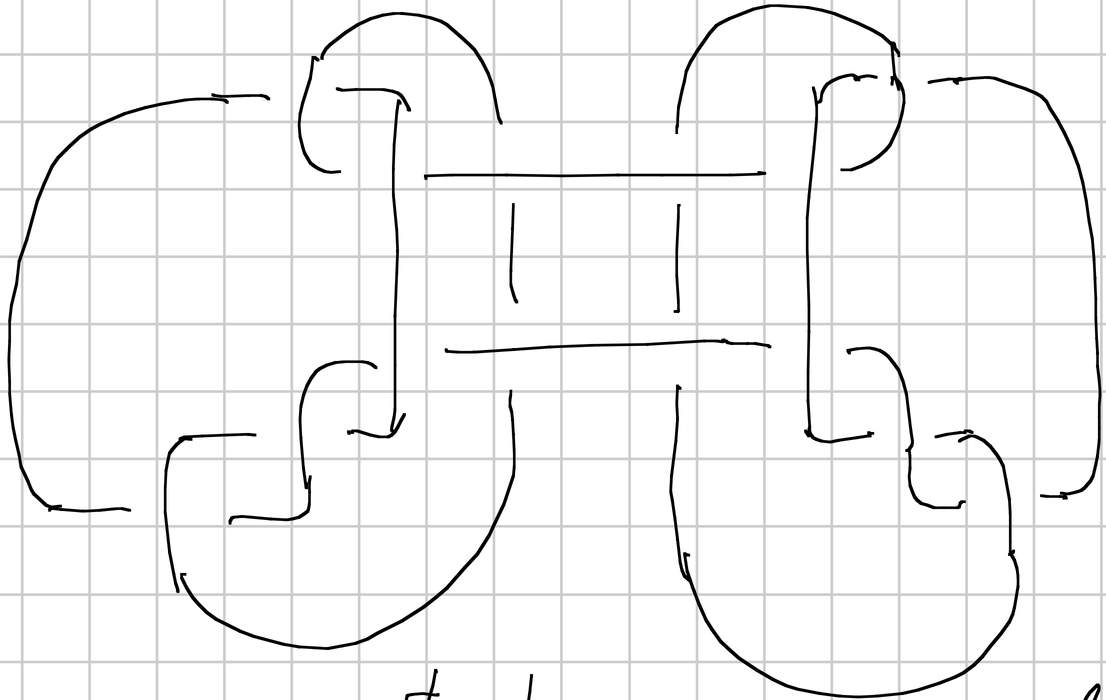
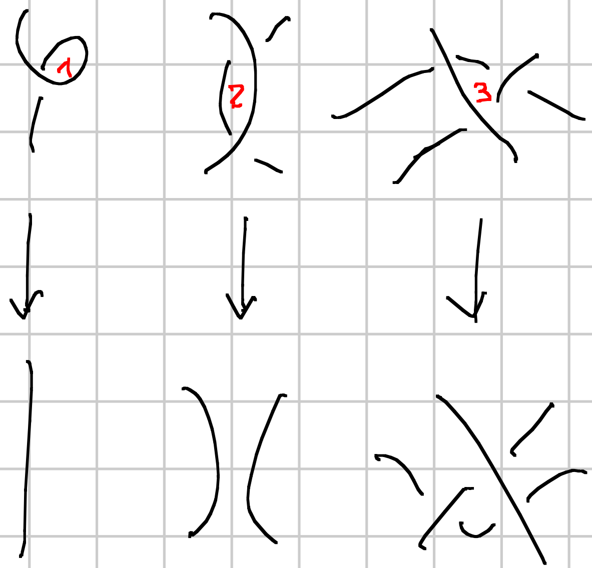
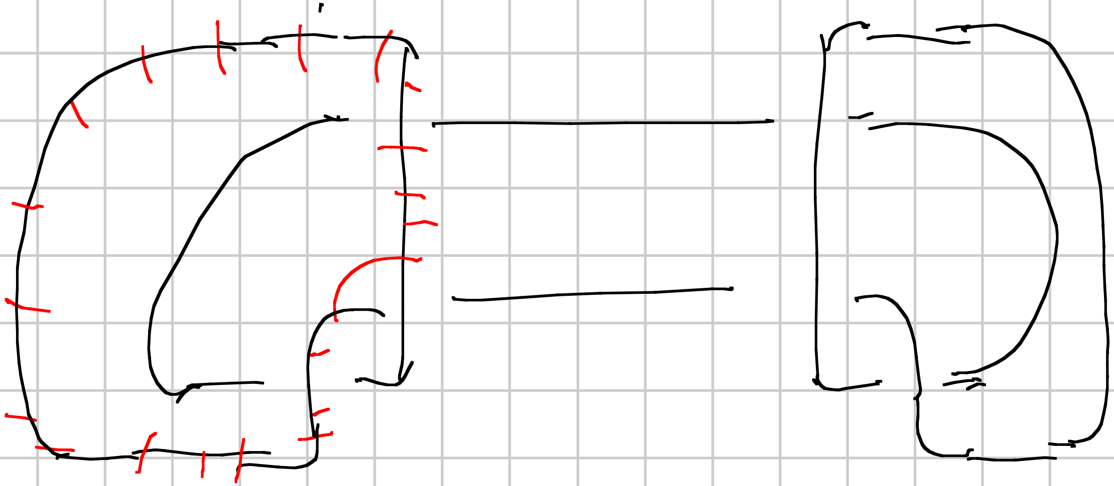
# Teoria dei nodi 20/10/16






Oss: a questo diagramma si applicano solo $R_I$ / $R_{II}$ in salita.

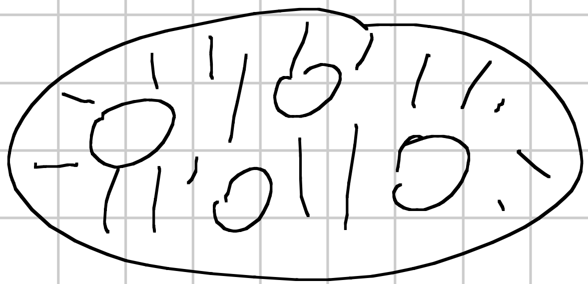


Q: $\exists$ bound $n(c)$ t.c. se $D$ è un diagramma con $c$ incroci di ○ esiste una successione di $R_I / R_{II} / R_{III}$

da D a ○ con $\leq M(c)$ incroci lungo la successione. $[S\bar{\imath}]$

—— o ——

Sup. planare = si può immergere in $\mathbb{R}^2$ (anzi $S^2$)
= $S^2$ o unioni di dischi con buchi

