il tetraedro

. . .



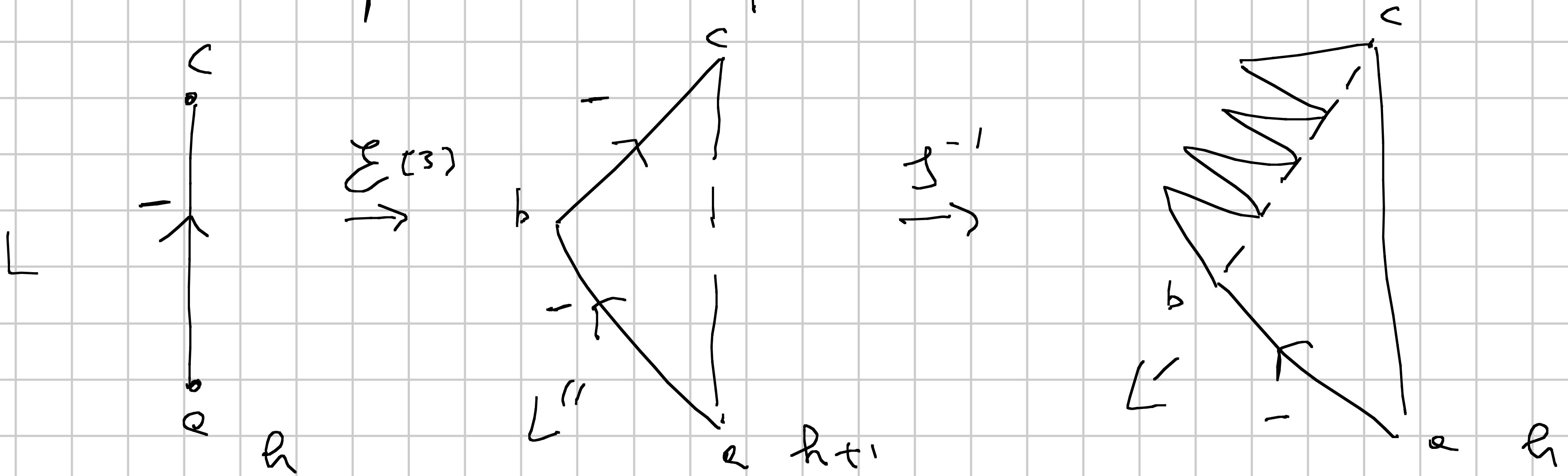
Caso II: $ac < 0$.

Lemma di esistenza delle J: posso costruire un'altra J

su $[b,c]$ il cui inviluppo convesso di tutto evita $(a,c]$.

Due sawtooth nello stesso lato sono collegate in orizzontale

$\Rightarrow$ basta provare che posso sostituire



con una ad altezza $\leq h$ per tale f —

$C_1 = \mathrm{Conv}(p_0, \dots, p_m, q_1, \dots, q_m)$ $\quad f^{q_1 \dots q_m}_{p_0 \dots p_m}$ su $[b, c]$

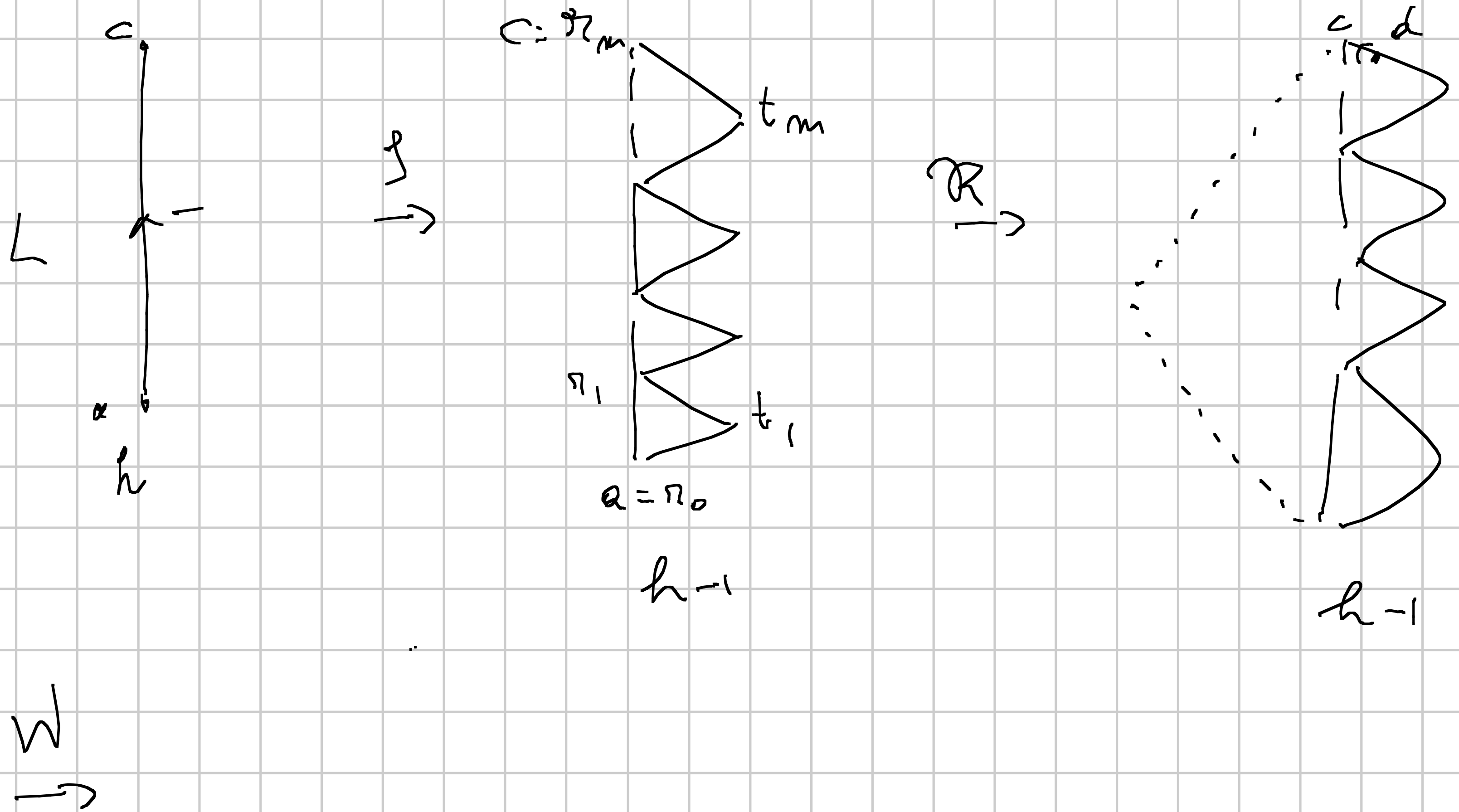
sto supponendo che $C_1 \cap [a, c] = \{c\}$.

