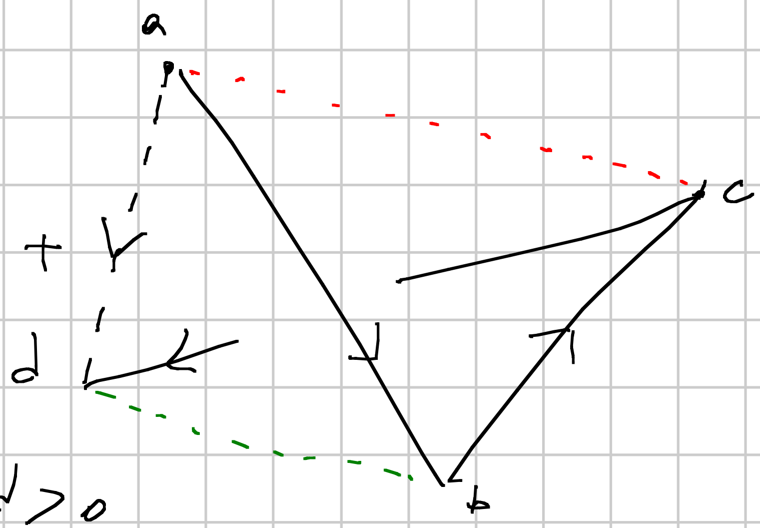
Teoria dei nodi 16/11/16

W^{bc}_{ad}



$ad, ab, bc, cd > 0$

$ac, bd < 0$

- $\mathcal{E}^{b}_{ac} \circ \mathcal{E}^{c}_{ad}$
- $\mathcal{E}^{c}_{bd} \circ \mathcal{E}^{b}_{ad}$

dichiaro W^{bc}_{ad} legale se lo è una delle due espressioni:

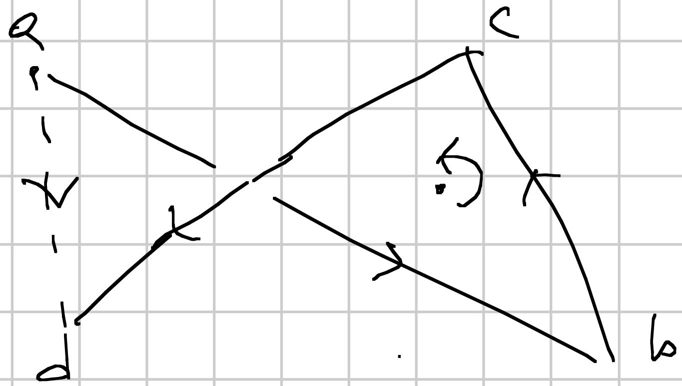
- $[a,d,c] \cap L = [a,d]$, $[a,b,c] \cap L = \{a\}$
- $[a,b,d] \cap L = [a,d]$, $[b,c,d] \cap L = \{d\}$

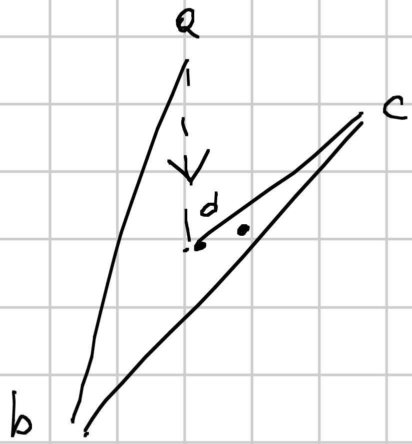
Dico W vuota se $[a,b,c,d] \cap L = [a,d]$.

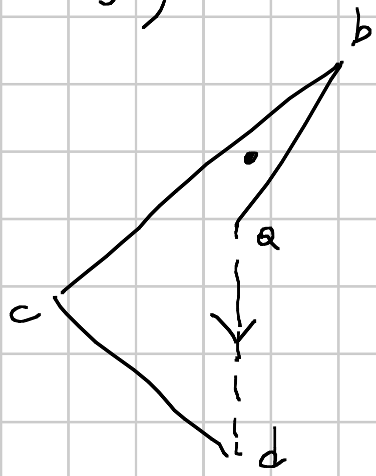
Dico W vuotissima se $(\pi : \mathbb{R}^3 \to n^\perp)$

$$\pi([a,b,c,d]) \cap \pi(L) = \pi([a,d])$$

Versioni intrecciate:





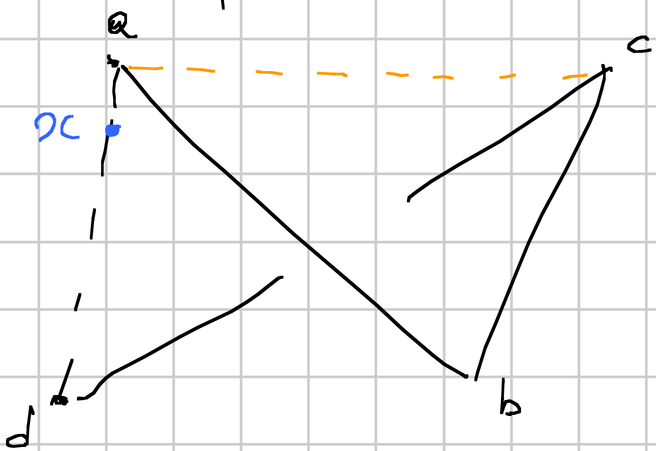


$$\underbrace{\pi(d) \in \pi([a,b,c]) \qquad \pi(a) \in \pi([b,c,d])}_{\text{non possono mai essere vuotissime.}}$$

Prop 2: W è prodotto di $\mathcal{R}$ e $\mathcal{N}$ vuote.

Dim:

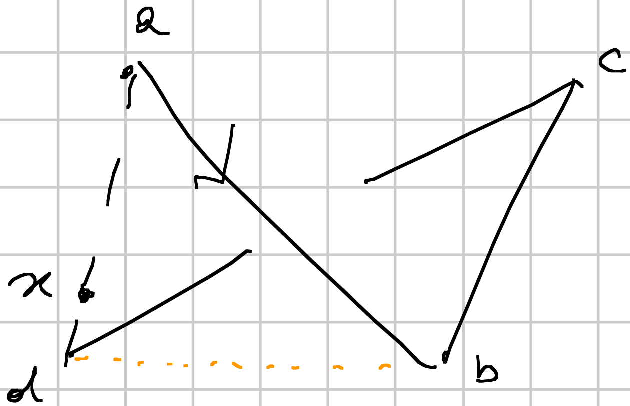
I)



$$(\mathcal{R}^x)^{-1} \circ W_{ax}^{bc} \circ \mathcal{R}_{ad}^x$$

$[a,x,b,c] \cong [a,b,c]$

$\Rightarrow$ tale W è vuota

II) 