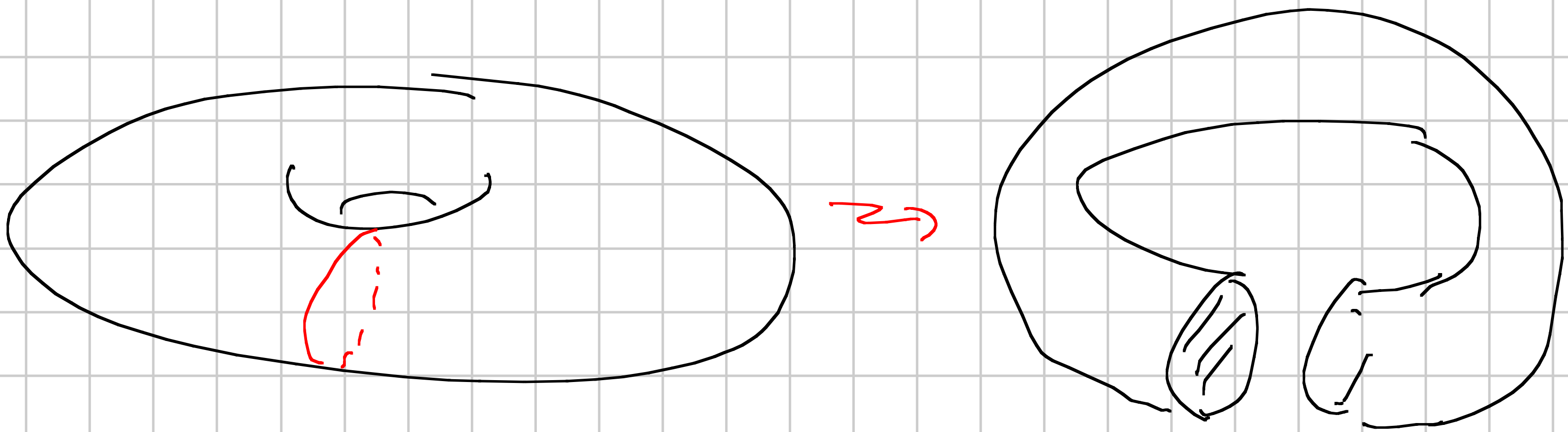


Ieri ho visto: $\gamma_1, \gamma_2 \subset T$ che non sconnettono $\Rightarrow$

(1) $\exists f : T \circlearrowleft \quad f(\gamma_1) = \gamma_2$

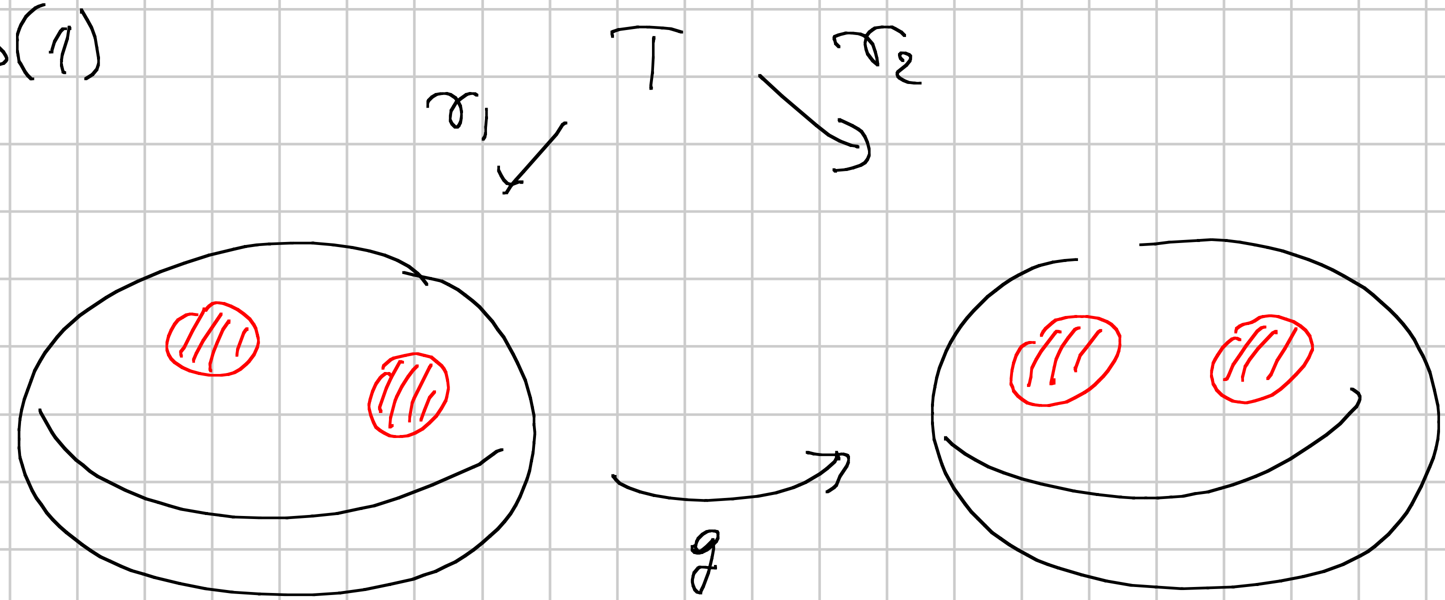
(2) facendo chirurgia su $T$ lungo $\gamma$ trovo $S^2$.

(1) $\Rightarrow$ (2)



Invece: (2) facendo chirurgia lungo $\gamma$ trovo superficie connessa orientabile con $\chi = \underbrace{\chi(T)}_{=0} + 2 = 2 \Rightarrow$ è sfera.

(2) $\Rightarrow$ (1)



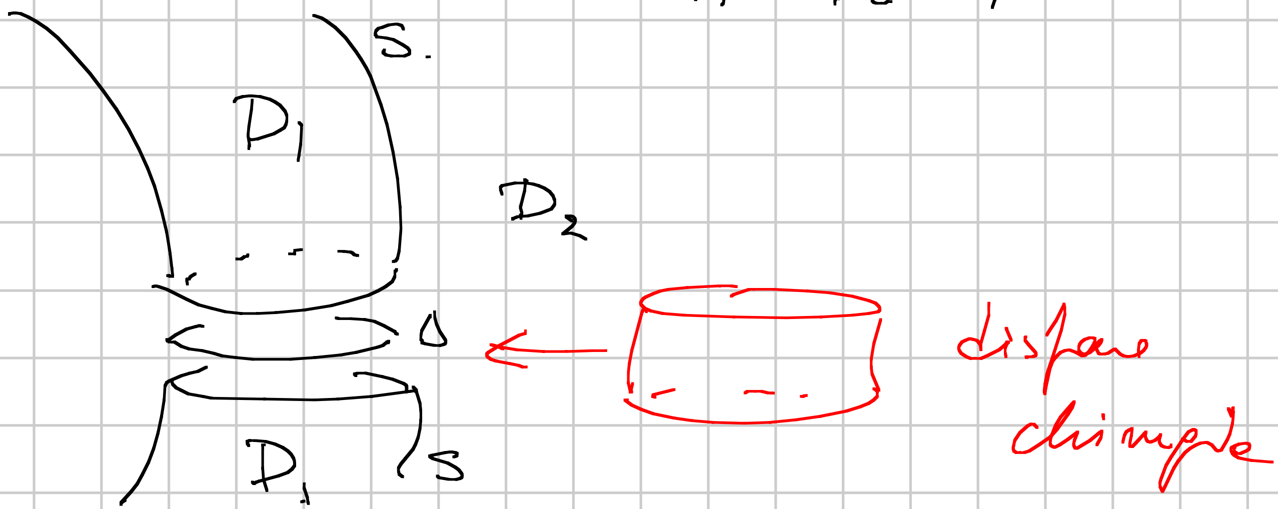
Trovare $g$ che manda $D_1, D_1'$ in $D_2, D_2'$ in modo che induce una $f : T \to T$ (che manda $\gamma_1$ in $\gamma_2$).