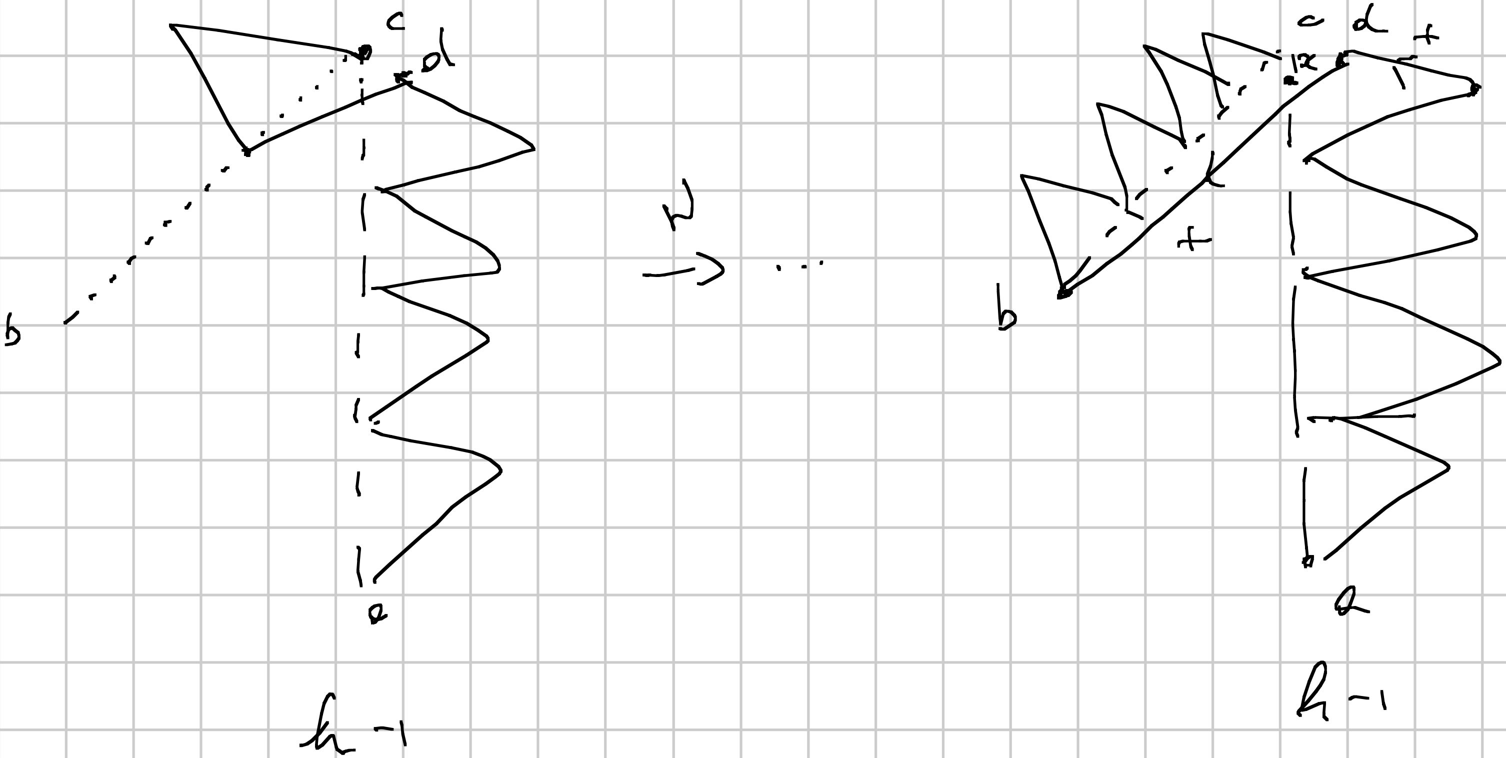
Prendo una sawtooth $\quad f^{t_1 \dots t_m}_{\pi_0 \dots \pi_m}$ su $[a, c]$ che evita C_1.