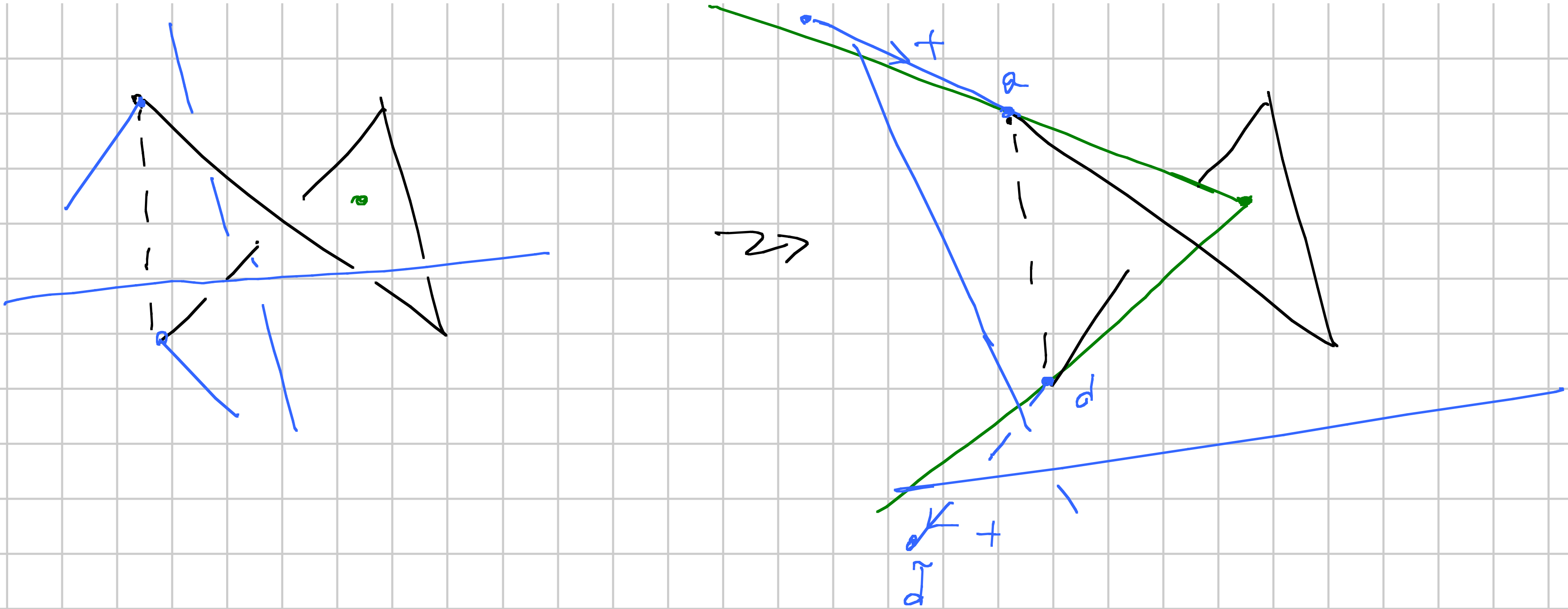
e anche ultima $\mathcal{R}$ lecita

analogo.

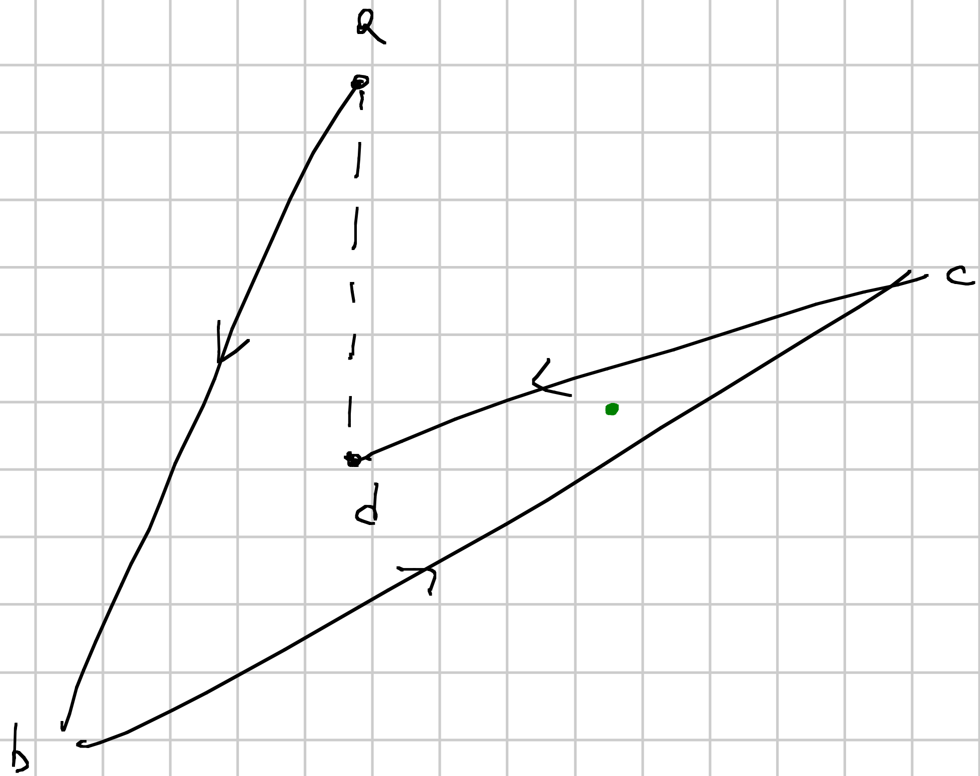
Prop 3: una W vuota su un link in posizione treccia si fattorizza via $\mathcal{R}$ e $\underbrace{\text{W vuotissime}}_{\text{intrecciate}}$.

Dim: fatta nel caso W intrecciato (idea: annotatie)