$T \subset S^3$ chirurgia lungo $\Delta \to S = \partial D_1 = \partial D_2$

$D_1 \cong D_2 \cong D^3$

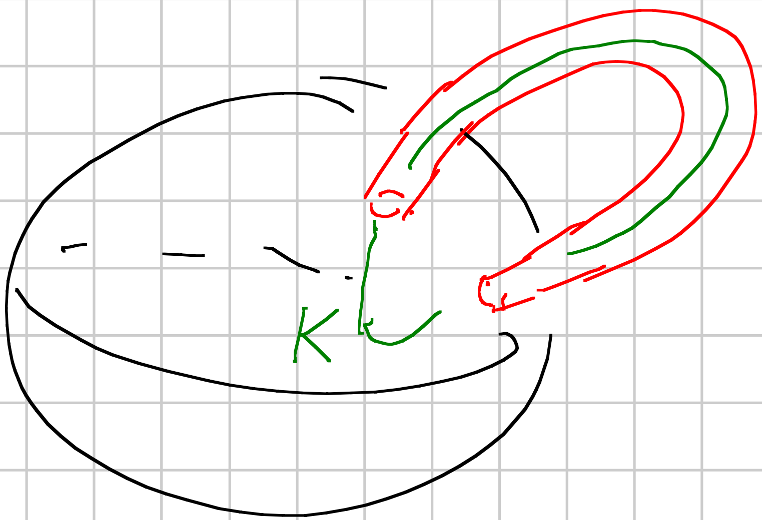
$D_2 \supset \Delta$

$D_1 \cap \Delta = \emptyset$



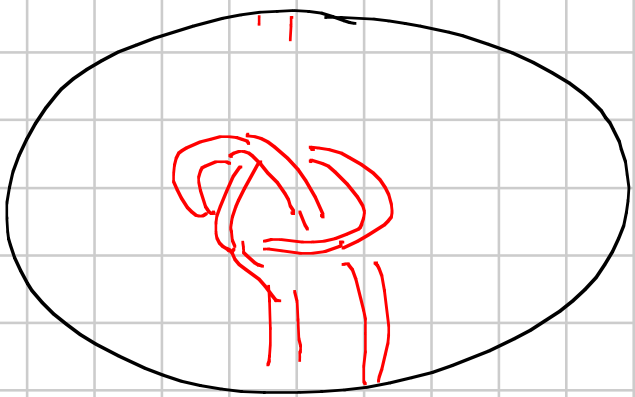
$S \rightsquigarrow T$

$D_1 \rightsquigarrow$




toro solido $= U(K)$

$D_2 \rightsquigarrow$

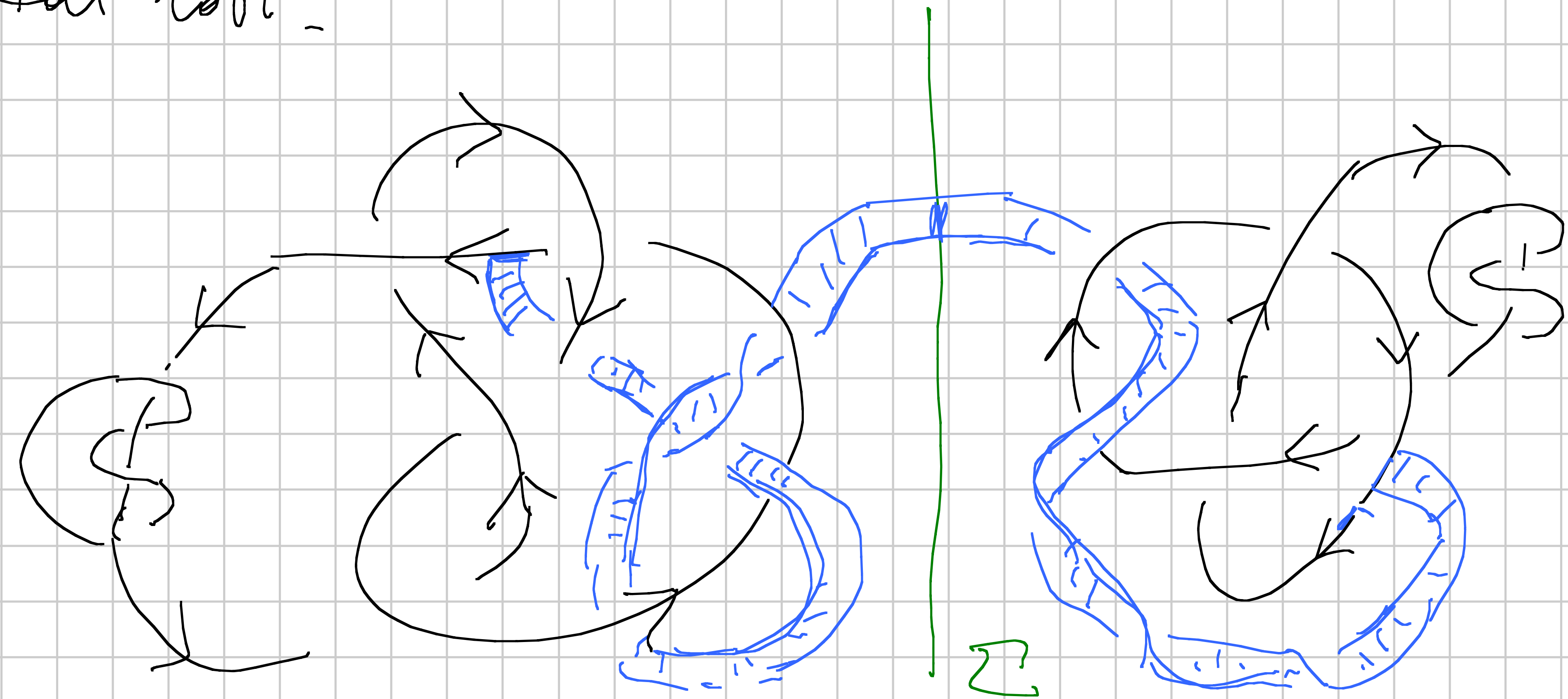


può non essere toro solido

## Somma connessa di link

Versione 3D intrinseca: Siano $L_1, L_2$ link, con $\vec{K_1} \subset L_1$ e $\vec{K_2} \subset L_2$ componenti specificate e orientate.
Prendo $\Sigma \subset S^3$ sfera e isotopo separatamente $L_1$ e $L_2$ ai due lati di $\Sigma$ e considero $Q \cong [0,1]^2$ orientato t.c. $Q \cap \Sigma = \{1/2\} \times [0,1]$
$Q \cap L_1 = \{0\} \times [0,1] \subset \vec{K_1}$, $Q \cap L_2 = \{1\} \times \{0,1\} \subset \vec{K_2}$

e l'orientazione $Q \to \partial Q$ è quella di $\vec{K_1}$ e $\vec{K_2}$ in tali lati.



**Teorema**: Questa operazione è ben definita.

**Dim**: Indipendenza da $\Sigma$ e da isotopia iniziale è ovvia.

Indipendenza da $Q$. Siano $Q$ e $Q'$ come nella costruzione. Primo passo: isotopo $Q'$ in modo che coincida con $Q$ in modo orientato vicino a $\Sigma$:

Pongo $Q_1 = Q \cap D_1$ $\qquad Q_2 = Q \cap D_2$

$Q_1' = Q \cap D_1$ $\qquad Q_2' = Q \cap D_2$

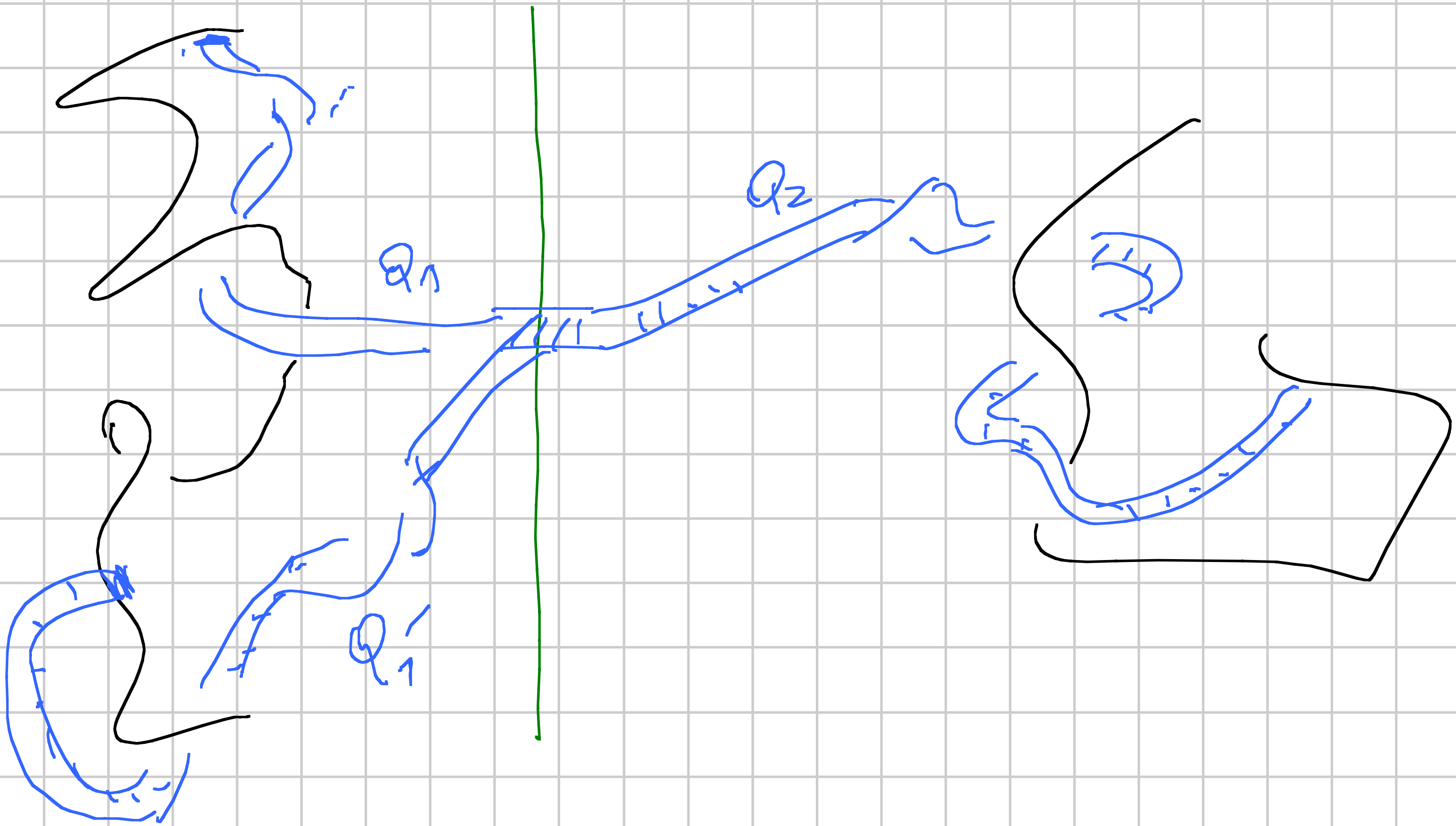
Provo che l'operazione eseguita luogo

$Q_1 \cup Q_2$ e $Q_1' \cup Q_2$

ha lo stesso risultato / isotopia.