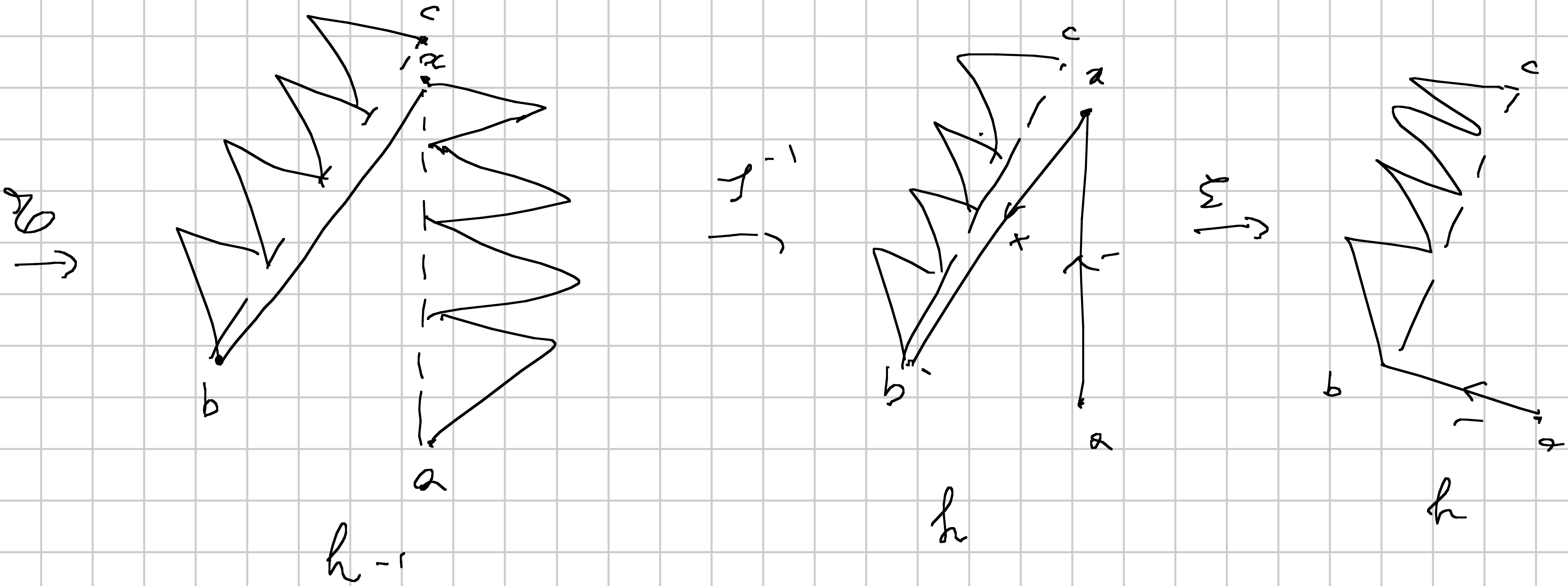
Prendo $d \in [t_m, \pi_m]$ molto vicino a $c = \pi_m$

dunque $dp_i > 0 \quad i = 0 \dots m-1$.

Poi prendo $x \in [\pi_{m-1}, c]$ molto vicino a c e ho:


c
L
a
h
f
c = r_m
t_m
r_1
t_1
a = r_0
h-1
R
c
d
h-1
W


c
d
b
a
h−1
w
c d +
+
b
a
h−1



c
b
a
h -1
c
a
b
a
h
Σ
c
b
a
h

∎

Invarianti: determinante + quantistici

Lem: in un diagramma di link

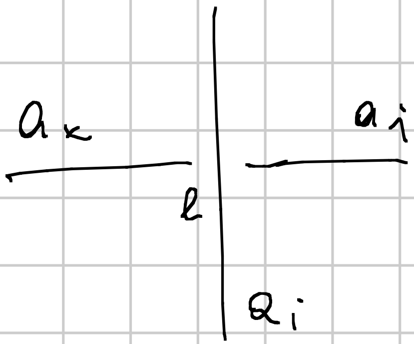
$$\# \text{ overarc } \neq S^1 = \# \text{ incroci}$$

Ricordo: $\mathbb{Z}/p$ colorazioni di un diagramma

$$2a_i \equiv a_j + a_k \ (p)$$

Dato D diagramma con archi $a_1 \dots a_n$

chiamo M_D la matrice del sistema lineare in $\mathbb{Z}$



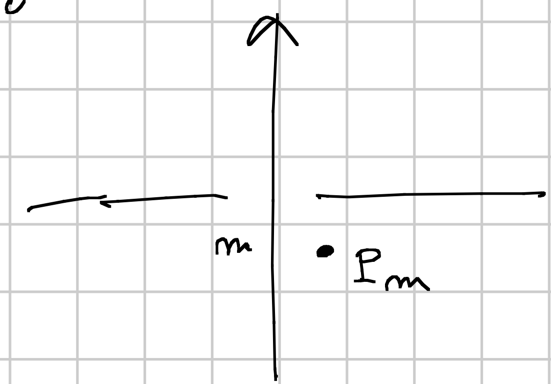
$\rightsquigarrow \quad 2x_i - x_j - x_k = 0$ l-esima equazione