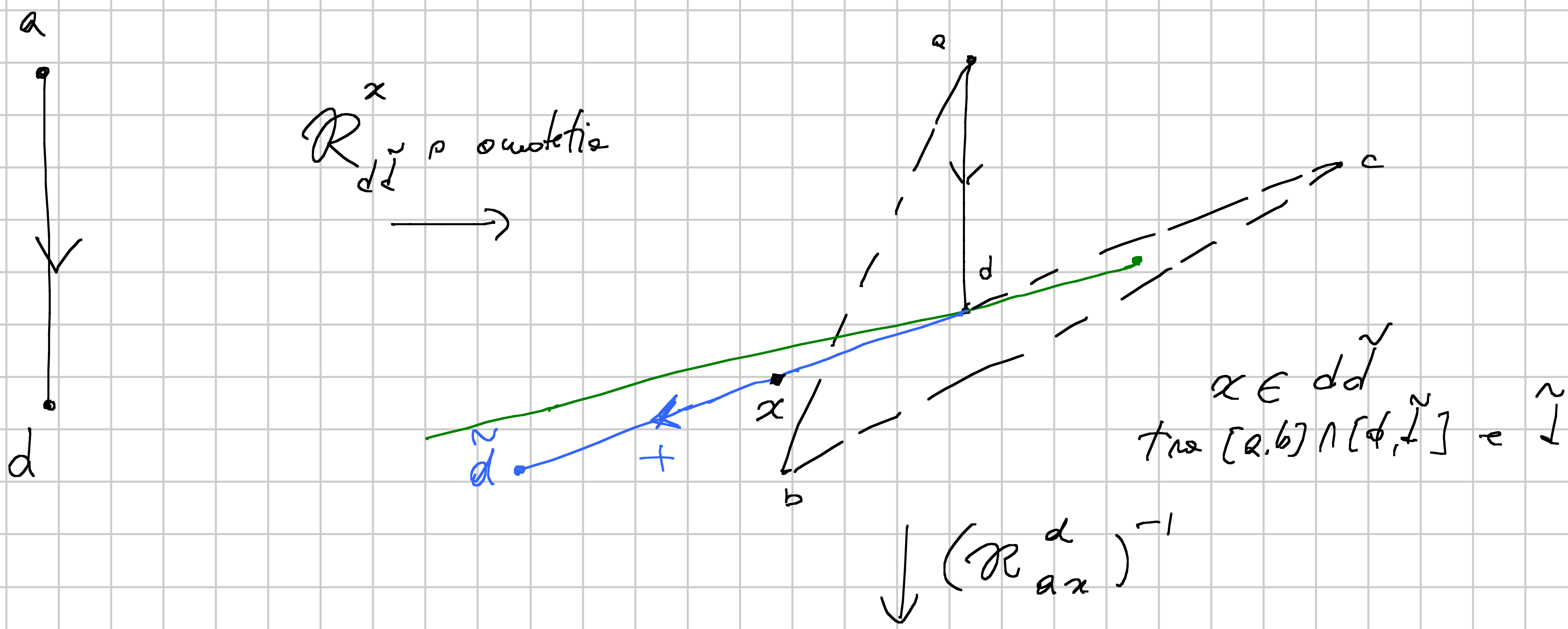
$\tilde{a}$

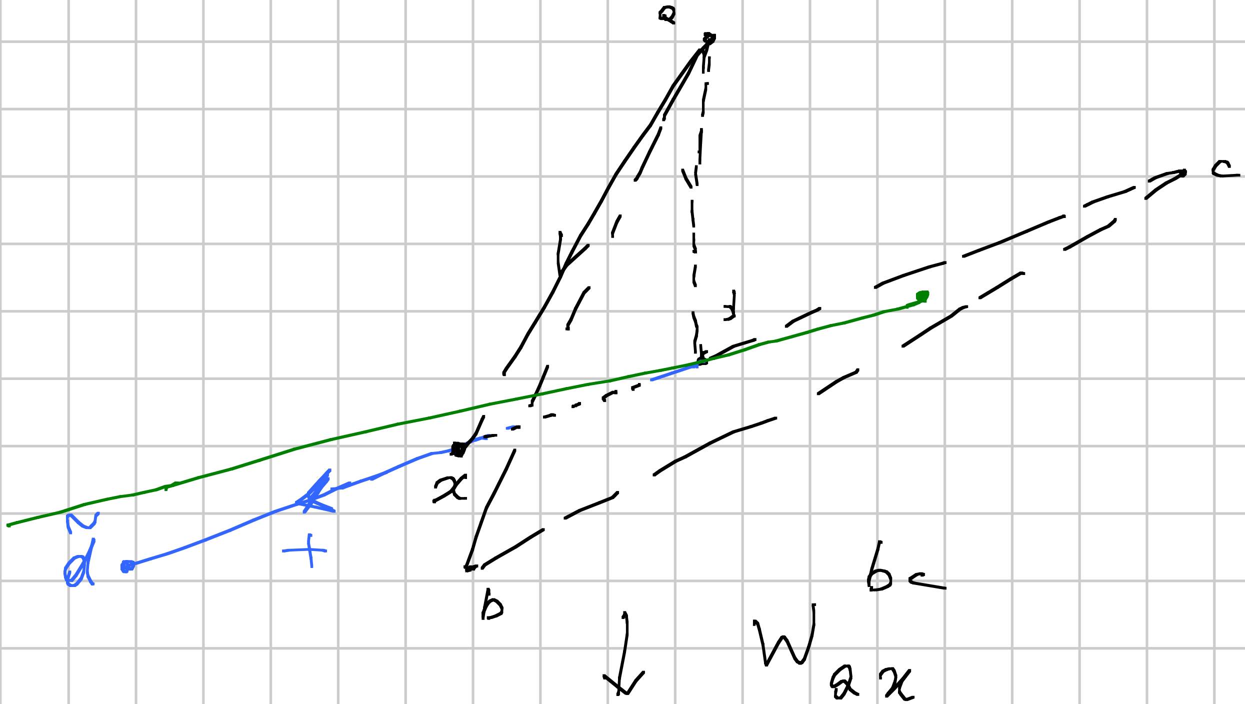


Non può funzionare nel caso non intrecciato.



