

Teoria dei nodi 13/10/16

$$\pi_1(\mathbb{S}^3, \text{triv}) = \langle x, y \mid x y x = y x y \rangle$$

$$a = xy, b = yxy$$

$$y = b \cdot a^{-1}$$

$$x = a^2 \cdot b^{-1}$$

$$x y x = y x y$$

$$\cancel{a^2} \cdot \cancel{b^{-1}} \cdot \cancel{b} a^{-1} \cdot a^2 \cdot b^{-1} = b \cdot e^{-1} \cdot \cancel{a^2} \cdot \cancel{b^{-1}} \cdot \cancel{b} a^{-1}$$

$$\dots \quad a^3 = b^2$$

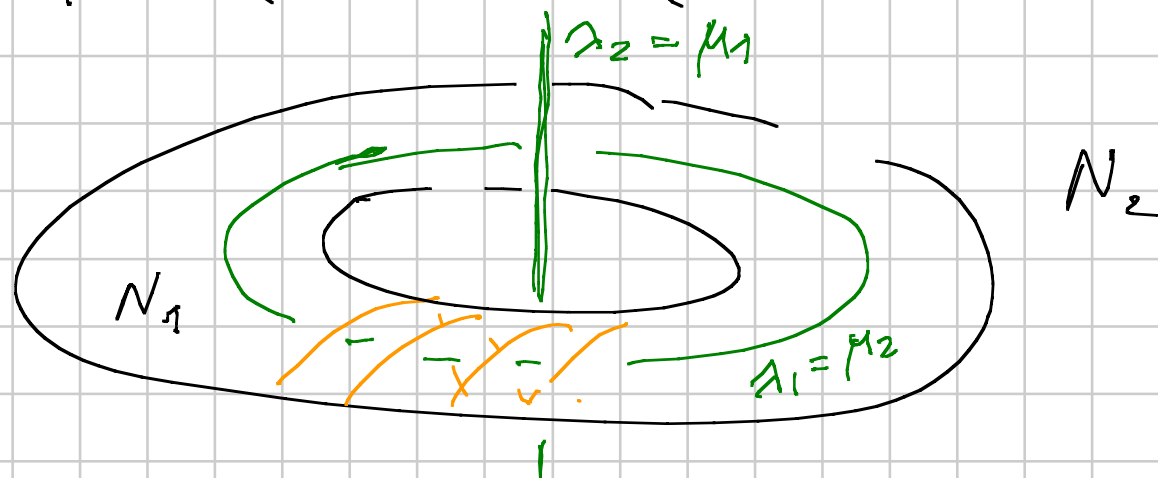
$$\Rightarrow \pi_1(\mathbb{S}^3, \text{triv}) = \langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle.$$

$$\underline{Obs}: \text{trf} = K_{3,2}$$

$$\underline{Prop}: \pi_1(S^3 \setminus K_{p,q}) = \langle a, b \mid a' = b^q \rangle =: G_{p,q}$$

$$\underline{Dim}: K_{p,q} \subset T, \quad \bar{T} = \partial N_1 = \partial N_2 \quad N_1 \cong N_2 \cong D^2 \times S^1$$

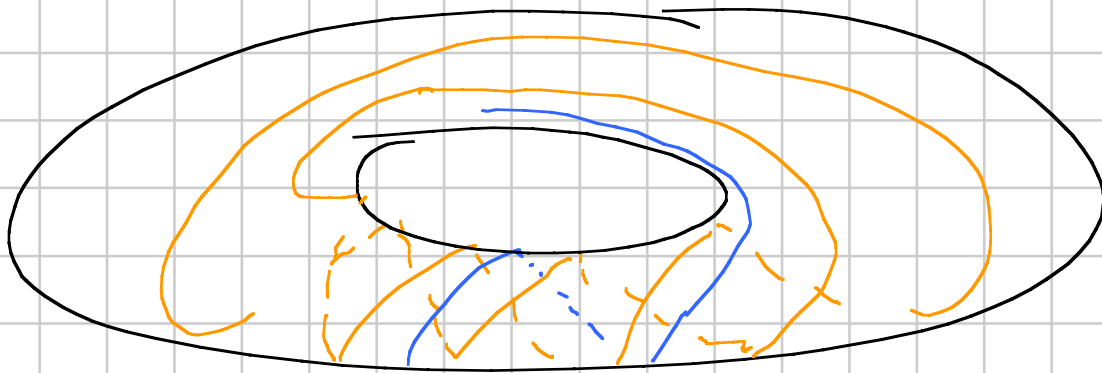
$$S^3 \setminus K_{p,q} = (N_1 \setminus K_{p,q}) \cup (N_2 \setminus K_{p,q})$$