<u>Oss</u>: la somma delle colonne di M_D fa 0

ogni riga è $(\; 0 \; \dots \; -1 \; \dots \; 2 \; \dots \; -1 \; \dots \; 0 \;)$

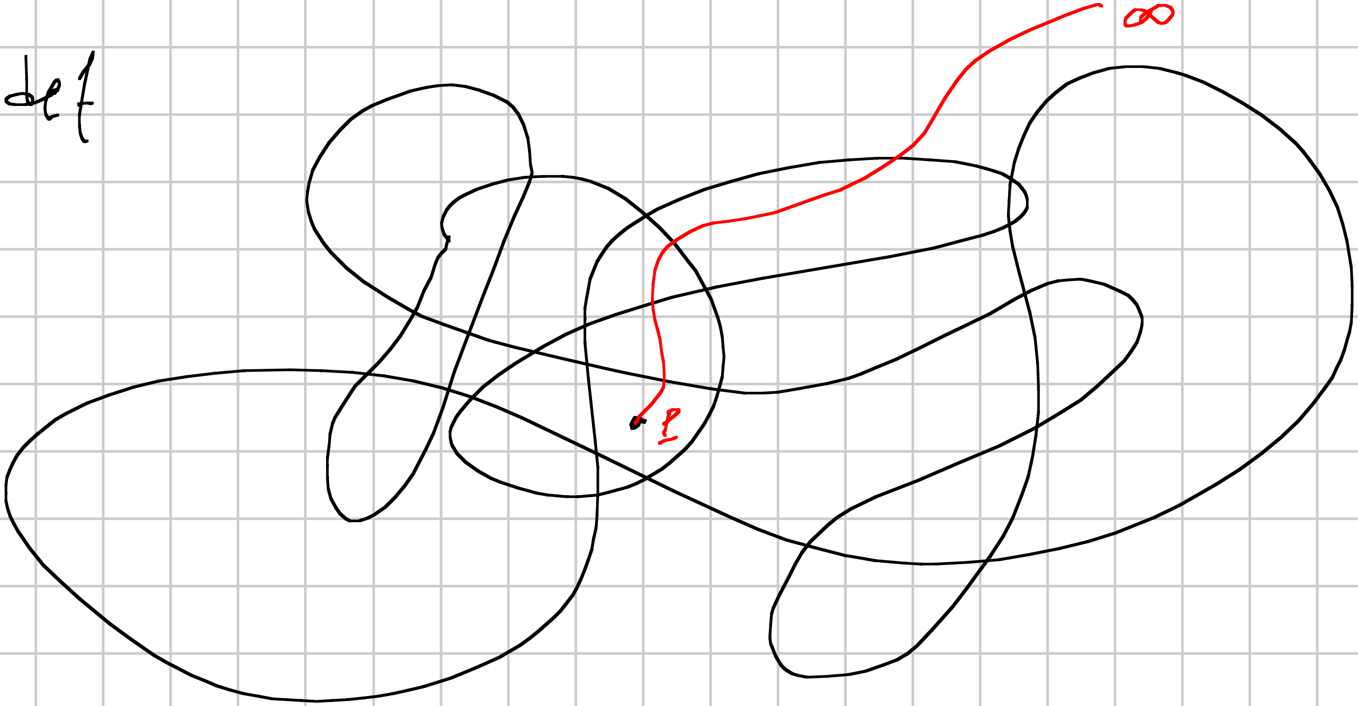
Prop: esiste una comb. lin. delle righe con coeff. ± 1 che fa 0

Dim: oriento D in modo arbitrario, scelgo vicino al n-esimo incrocio il punto



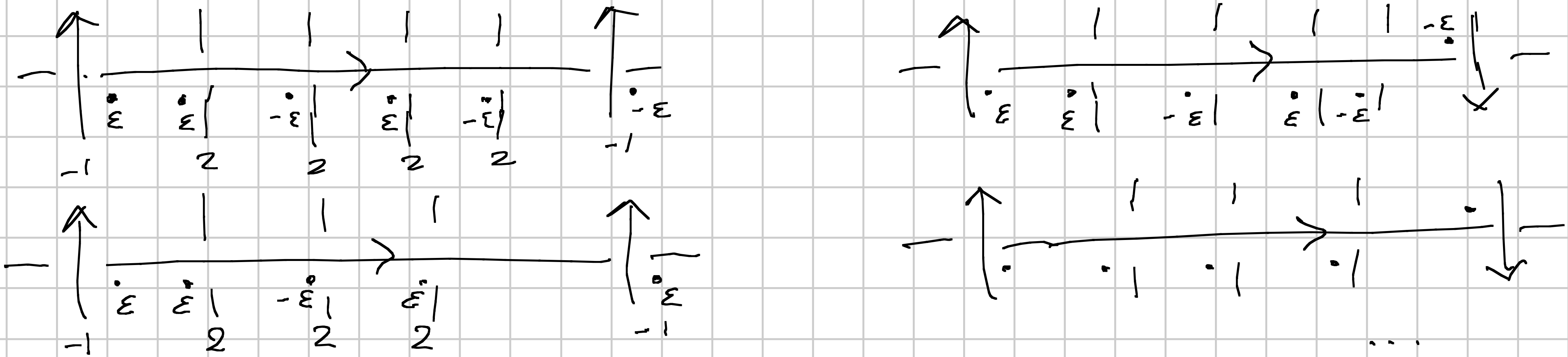
$\varepsilon_n = (-1)^{\wedge}$ # incroci trasversali tra D e un arco che unisce P_n a ∞ in $\mathbb{R}^2$