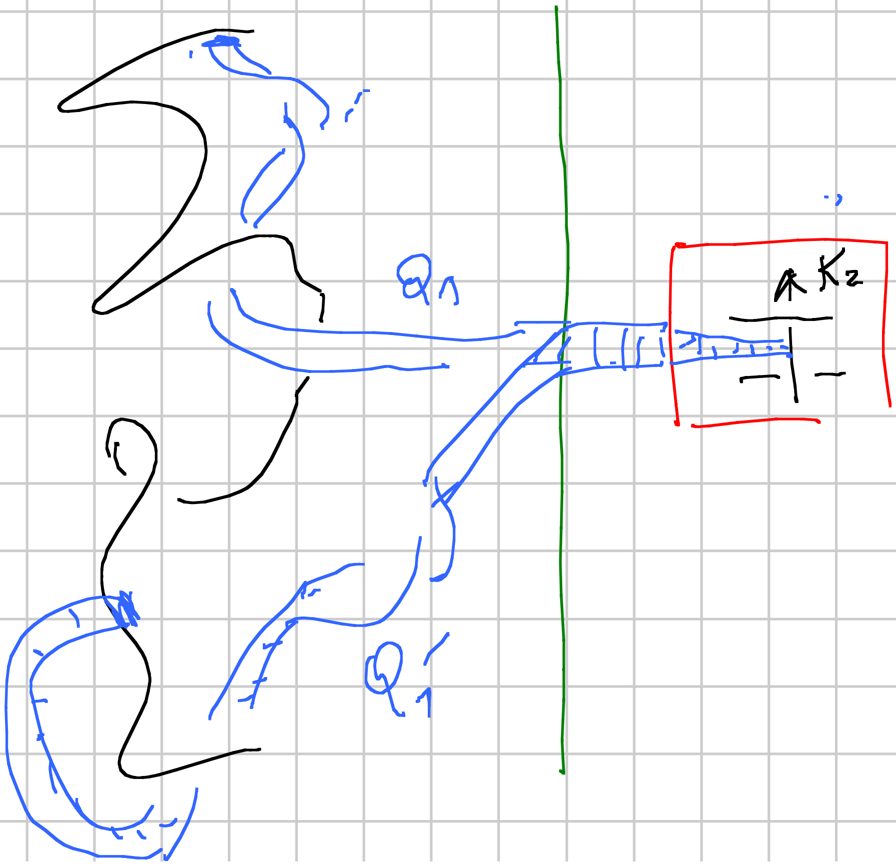
Per simmetria $Q_1' \cup Q_2$ e $Q_1' \cup Q_2'$

hanno stesso risultato $\Rightarrow$ OK.

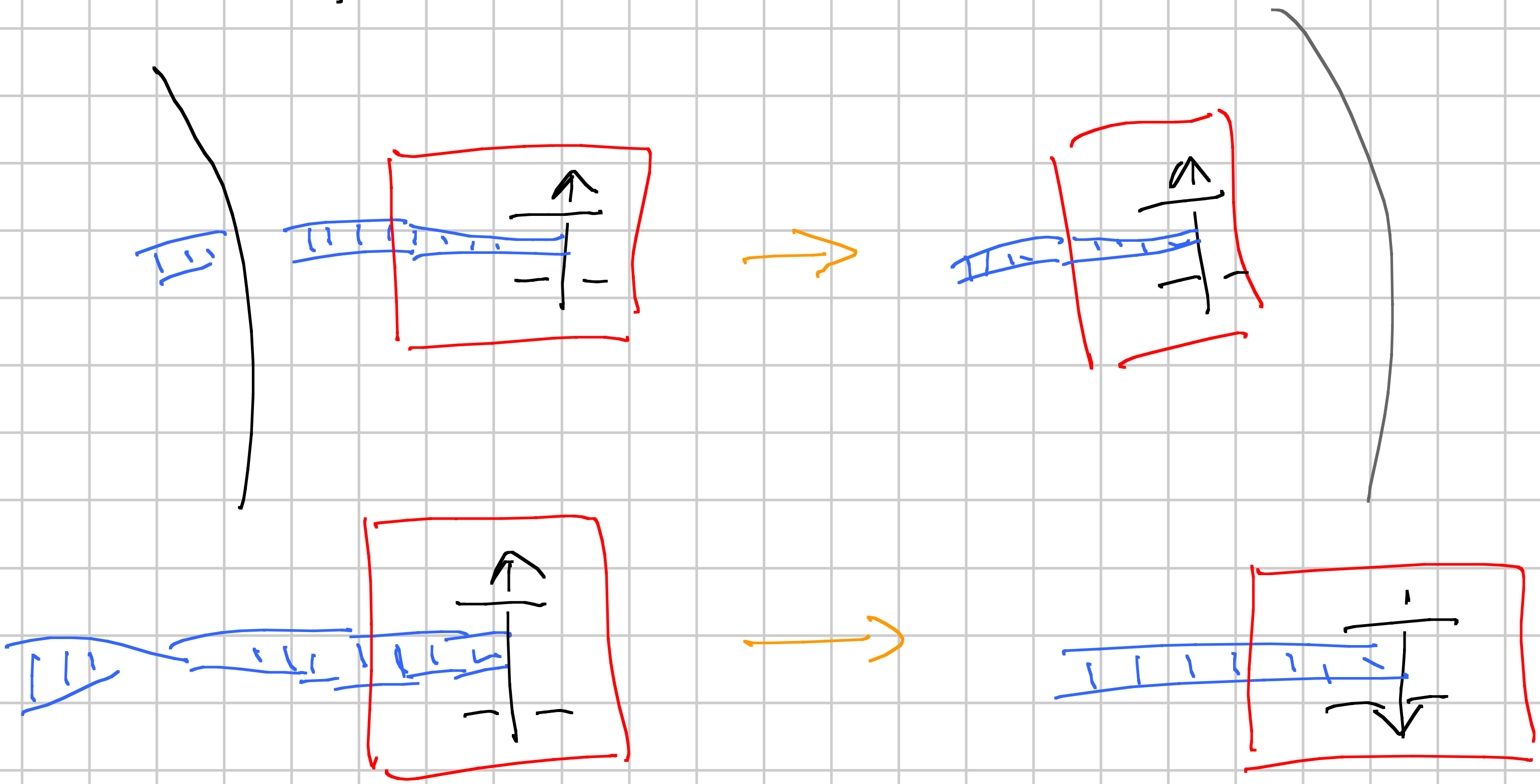


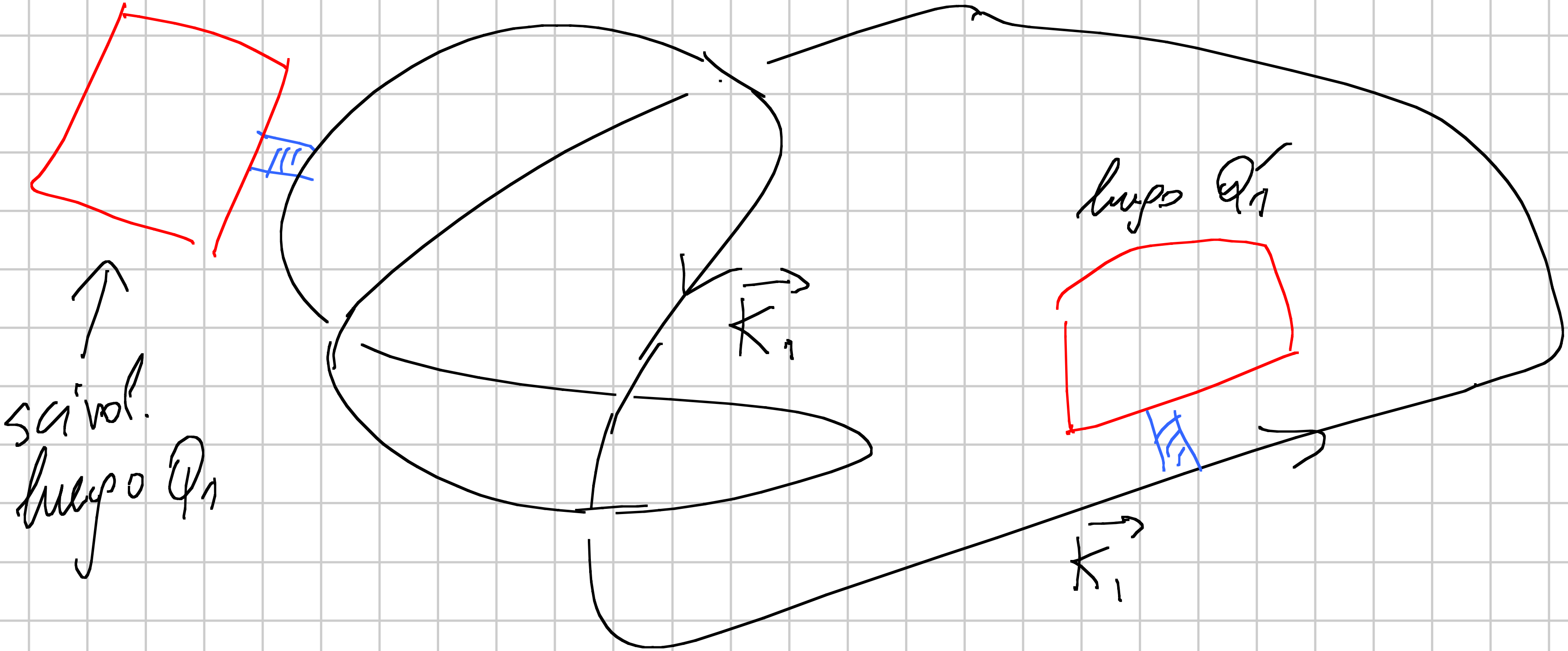
$Q_1$
$Q_2$
$Q_1'$

Tramite l'isotopia rendo piccolissima la parte dx del diagramma:



Ora trascino la parte destra lungo $Q_2$ e $Q_1'$ fino ad arrivare vicino a $\overrightarrow{K_1}$ :

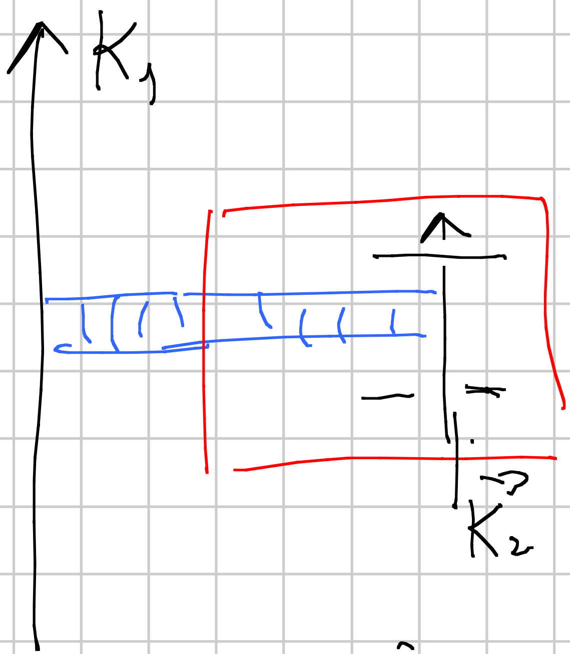



luego Φ1
luego Φ1'
K1
K1

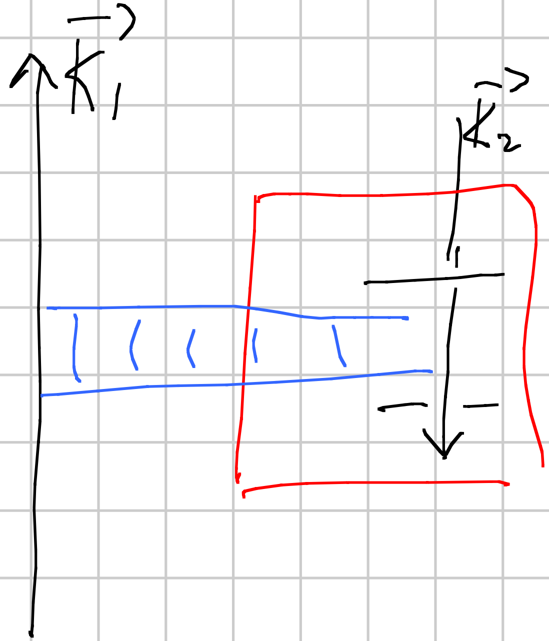
Ulteriore scivolamento lungo $\vec{K}_1$ di una delle due

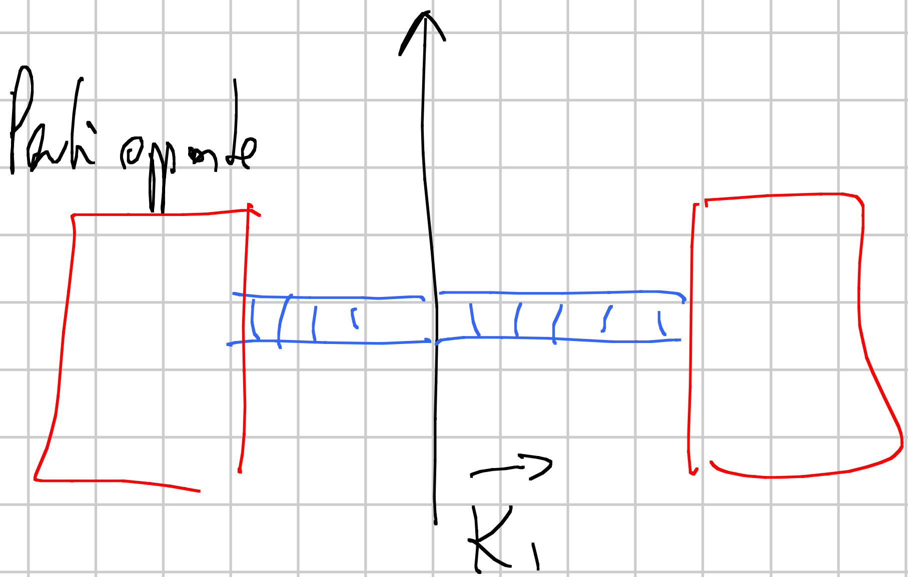
finché non insistono sullo stesso arco di $\vec{K}_1 - H_0$:

Se sono dalla stessa parte o coincidono oppure



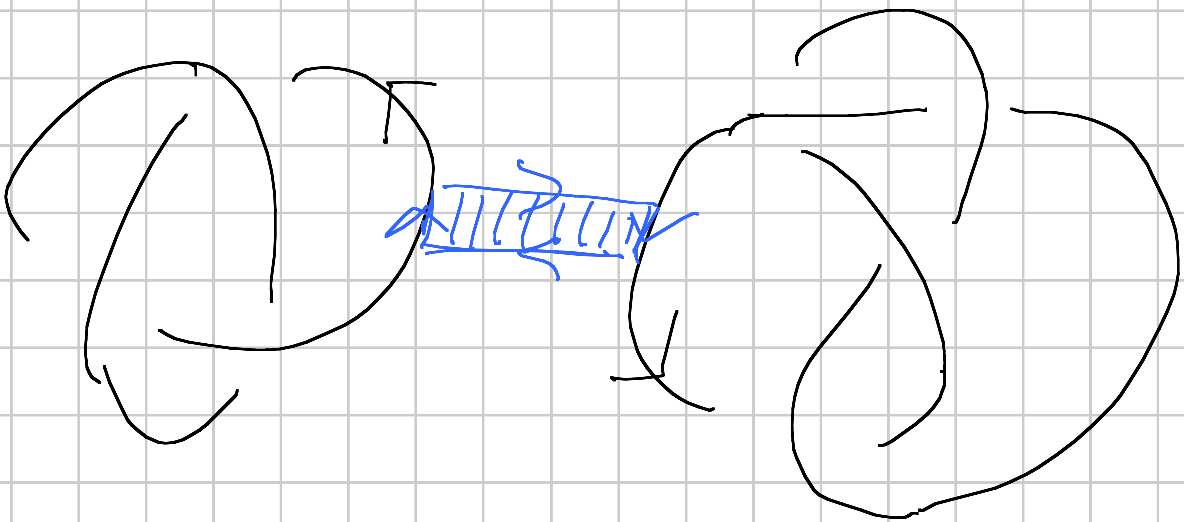

impossibile

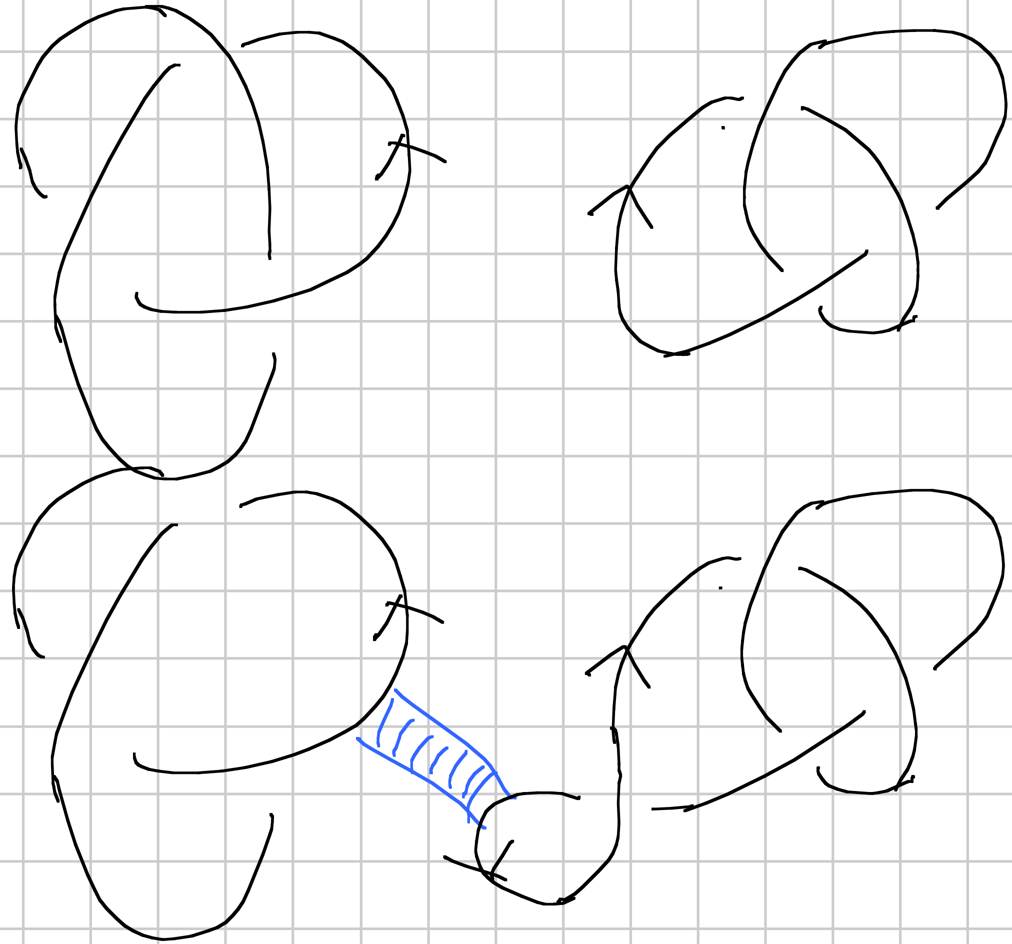





con rotaz. 180° di una delle due intorno a $\vec{K}_1$ mi riconduco a stesse parte. ▨

Versione diagrammatica: prendo diagrammi $D_1$ e $D_2$ di $L_1$ e $L_2$ in due semipiani distinti con archi di $\vec{K_1}$ e $\vec{K_2}$ liberi e bene orientati:



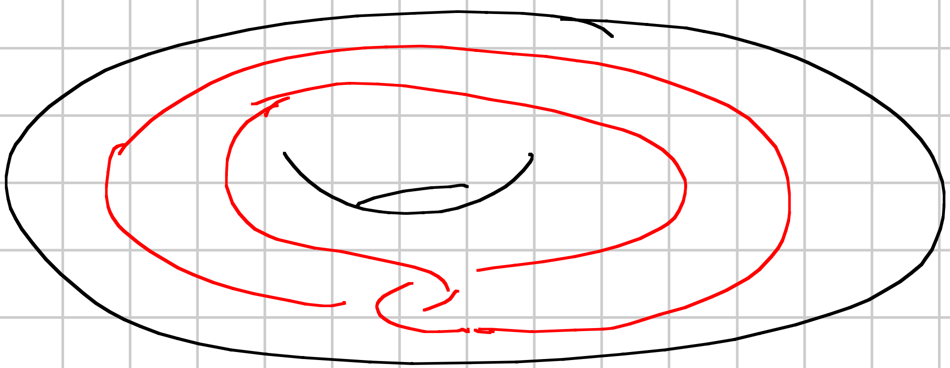


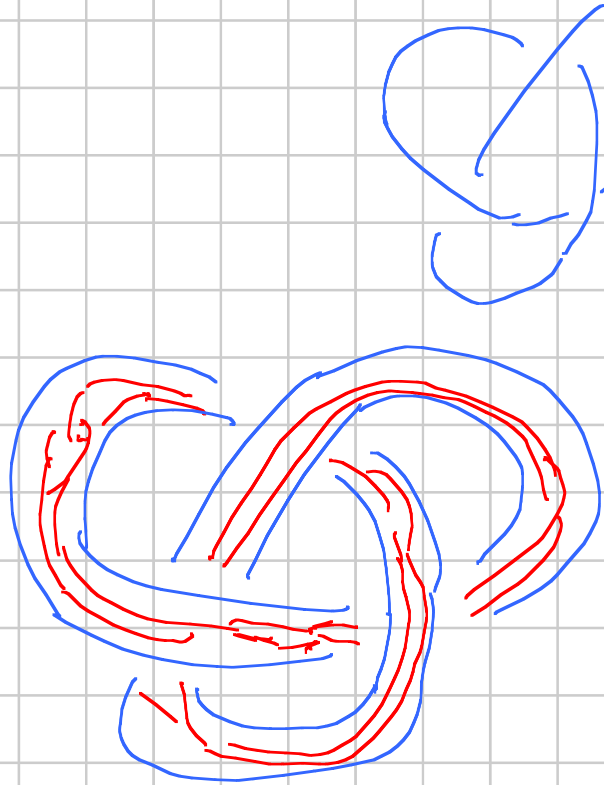
**Satelliti:** $W = D^2 \times S^1$

$P \subset W$ link essenziale: non può essere isotopato in modo da evitare $D^2 \times \{*\}$

$K \subset S^3$ nodo; $f: W \to U(K)$ omeo; chiamo $f(P)$ satellite di $K$; $K$ compagno di $f(P)$ e $P$ pattern del satellite; satellite fedele se $f(\{1\} \times S^1)$ = longitudine privilegiata di $K$.

(Ci sono due tali $f$ a meno di isotopia, ottenute per precomposizione con una riflessione di $W$ ad es. $(z,t) \mapsto (\bar{z},t)$.)

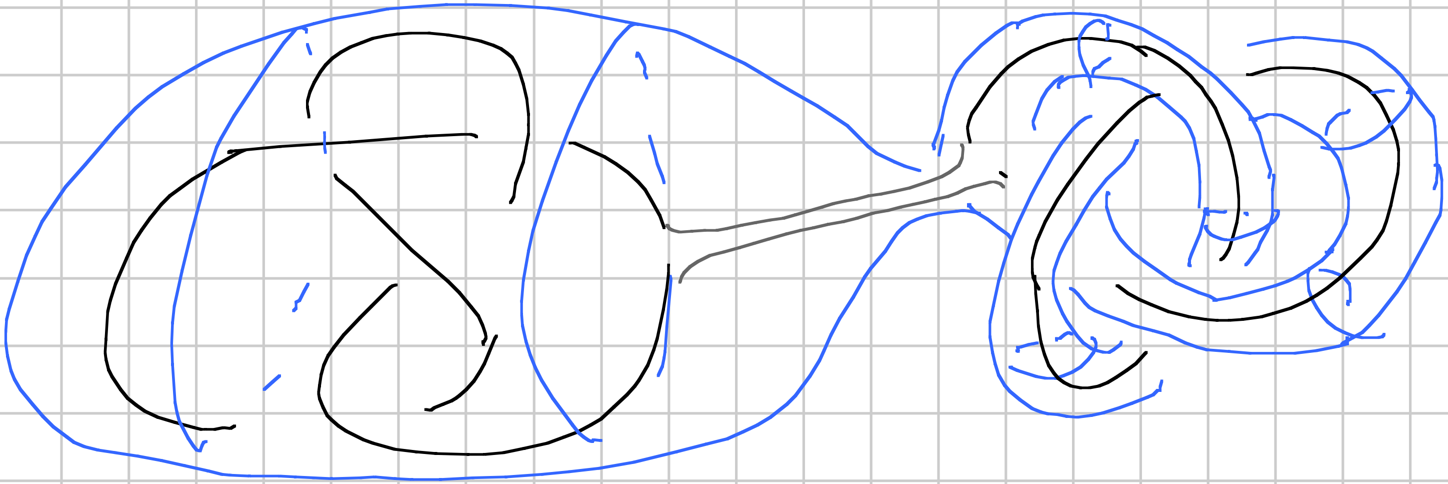




per questo pattern il satellite se fedele si dicono doppio di $K$.

Se $P = K_{p,q}$ e il satellite è fedele lo chiamo $(p,q)$-cable di $K$.

<u>Oss</u>: la somma connessa è un caso particolare di satellite:



**Prop:** il nodo banale è satellite solo di se stesso.

**Dim:** sia p.a. $K_0$ banale, $K_0 \subset \mathring{U}(K)$ con $K_0$ essenziale in $U(K)$. Esiste $S$ sfera con $K_0 \subset S$. Metto $S$ in posizione generica rispetto a $T = \partial U(K) \Rightarrow S \cap T$ unione di cerchi.