$$\rightarrow \pi_1(S^3 \setminus K_{p,q}) = \frac{\pi_1(N_1 \setminus K_{p,q}) * \pi_1(N_2 \setminus K_{p,q})}{\pi_1(T \setminus K_{p,q})}$$

$$= \frac{\pi_1(N_1) * \pi_1(N_2)}{\pi_1(K_{p,q})} = \frac{\langle \lambda_1 \rangle * \langle \lambda_2 \rangle}{\lambda_1^p \cdot \mu_1^q}$$

$$= \langle \lambda_1, \lambda_2 \mid \lambda_1^p \cdot \lambda_2^q \rangle$$



$$\underline{Oss}: \pi_1(\mathbb{S}^3, L) \cong \pi_1(\mathbb{S}^3, \sigma(L)) \quad \sigma = \text{riflessione}$$

$$\underline{Oss}: \sigma(K_{p,q}) = K_{p,-q}$$

$$K_{-p,-q} = K_{p,q}$$

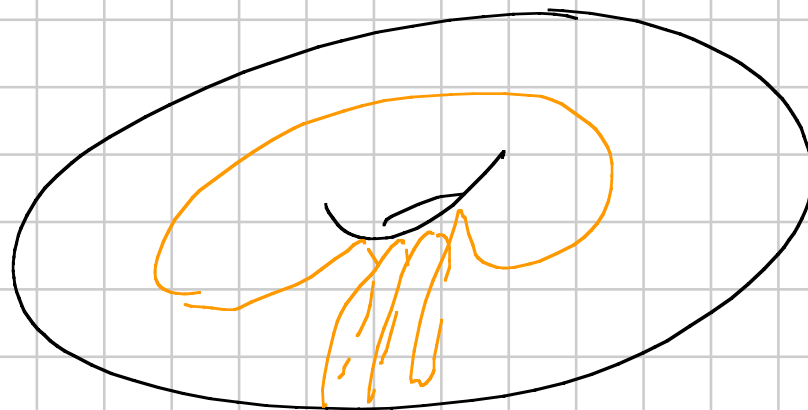
$$K_{p,q} = K_{q,p}$$

$\Rightarrow$ guardando i nodi e meno di equiv. (isotopie + σ)

per cui $K_{p,q}$ è equiv. a $K_{p,q}$ con $p > q \geq 1$

(p, q coprimi) -

Oss: $K_{p,1} = \bigcirc$



Teo: se $p > q > 1$ allora $G_{p,q} = \langle x, y \mid x^p = y^q \rangle$ / isomorf.
 determina $p, q \Rightarrow$ determina $K_{p,q}$ / equiv.

Dimo: sia $z = x^p = y^q \in G_{p,q}$ -

Affermo:

$$(1) \quad z \in Z(G_{p,q})$$

$$(2) \quad \langle z \rangle \trianglelefteq G(p,q)$$

$$(3) \quad G_{p,q}/\langle z \rangle \cong \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$$

9) infatti: (1) $z = x^p = y^q \Rightarrow [z, x] = [z, y] = 1 \Rightarrow z \in Z(G_{p,q})$

(2) ok (3) $\phi: G_{p,q} \rightarrow \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$

$$\begin{array}{ccc} & \downarrow & \downarrow \\ & \langle u \rangle & \langle v \rangle \end{array}$$

$$\phi(x) = u \quad \phi(y) = v$$

Ben def perché $\phi(x^p) = u^p = 1 \quad \phi(y^q) = v^q = 1$

Ciò comporta anche che $z \in \ker \phi$.