Ein ben def



Affermo che $\sum_j \varepsilon_m \cdot m$-esima equaz $= 0$

Provo che ogni x_k ha coeff 0 in tale $\sum_j$: 8 casi



$+4$ in cui a_k ha l'altra orientazione $\square$

Cor: se N_D è una matrice ottenuta da M_D cancellando una riga o una colonna allora $|\det(N_D)|$ dipende solo da D

Thm: dipende solo da L.

Dim: invariante per le $R_{I}/R_{II}/R_{III}$:

R_I :

D $\qquad\qquad\qquad\qquad$ D'

$$\begin{cases} 2x_0 - x_0 - x_1 = 0 \\ e_j(x_0, x_1, \dots, x_n) = 0 \\ \qquad j = 1 \dots n \end{cases} \qquad\qquad \left\{ e_j(y_1, y_1, y_2, \dots, y_n) = 0 \right.$$

Sistemi equivalenti :

$$M_D = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \end{pmatrix} \xrightarrow{\mathrm{II}c \,\mapsto\, \mathrm{II}c + \mathrm{I}c} \begin{pmatrix} 1 & 0 \cdots \\ \vdots & M_{D'} \end{pmatrix}$$

R_{II} :

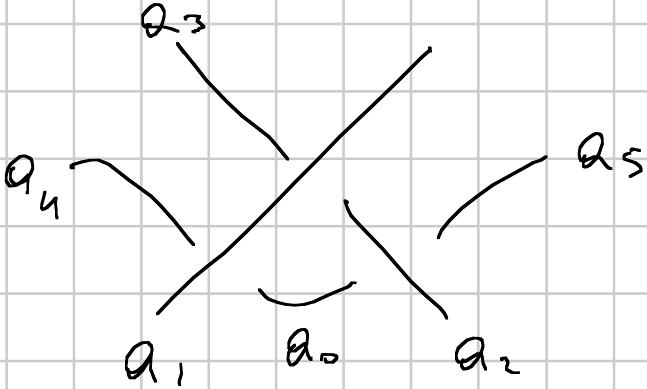
$$\begin{cases} 2x_1 - x_0 - x_2' = 0 \\ 2x_1 - x_0 - x_2'' = 0 \\ \ell_j(x_1, x_2', x_2'', \dots) = 0 \end{cases}$$

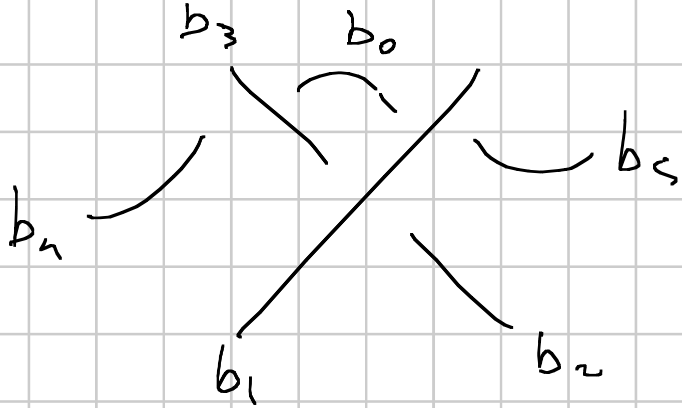
$$\{ e_j(y_1, y_2, y_2, \dots) = 0$$

$$\begin{cases} x_0 = 2x_1 - x_2' \\ x_2' = x_2'' \\ l_j(x_1, x_2', x_2'', \dots) = 0 \end{cases}$$

equiv.

RIII





$$\begin{cases} 2x_1 - x_0 - x_4 = 0 \quad \checkmark \\ 2x_2 - x_0 - x_5 = 0 \quad \checkmark \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ l_j(x_1, \dots \quad) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 2y_1 - y_2 - y_3 = 0 \\ 2y_1 - y_0 - y_5 = 0 \quad \checkmark \\ 2y_3 - y_0 - y_4 = 0 \quad \checkmark \\ l_j(y_1, \dots \quad) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 2x_1 - x_4 \\ 2x_1 - x_4 = 2x_2 - x_5 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ e_j(x_1 \dots \quad) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = 2y_1 - y_5 \\ 2y_1 - y_5 = 2y_3 - y_4 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 = 0 \\ e_j(y_1 \dots \quad) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} x_0 = 2x_1 - x_4 \\ 2x_1 - x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 - x_4 = x_2 - x_5 \\ e_j(\dots \quad) \end{cases}$$

$$\begin{cases} y_0 = 2y_1 - y_5 \\ 2y_1 - y_2 - y_3 = 0 \\ y_2 - y_5 = y_3 - y_4 \\ e_j(y \dots \quad) = 0 \end{cases}$$

$\blacksquare$

Def: $d(L) = |\det(N_D)| \quad \forall D$ di L.