Affermo $S \cap T \neq \emptyset$ altrimenti $S \subset U(K)$ ma $S = \partial D_1 = \partial D_2 \Rightarrow D_1$ o $D_2$ è contenuto in $\mathring{U}$

$\Rightarrow$ $K_0$ inessenziale in $U(K)$ (posso isotopare $D_1 \supset K_0$ a un disco piccolo che evita dischi meridiani)

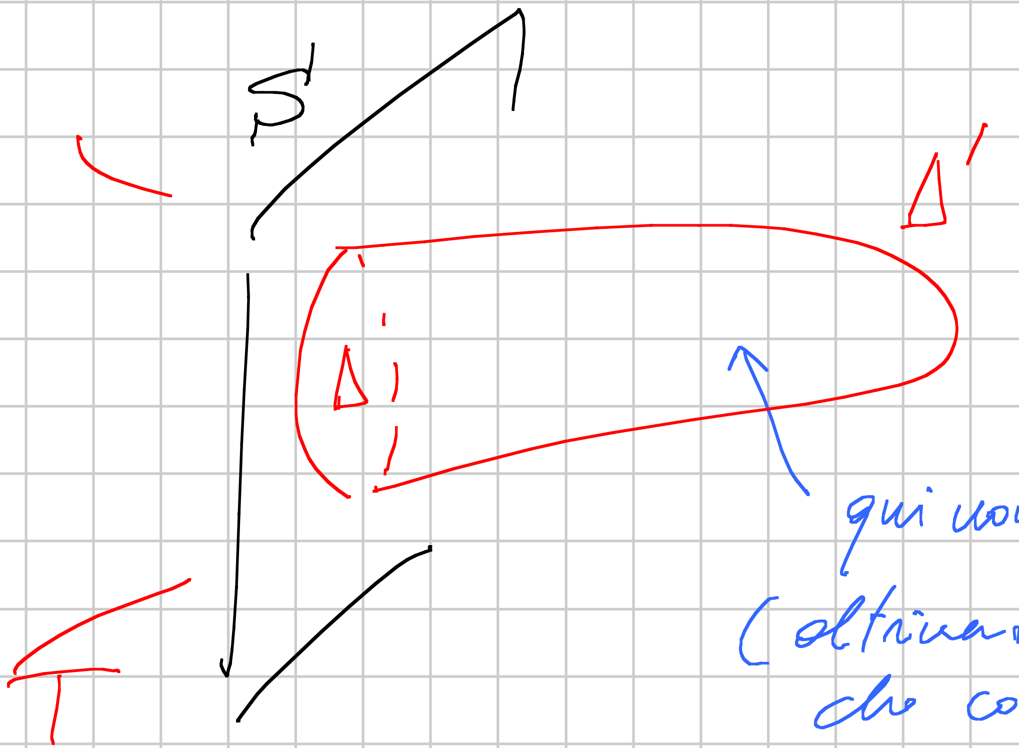
Ora $K_0 \subset S$, $K_0 \cap T = \emptyset$

$\Rightarrow$ $K_0$ contenuto in una delle componenti connesse di $S \setminus \underbrace{(S \cap T)}_{\text{unione di circonferenze}}$.

Ho $\geq 2$ dischi innermost in $S \setminus (S \cap T)$

$\Rightarrow$ ne scelgo uno $\Delta$ che non contiene $K_0$.

Se $\partial\Delta$ bordo disco in $T$:




qui non c'è $K_0$
(altrimenti $\Delta \cup \Delta'$ è $S^2 \subset U(K)$
che contiene $K_0 \Rightarrow$
$K_0$ inessenziale)

$\Rightarrow$ posso isotopare $T$ in modo da ridurre l'$\cap$.

Procediamo fino a $\Delta$ che non contiene $K_0$ e che non borda disco in $T$. Due casi:

(1) $\Delta \subset \mathring{U}(K) \Rightarrow \Delta$ disco meridiano, $\Delta \cap K_0 = \emptyset$

$\Rightarrow K_0$ inessenziale: no.

(2) $\Delta \subset E(K) \Rightarrow \partial\Delta$ è longitudine di $\partial U(K)$

ma $K$ è isotopo a tale longitudine $\Rightarrow K$ borda disco in $S^3 \Rightarrow K$ è banale. $\square$

$c$ = crossing number

$c(K_1 \# K_2) \leq c(K_1) + c(K_2)$ [facile]

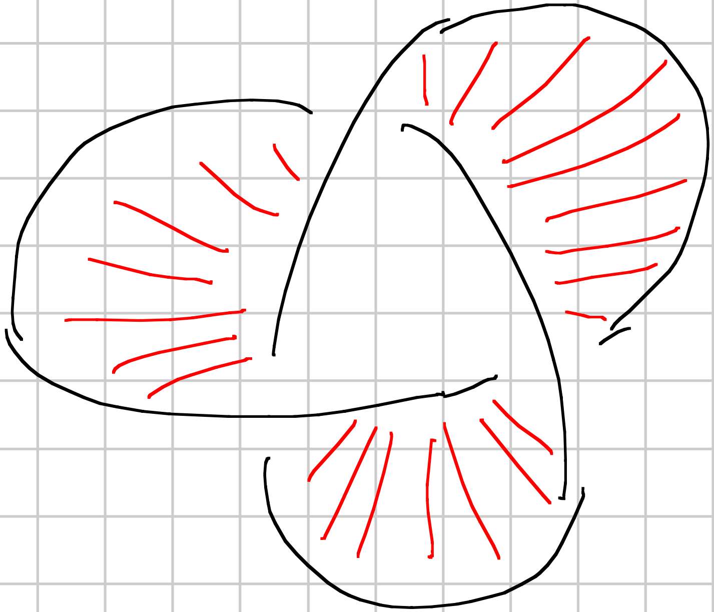
Congettura: vale l'= .

<u>Invariante</u>: genere.

$g(K) = \min\{ g(\Sigma) : \Sigma \text{ superficie di Seifert di } K \}$

$g(\Sigma)$ = genere di $\Sigma$ := genere di $\widehat{\Sigma}$ ottenuta tappando corpo di $\partial\Sigma$ con 2-dischi.

Ricordo: "Seifert" $= \partial\Sigma = K$ + orientabile:



trifoglio $= \partial$(Möbius)

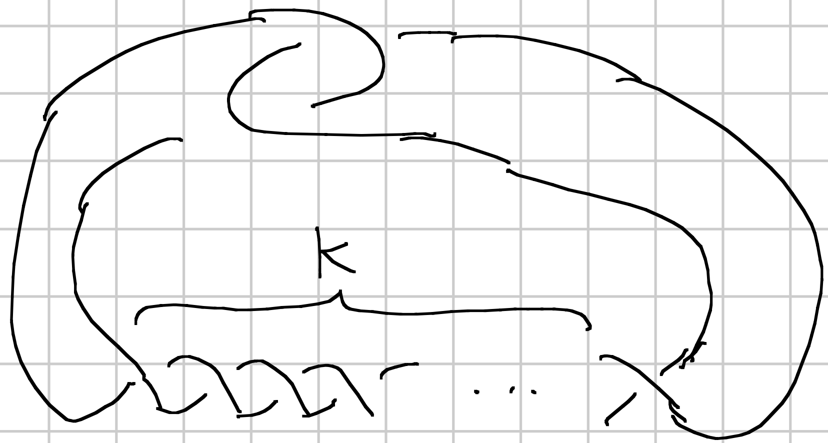
Non è Seifert.

<u>Oss</u>: $g(K) = 0 \Longleftrightarrow K$ nodo banale

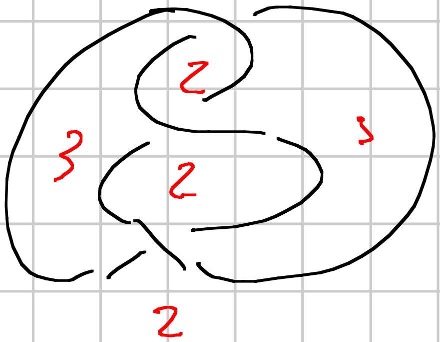
<u>Oss</u>: se $K$ è non banale e ha una sup. di Seifert di genere 1 allora $g(K) = 1$.