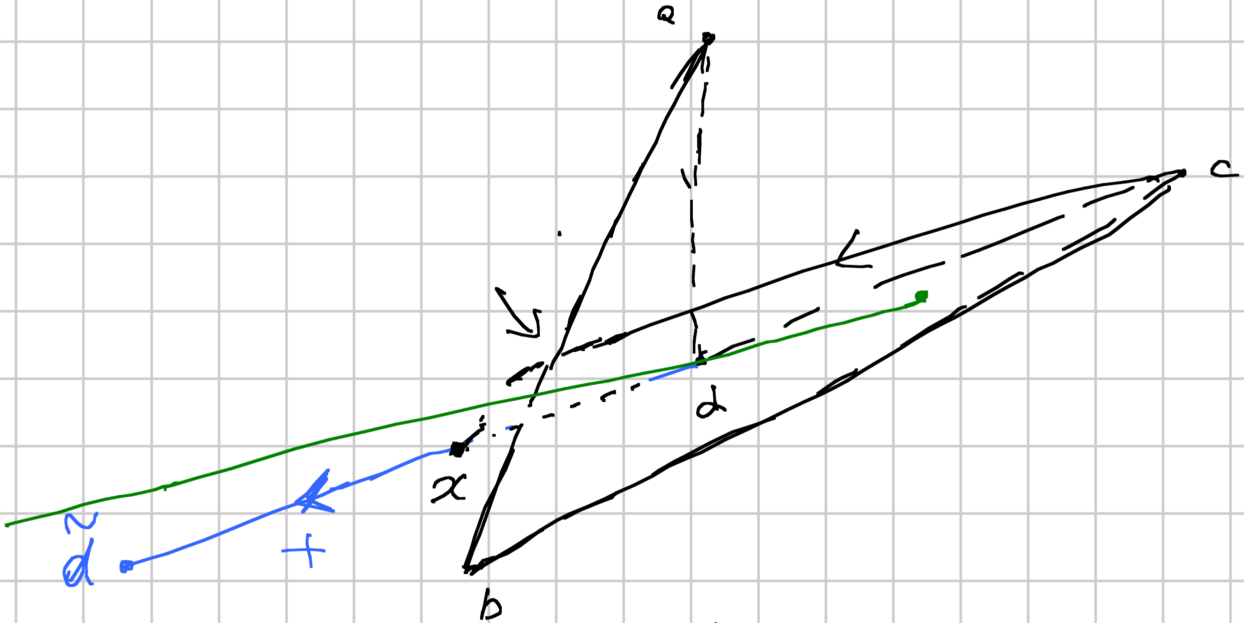
a
b
c
d


a
d
$\mathcal{R}^{x}_{d\tilde{d}}$ è omotetia
a
c
d
x
$\tilde{d}$
+
b
$x \in d\tilde{d}$
tra $[a,b] \cap [d,\tilde{d}]$ e $\tilde{d}$
$(\mathcal{R}^{d}_{ax})^{-1}$



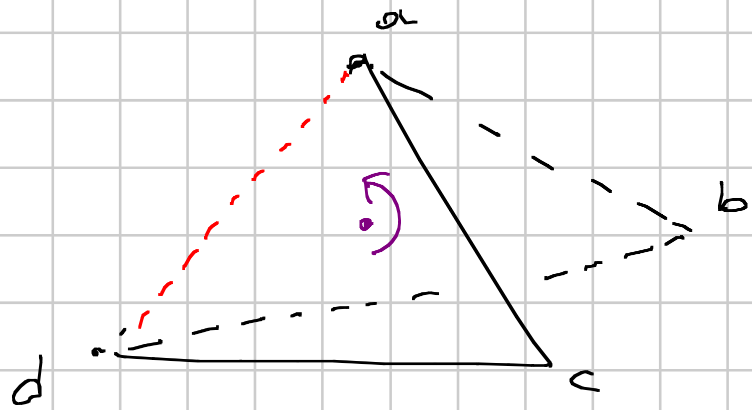
a
c
x
d
b
b
↓
W a x

W^{bc}_{ax}
vuotissima
intrecciata



finisco $\left(\mathcal{R}^{x}_{d\tilde{d}}\right)^{-1} \circ \mathcal{R}^{d}_{cx}$. ◪

T_0 :



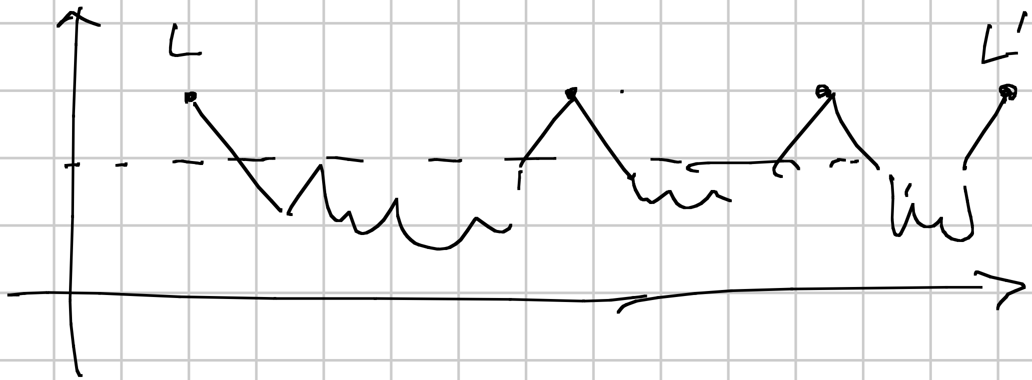
si fattorizza tramite
W e R

Se L', L'' sono ottenuti da mosse I sullo stesso lato e negativo di L allora L', L'' sono legati da W e R

$h(L) = \#$ lati negativi

Lem 1: Se $h>0$ e

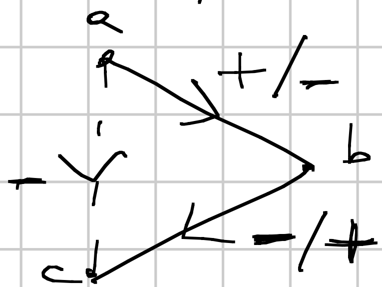
$\rightsquigarrow$



Dimo: sto usando le mosse $\mathcal{E}, \mathcal{R}, \mathcal{W}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$. Di che tipo può essere tale mossa?

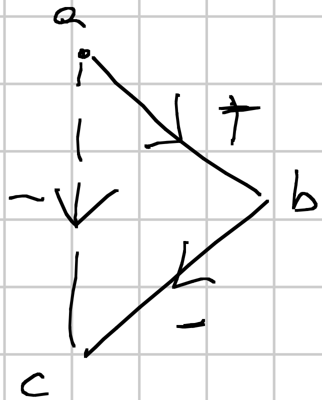
$\mathcal{R}$ sì, $\mathcal{W}$ sì, $\mathcal{S}$ no, $\mathcal{T}$ sì (ma è prodotto di $\mathcal{R}$ e $\mathcal{W}$)

Può essere $\mathcal{E}$ solo in questo caso:

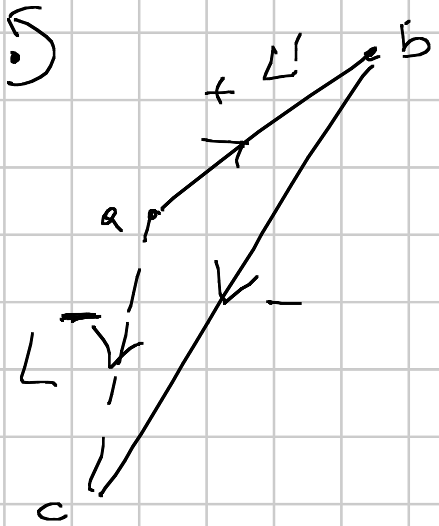


Caso $\mathcal{R} \circ \mathcal{W}$: $h(L) = h(L') > 0$ esiste un lato negativo e che non è quello su cui si applica $\mathcal{R} \circ \mathcal{W}$.
Posso supporre $\mathcal{W}$ vuota (via Prop. 2).
Allora esiste una sawtooth su e per L che evita
o $[a,b,c]$ se è $\mathcal{R}^{b}_{ac}$ o $[a,b,c,d]$ se è $\mathcal{W}^{bc}_{ad}$
(lemma di evitanza I caso (1)).

$$
\begin{tikzcd}
h & L \arrow[rrr, "M \in (\mathcal{R},\, W\text{ ruote})"] \arrow[dr, "f_e"'] & & & L' \\
h-1 & & \tilde{L} \arrow[r, "\tilde{M}"] & \tilde{L}' \arrow[ur, "f_e^{-1}"'] &
\end{tikzcd}
$$

Stessa tecnica per $\Sigma =$  se $h(L) = h(L') > 1$

Sia invece $h(L) = h(L') = 1$.