Rem: L ha p-colorez. non costante se $p \mid d(L)$ $\quad p$ primo

Oss: $\dim_{\mathbb{Z}/p}(\ker(M_D \bmod p))$ ben def.

detta p-rango di L.

Oss: Visto nella dimo:

$$D \rightsquigarrow G_D = \left\langle x_1, \dots, x_n \;\middle|\; [x_i, x_j] = 0 \quad M_D \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = 0 \right\rangle$$

dipende solo da D (usato solo $\mathbb{Z}$ e non $\mathbb{Q}$)

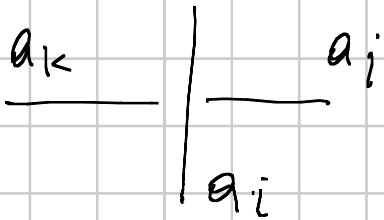
Se è $\mathbb{Z}^r \times \mathbb{Z}/_{t_1} \times \mathbb{Z}/_{t_2} \times \dots \times \mathbb{Z}/_{t_k}$

t_1 sono gli invarianti di torsione di L.

In particolare $\det(L) = \begin{cases} 0 & \text{se } r>0 \\ t_1 \cdots t_k & \text{se } r=0 \end{cases}$.

Prop: se K è <u>nodo</u> allora $\det(K)$ è dispari.

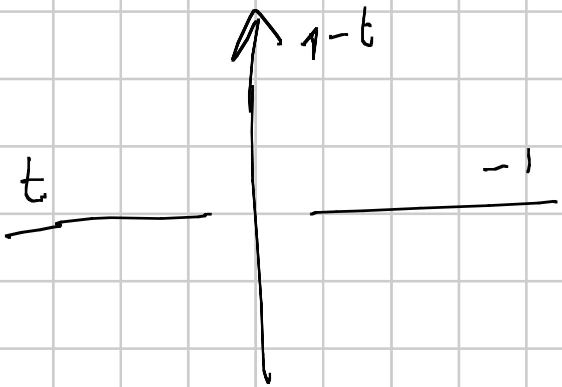
Dim: se è pari ho una 2-colorazione non banale, ma



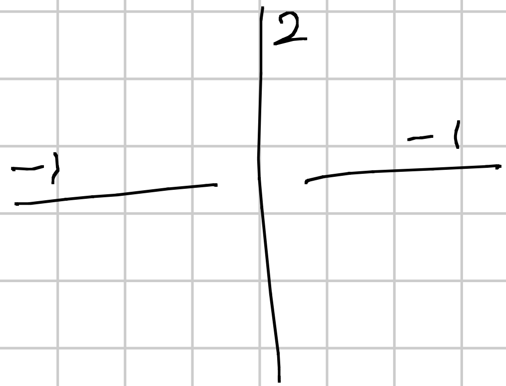
$2x_i = x_j + x_k$ cioè $x_j = x_k$

$\Rightarrow$ per nodo $x_i \equiv c$. $\blacksquare$

<u>Oss</u>: con colorazione



invece che



ottengo matrice con coeff. in $\mathbb{Z}[t]$; fatto:
se tolgo una riga e una colonna e faccio il det
risulta ben def / moltiplicazione per $\pm t^k$

(polinomio di Alexander) - Lo vedremo come

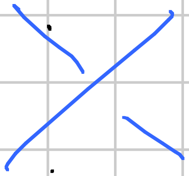
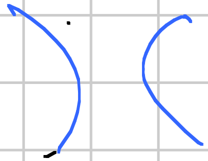
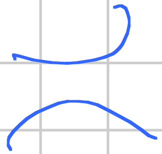
caso part. di HOMFLY.

Bracket di Kauffmann e polinomio di Jones.

$R = \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$

Prop: qualsiasi funzione B dall'R-modulo libero generato

dai diagrammi di link / isotopie su $\mathbb{R}^2$ che soddisf.:

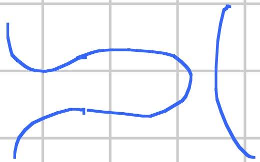
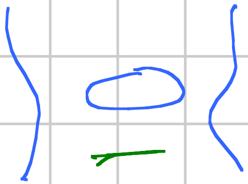
$B\Big($  $\Big) = A \cdot B\Big($  $\Big) + A^{-1} \cdot B\Big($  $\Big)$

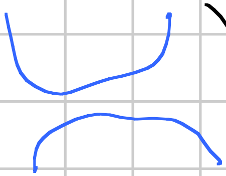
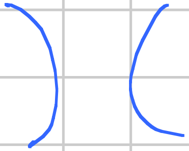
$$B(D \sqcup \bigcirc) = (-A^{2} - A^{-2})\, B(D)$$