Sia $w \in \ker \phi$, $w = x^{a_1} \cdot y^{b_1} \cdot \dots \cdot x^{a_m} \cdot y^{b_m}$

$$\Rightarrow \phi(w) = u^{[a_1]_p} \cdot v^{[b_1]_q} \cdot \dots \cdot u^{[a_m]_p} \cdot v^{[b_m]_q}$$

Ogni el. di $\mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$ si scrive in modo unico come

$$1, \quad u^{\alpha_1} \cdot v^{\beta_1} \cdot \dots \cdot u^{\alpha_k} \cdot v^{\beta_k} \quad \text{con } \alpha_i \in \mathbb{Z}/p \quad \alpha_i \neq 0$$
$$u^{\alpha_0} \cdot v^{\beta_1} \cdot \dots \cdot u^{\alpha_k} \quad \beta_i \in \mathbb{Z}/q \quad \beta_i \neq 0$$
$$v^{\beta_0} \cdot u^{\alpha_1} \cdot \dots \cdot v^{\beta_k}$$

Poiché $\phi(w) = 1 \in \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$ qualcuno dei

$[a_i]_p$ oppure $[b_i]_q$ deve essere 0

$\Rightarrow$ nelle parole w compare $\mathbb{Z}^m$;

$\bar{e}$ centrale; lo sposta all'inizio, lo butta via, trova

$w' \in \text{Ker } \phi$ più corte, indichiamole con d_n .

Claim: A, B gruppi non banali $\Rightarrow \mathbb{Z}(A * B) = 1$.

Infatti ogni el. $\neq 1$ di $A * B$ si scrive in modo unico

come

$a_1 b_1 \dots a_n b_n$

$a_i \neq 1_A, b_j \neq 1_B$

non commute con d_n^{-1}

$$a_0 b_1 \dots b_m a_m$$

non commutative con a_n^{-1}

$$b_0 a_1 \dots a_m b_m$$

„

b_n^{-1}

OK.

Consequenza : $Z(G_{p,q}) = \langle z \rangle \quad (p > q > 1)$

Infatti $\phi : G_{p,q} \rightarrow G_{p,q} / \langle z \rangle = \mathbb{Z}/p * \mathbb{Z}/q$

Se $w \in Z(G_{p,q})$ ho $\phi(w) \in Z(\mathbb{Z}/p * \mathbb{Z}/q) = \{1\}$

$\Rightarrow w \in \text{Ker } \phi = \langle z \rangle$

Conclusione:

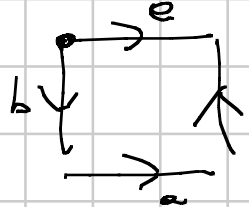
$$G_{p,q} \longrightarrow G_{p,q} / Z(G_{p,q}) = \mathbb{Z}/p * \mathbb{Z}/q \xrightarrow{ab.} \mathbb{Z}/p \times \mathbb{Z}/q$$

$\downarrow$
p.q

□

Esercizio: non esiste alcun

$$\phi: \pi_1(S^3 \setminus \text{node}) \twoheadrightarrow \pi_1(\text{Klein}) \quad \text{omomorfismo}$$

Infatti: $\pi_1(\text{Klein}) =$  $= \langle a, b \mid \underline{ba = ab^{-1}} \rangle$

$$b^p \cdot a^m = a^m \cdot b^{(-1)^m \cdot p} ; \text{ o ger. el. } \pi_1(\text{Klein}) \text{ é satisfeito}$$

in modo unico como $a^m \cdot b^p$.