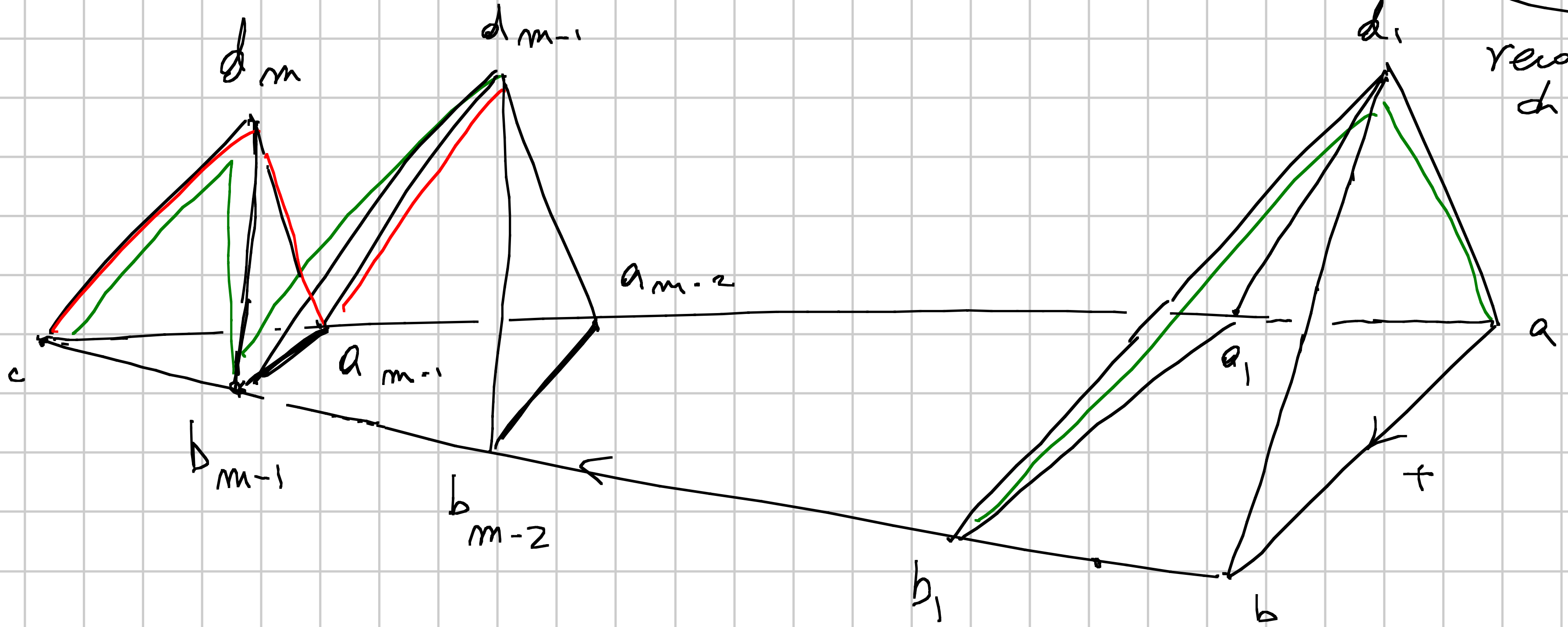


Supponiamo dapprima che sia possibile fare mosse S su $[a,c]$ per L e su $[b,c]$ per L' con suddivisioni

$a = a_0, a_1, \dots, a_m = c$ $\qquad$ $b = b_0, b_1, \dots, b_m = c$

con gli stessi vertici $d_1, \dots, d_m$ e ogni $a_j b_j$ pos o neg

vero a meno di perturbazione



$$L = L_0 \xrightarrow{J_{ac}} L_1 = a d_1 a_1 d_2 a_2 \dots d_{m-1} a_{m-1} d_m c$$

$$\longrightarrow L_2 = a d_1 a_1 d_2 a_2 \dots a_{m-2} d_{m-1} b_{m-1} d_m c \quad \text{vie}$$

Se $b_{m-1} a_{m-1} > 0$

$$\left(R^{a_{m-1}}_{b_{m-1}, d_m}\right)^{-1} \circ R^{b_{m-1}}_{d_{m-1}\, a_{m-1}}$$

simile se $b_{m-1} a_{m-1} < 0$.

Continuo fino a

$$L_m = a d_1 b_1 d_2 b_2 \dots \quad b_{m-1} d_m c$$

$$L_m \xrightarrow{R^{b}_{ad_1}} a b d_1 \dots$$

$$\xrightarrow{T^{-1}_{bc}} L'$$

Osservazione: dato xy lato di L negativo la condizione perché esista una sawtooth su xy

con vertici $q_1, \dots, q_m$ e che esistano

$x = p_0, p_1, \dots, p_m = y$ t.c.

$$p_{i-1} q_i > 0$$

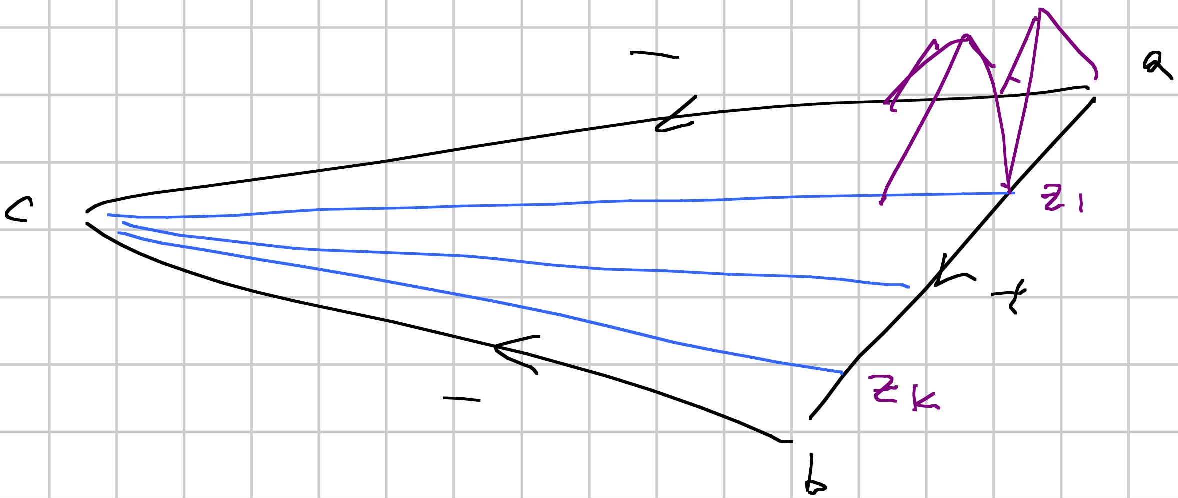
$$q_i p_i > 0$$

$$[p_{i-1}, q_i, p_i] \cap L = [p_{i-1}, p_i]$$

è condizione aperta su x, y : $\|x' - x\|, \|y' - y\| << 1$

definisco q_i' il punto di $x'y'$ più vicino a q_i -

Allora:

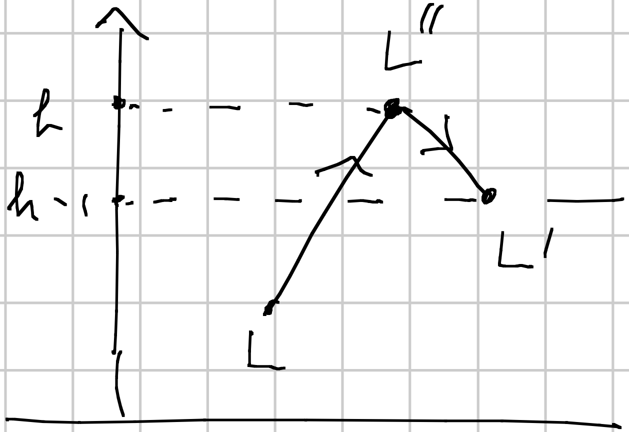


uso ripetutamente alternati metodo precedente

+ cambi sonitodd, tutti ad $h = 0$

$\boxed{1}$

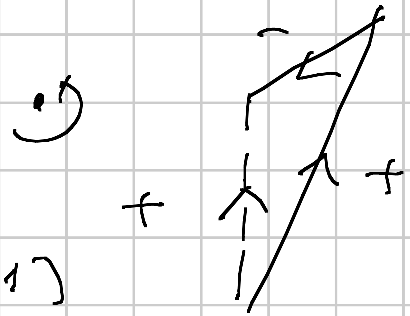
Lem 2 :



$\Rightarrow$

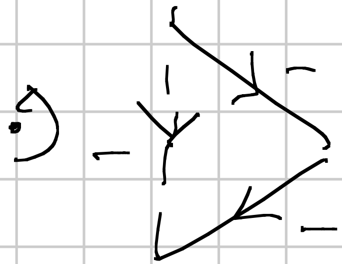
$L \to L''$, $L' \to L''$?

Dim : di che tipo possono essere R, W, E; $S^{-1}S$; Ex.

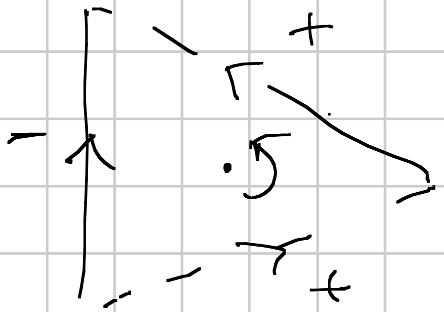


[1]

[2]



[3]



caso particolare di $\mathcal{J}^{-1}$

Per simmetria considero

(1) $\quad L''_{h+1} \xrightarrow{\mathcal{J}} L_h \qquad L''_{h+1} \xrightarrow{\mathcal{J}} L'_h$

(2) $\quad L_{h+1-j} \xrightarrow{\varepsilon^{[i]}} L''_{h+1} \xrightarrow{\mathcal{J}} L'_h \qquad i = 1,2,3$

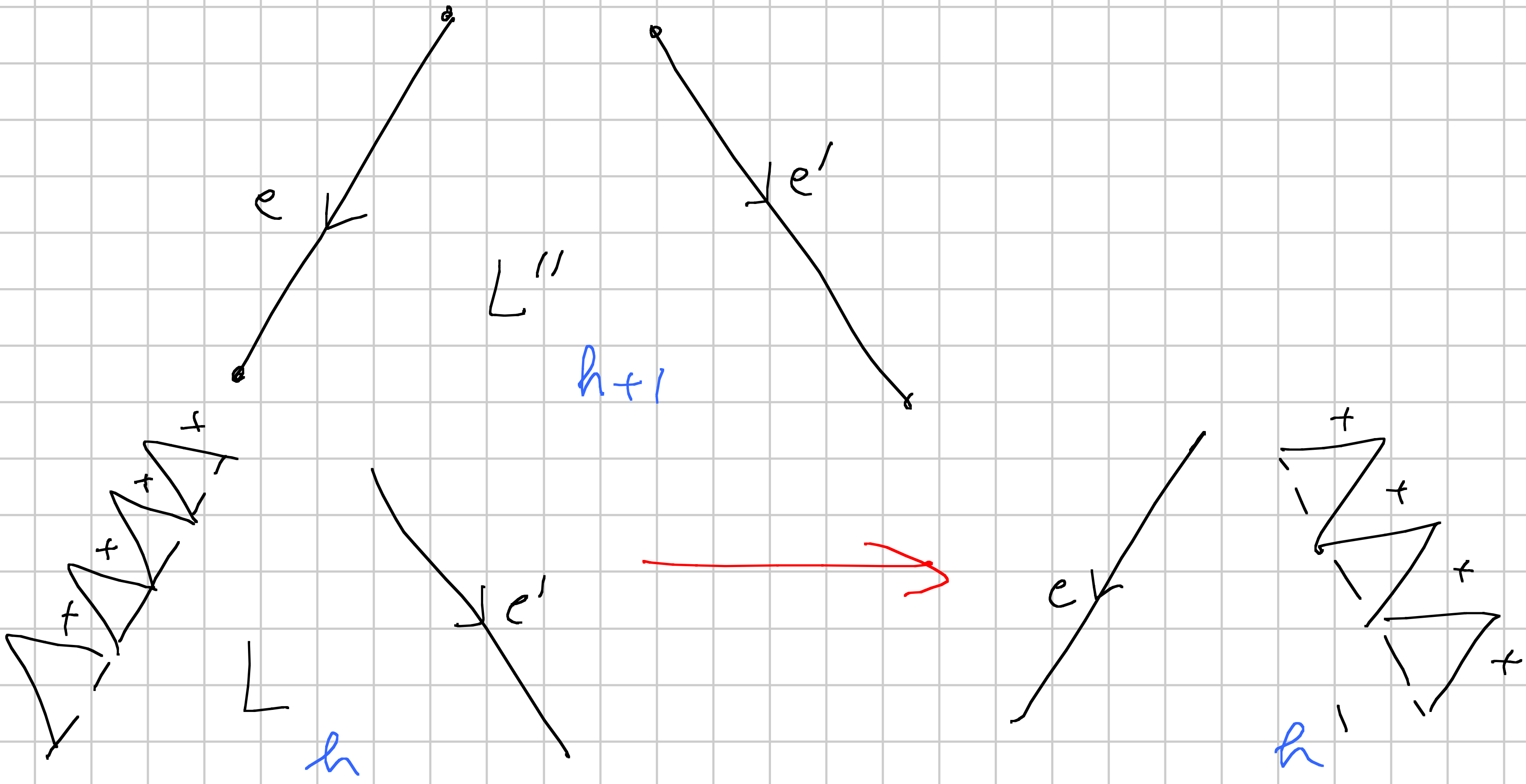
$j=1$ se $i=1,3 \qquad j=2$ se $i=2$

(3) $\quad L \xrightarrow{\mathcal{E}^{[i]}} L'' \qquad L' \xrightarrow{\mathcal{E}^{[i']}} L''$

Caso (1) : $\quad L'' \xrightarrow{\mathcal{I}} L \quad , \quad L'' \xrightarrow{\mathcal{I}} L'$.