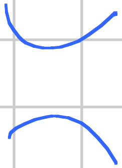
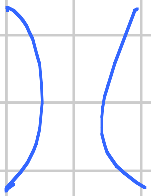
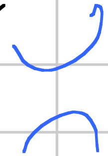
allora è invariante rispetto a R_{II}, R_{III} e isotopie in S^2

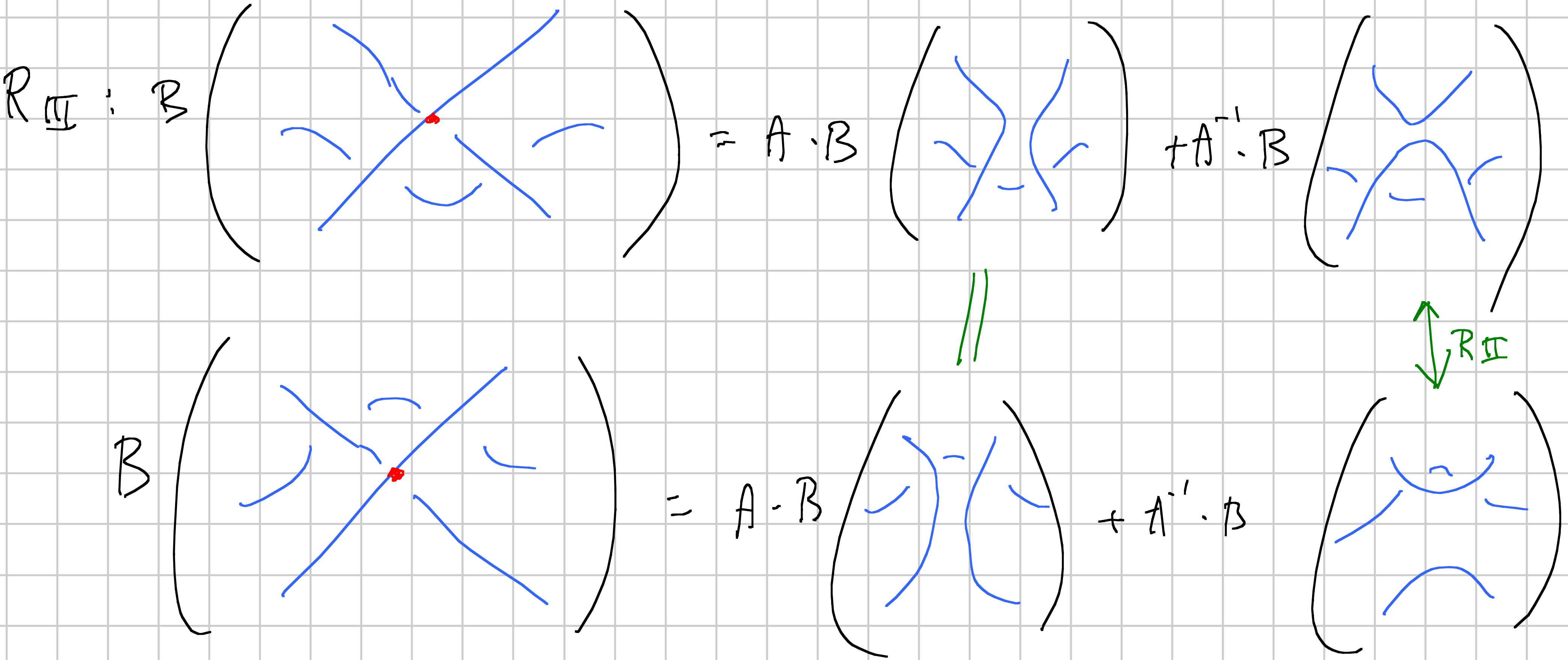
$\Longrightarrow$ definisca invariante per framed link.

<u>Dim</u>: $B\Big($  $\Big)$

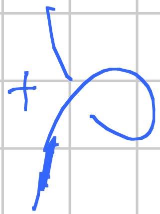
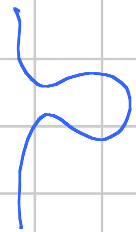
$= A^2 \cdot B$ () $+ 1 \cdot B$ ()

$+ 1 \cdot B$ () $+ A^{-2} B$ ()

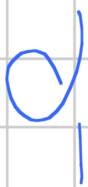
$= B$ () $+ B$ () $\left(A^2 + A^{-2} + (-A^2 - A^{-2}) \right) = B$ ()

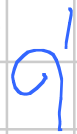


R III : B
= A · B
+ A⁻¹ · B
B
= A · B
+ A⁻¹ · B
R II

$B\Big($  $\Big) = A \cdot B\Big($  $\Big) + A^{-1} \cdot B\Big($  $\Big)$

$= B\Big($  $\Big) \cdot \big(A \cdot (-A^{2} - A^{-2}) + A^{-1}\big) = (-A^{3}) \cdot B\Big($  $\Big)$

$B\Big($  $\Big) = (-A^{3}) \cdot B\Big($ $\Big)$.

Analog: $B\Big($  $\Big) = B\Big($  $\Big) = (-A^{-3})\, B\Big($  $\Big)$.