<u>Esempio</u>: nodi twist:

$k$-twist $k \geq 0$

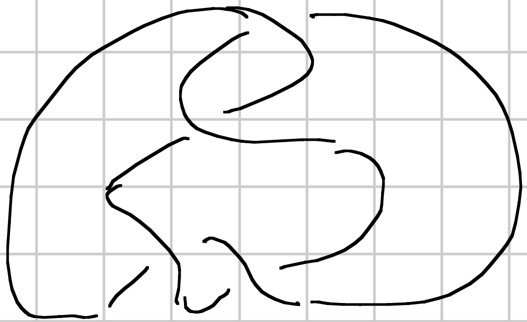


$k = 1$




trifoglio

$k = 2$



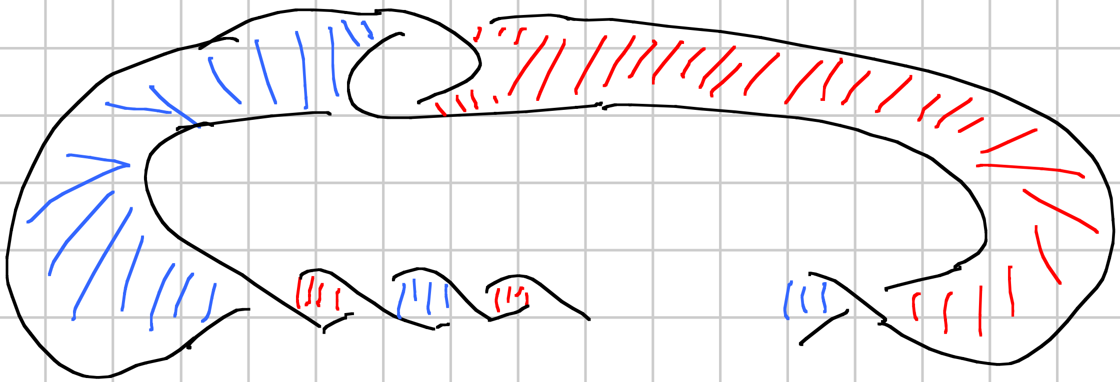
nodo a 8

<u>Fatto</u> (seguirà a breve): ogni nodo twist è non banale
( $c(k\text{-twist}) = k+2$ ).

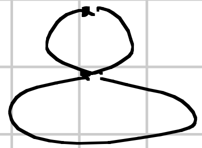
**Prop:** $g(k\text{-twist}) = 1$.

**Dim:** esibisco sup. Seifert di genere 1.

$k$ dispari

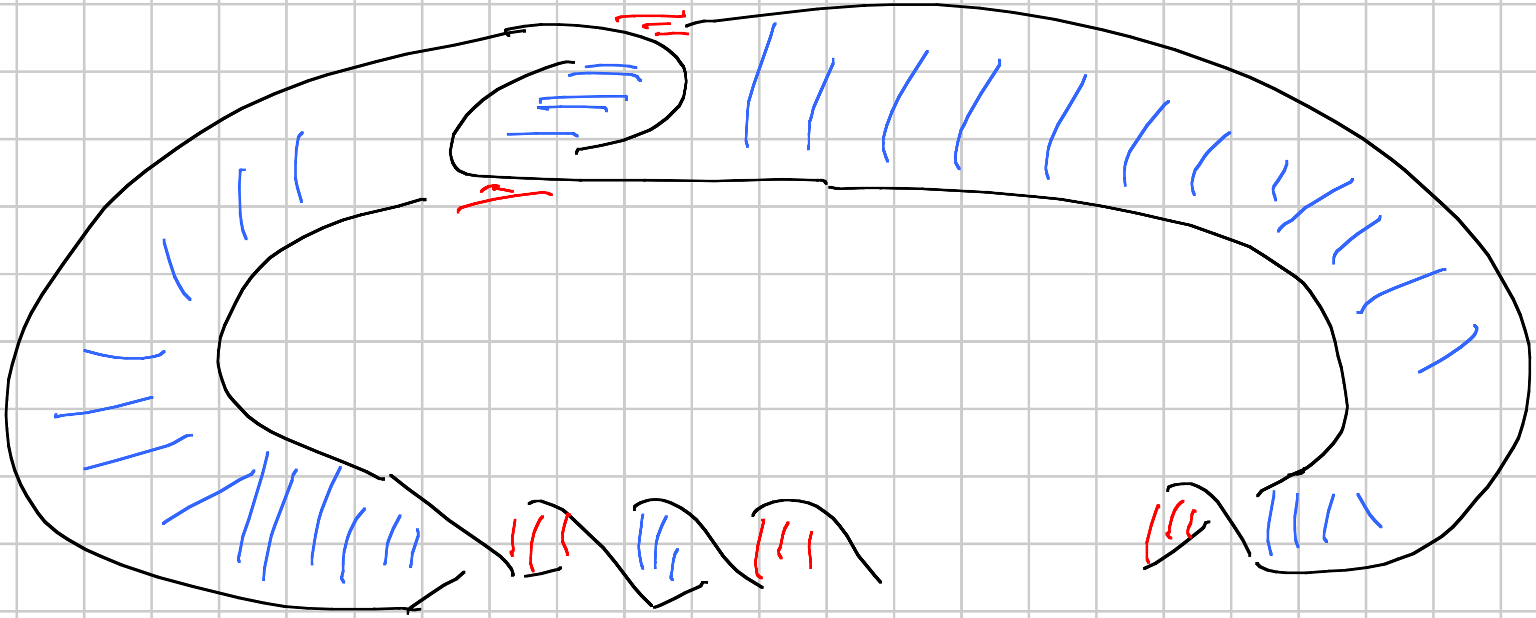


$\cong$



$$\chi = -1 = 2(1-g) - 1$$
$$\Longrightarrow g = 1$$

k pair :

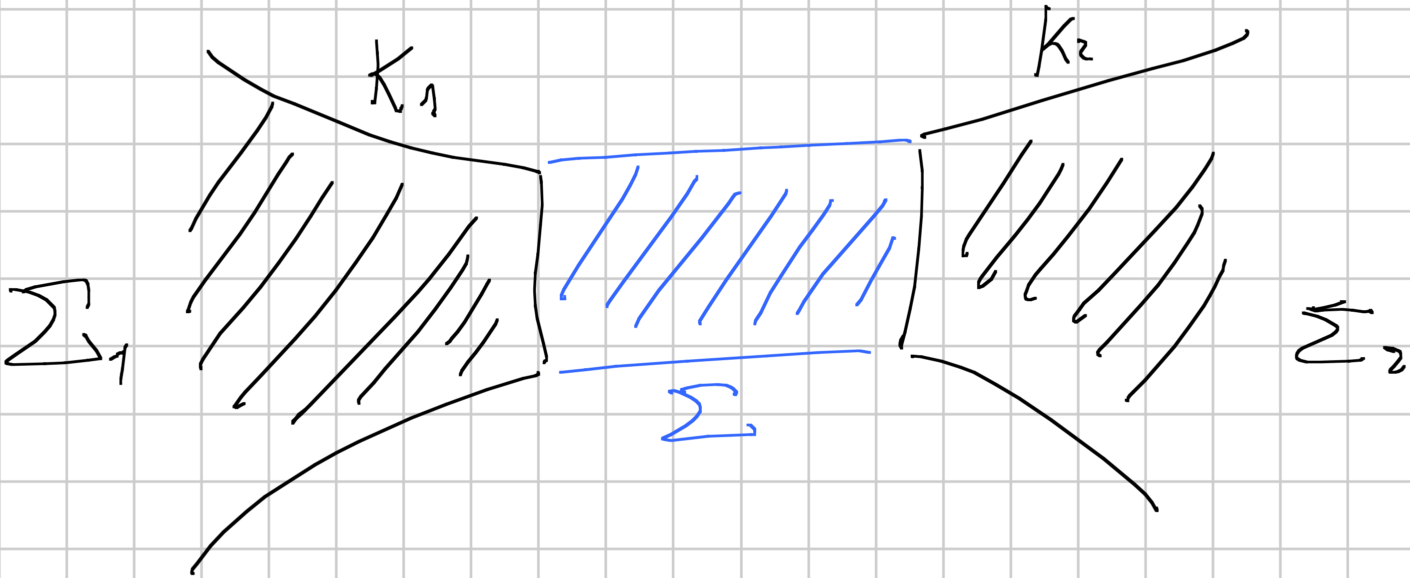


$g = 1 \ \ldots$

$\boxed{/\!/}$

**Teo:** $g(K_1 \# K_2) = g(K_1) + g(K_2)$

**Dimo:** $g(K_1 \# K_2) \leq g(K_1) + g(K_2)$ :



$$\chi(\Sigma) = \chi(\Sigma_1) + \chi(\Sigma_2) - 2 + 1$$

$$\begin{array}{ccc} \| & \| & \| \\ 2(1-g)-1 & 2(1-g_1)-1 & 2(1-g_2)-1 \end{array}$$

$$\Longrightarrow \quad g = g_1 + g_2 .$$

L'altra disuguaglianza: prox att. $\qquad \frac{1}{2}\cdot \boxtimes$