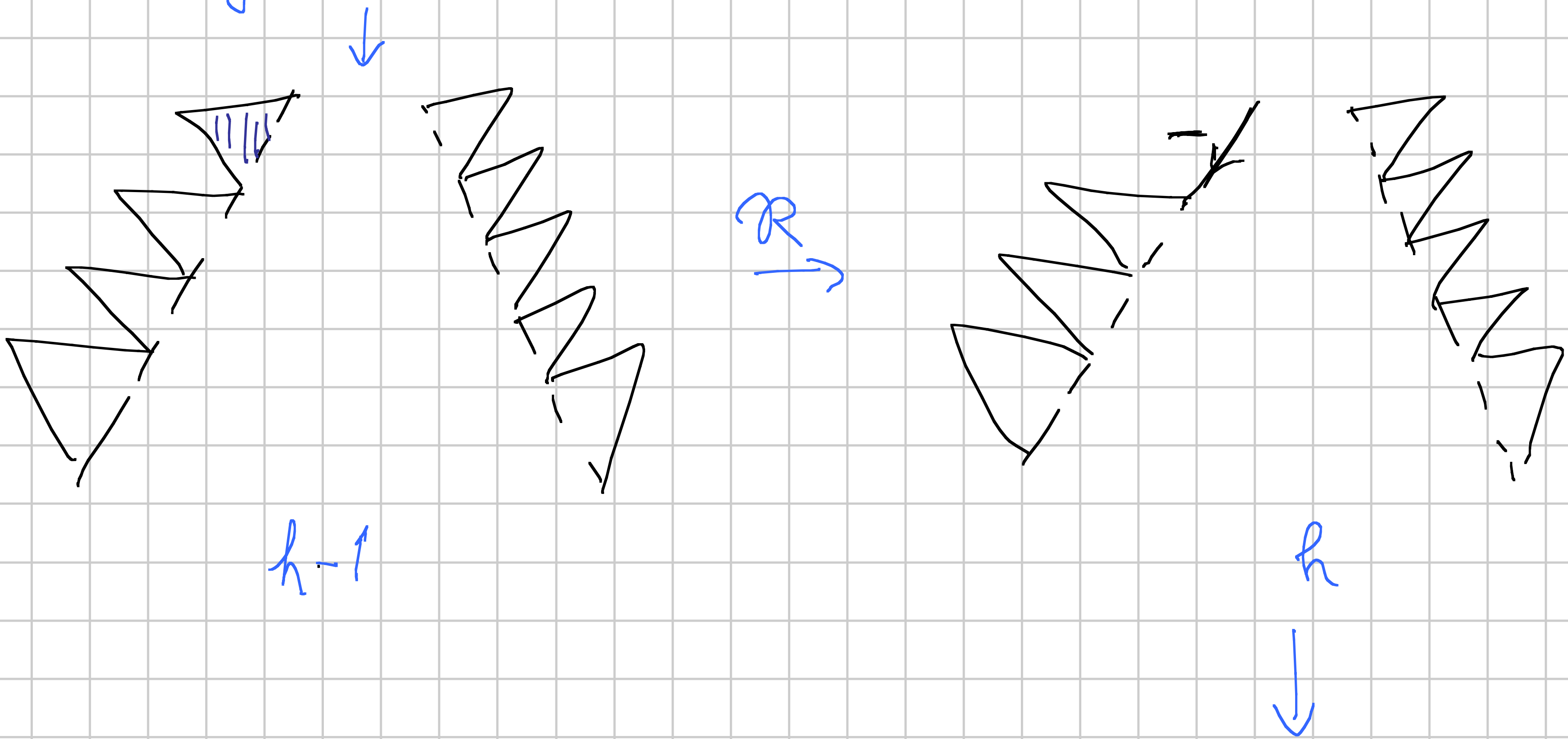
Se le due $\mathcal{I}$ sono sullo stesso lato di L'' è cambio sawtooth : fatto da $\mathcal{R}$ e W ad altezza h .

Supponiamo che avvengano su lati e, e' distinti :