D'ora in poi normalizzo B in modo che $B(\bigcirc) = 1$

leggermente illegale perché $B(\emptyset) = \dfrac{1}{-A^2 - A^{-2}} \notin \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$

ma $B(\neq \emptyset) \in \mathbb{Z}[A^{\pm 1}]$.

<u>Con</u>: per D orientato definisco $w(D)$ writhe

$= \sum$ segni di tutti gli incroci. Allora:

$$P(D) = (-A^3)^{-w(D)} \cdot B(D)$$

è invariante di link orientati.

<u>Dim.</u>: w inv. per R_{II} e R_{III}

$\Delta w = \pm 1$ per R_I

$\Delta B = (-A^3)^{\pm 1}$ per R_I $\Longrightarrow (-A^3)^{-w} \cdot B$ invariante per R_I. $\blacksquare$

P = polinomio di Kauffman (in 1 variabile)

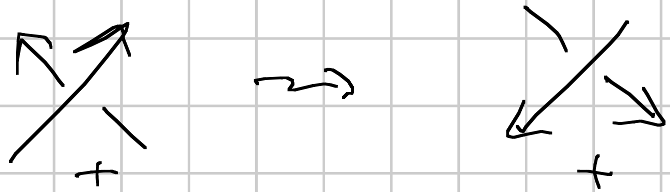
normalizzato con $P(\bigcirc) = 1$

Prop: (1) $P(-L) = P(L)$

(2) $P(\sigma(L)) = P(L)\big|_{A^{-1}}$ $\quad \sigma$ = mirror

Dim: (1) B non dipende da orientaz.

w nemmeno



Con: P ben def per nodi non orientati; per link può cambiare se cambio orientaz. ad due componenti.

(2)

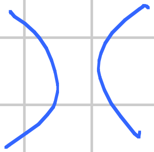
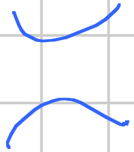
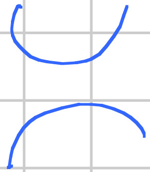
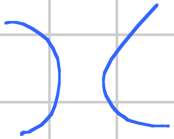
$+1$

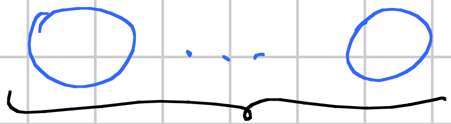
-1

w

$(-A^3)^{-w}$

$A \leftrightarrow A^{-1}$

skein $A \cdot$  $+ A^{-1} \cdot$  $A \cdot$  $+ A^{-1} \cdot$ 

Poiché eseguite tutte le skein trovo 

m

che hanno valore $(-A^2 - A^{-2})^{m-1}$ simmetrico $A \leftrightarrow A^{-1}$.

<u>Cor</u>: se L è amphichirale allora $P(L)$ è simmetrico per $A \leftrightarrow A^{-1}$.

Interpretazione di B come somma sugli stati

chiamo stato di un incrocio una delle sue due possibili semplificazioni e stato di D una scelta di uno stato per ogni incrocio.

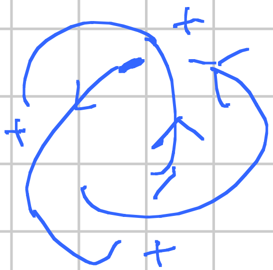
Se s è stato di D indico con

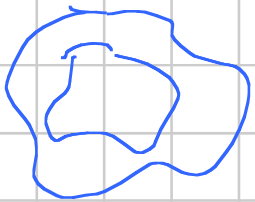
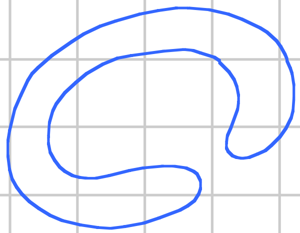
$l(s)$ = # stati "semplificaz. a sx"

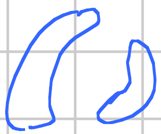
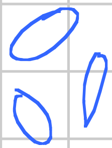
$r(s)$ = # stati "semplificaz. a dx"

$c(s)$ = # cerchi nella semplificazione

$$\rightarrow B(D) = \sum_{s \text{ stato di } D} A^{\ell(s)} \cdot A^{-r(s)} \cdot \left(-A^{2}-A^{-2}\right)^{c(s)-1}$$

$B\Big($  $\Big) = 8$ stati:

$= A^3 \cdot$  $+ 3 \cdot A$ 

$+ 3 \cdot A^{-1}$  $+ A^{-3}$ 

$$= A^3\left(-A^2-A^{-2}\right) + 3A + 3A^{-1}\left(-A^2-A^{-2}\right) + A^{-3}\left(-A^2-A^{-2}\right)^2$$

$$= -A^5 \cancel{-A} \cancel{+3A} \cancel{-3A} - 3A^{-3} \cancel{+A} + 2A^{-3} + A^{-7}$$

$$= -A^5 - A^{-3} + A^{-7}$$

$w = 3$

$$P = (-A)^{-3\cdot 3}\left(-A^5 - A^{-3} + A^{-7}\right) = A^{-4} + A^{-12} - A^{-16}$$

<u>Con</u>: il trifoglio è chirale.