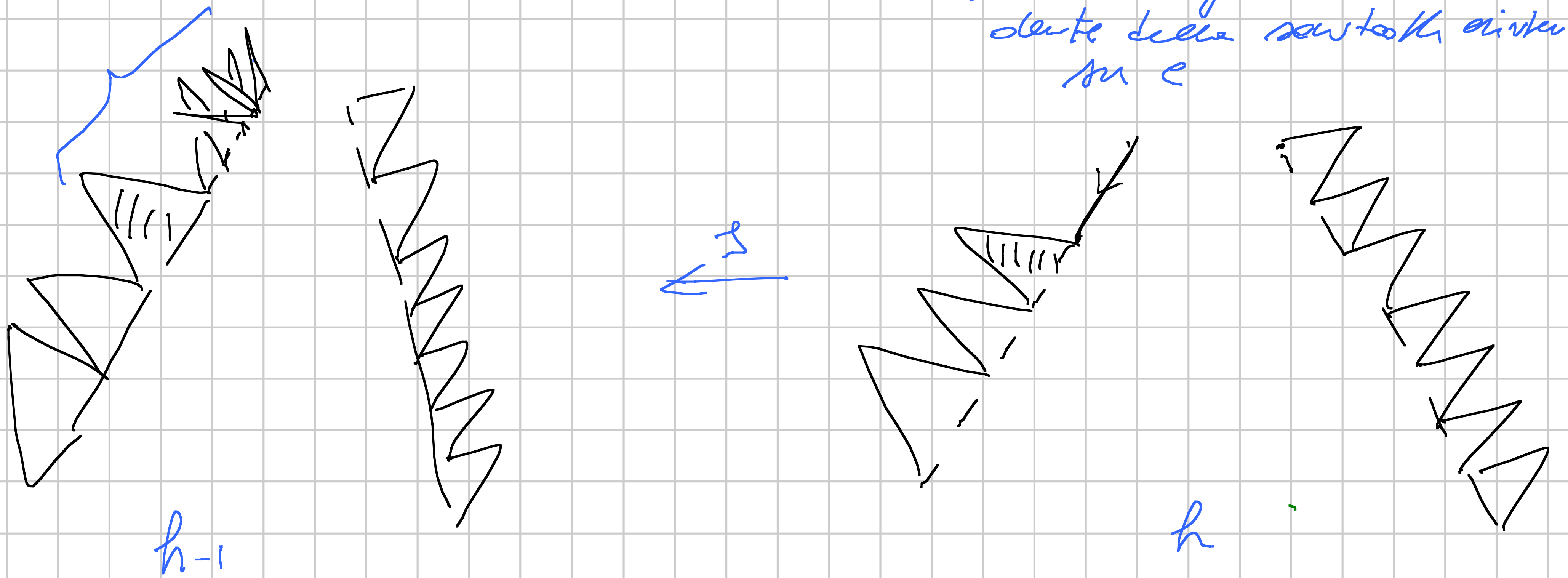


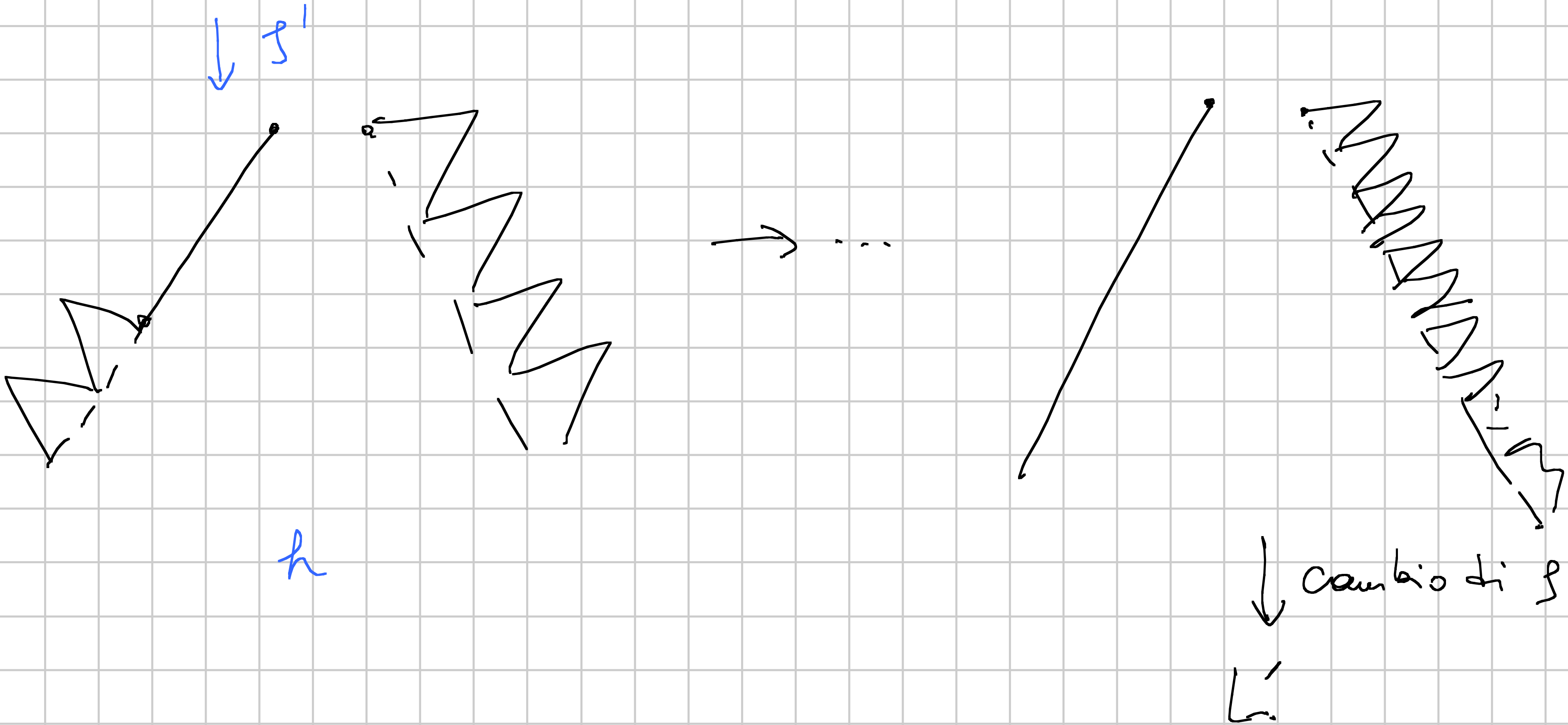
e
e'
L''
h+1
L
h
e'
e
h

esempio ove J su $e' \subset L$ che eviti
il primo triangolo della sawtooth su e



cambio sawtooth su e' in modo che sia disgiunto dal secondo dente della sawtooth diventa su e




f'
h
cambio di f
L'

caso (2) : prox sett.

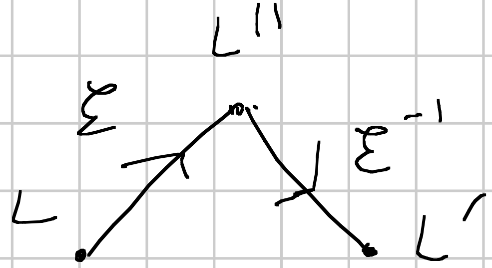
(3) $\left(\mathcal{E}^{z}_{xy}\right)^{-1} \circ \mathcal{E}^{b}_{ac} = M$ di tipo i, i'

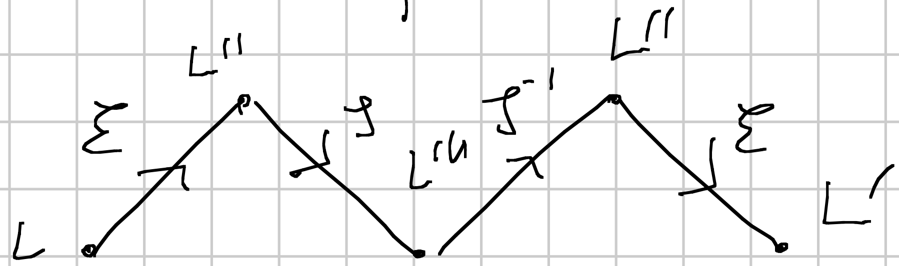
Almeno un lato prodotto da $\mathcal{E}^{b}_{ac}$ è neg.

$\Rightarrow$ sia $\mathcal{J}$ una sawtooth su di lui e subito essa stessa inversa

$$M = \underbrace{\mathcal{E}^{-1} \circ \mathcal{J}^{-1}} \circ \underbrace{\mathcal{J} \circ \mathcal{E}}$$

applico (2) e quindi





.

∎