$$\phi : \pi_1(\mathbb{S}^3, \text{modo}) \rightarrow \pi_1(\text{Klein})$$

$$\langle x_1, \dots, x_m \mid r_1, \dots, r_{m-1} \rangle \quad \phi(x_j) = a^{m_j} \cdot b^{p_j}$$

$$r_i : x_j \cdot x_k = x_k \cdot x_l$$

$$a^{m_j} \cdot b^{p_j} \cdot a^{m_k} \cdot b^{p_k} = a^{m_k} \cdot b^{p_k} \cdot a^{m_l} \cdot b^{p_l}$$

$$a^{m_j+m_k} \cdot b^{(-1)^{m_k} p_j + p_k} = a^{m_k+m_l} \cdot b^{(-1)^{m_l} p_k + p_l}$$

$$\Rightarrow m_i = m_l \Rightarrow m_i \equiv m$$

Se m fosse pari, ogni el. d. $I_w(\phi)$ avrebbe
potenza pari di $e \Rightarrow$ non sup.

Dunque m è dispari:

$$\Rightarrow -P_i + P_k = -P_k + P_l$$

$$\Rightarrow P_i + P_l = 2P_k$$

Se prendo un gioco dove P_k è massimale

$$\rightarrow P_i = P_l = P_k \Rightarrow P_i \equiv P$$

$$\Rightarrow \phi(a_i) = a^m \cdot b^p$$

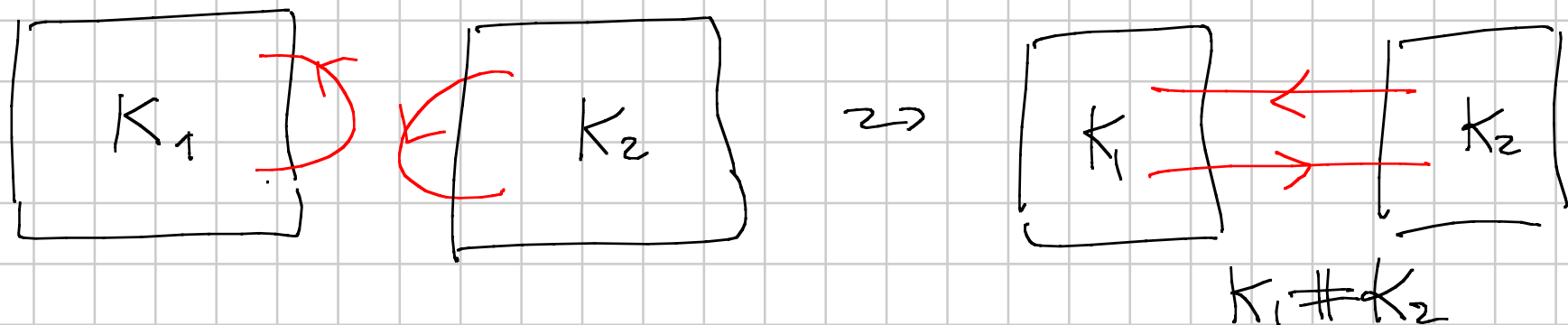
$$\Rightarrow \text{Im}(\phi) = \langle a^m \cdot b^p \rangle \quad \text{abeliano} \neq \pi_1(\text{Klein})$$

Ese: determinare tutti

$$\phi: \langle a, b \mid a^3 = b^2 \rangle \rightarrow \mathbb{F}_5 \quad / \text{coniugio}$$

————— o —————

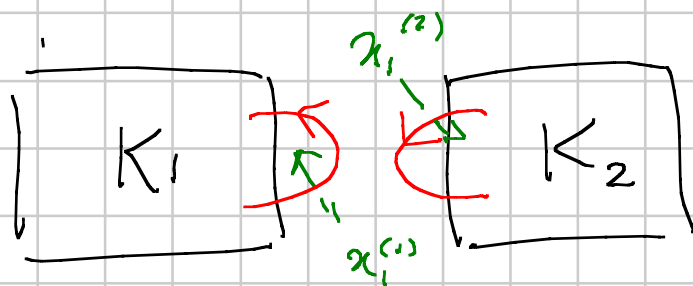
Somme connesse di due nodi orientati:



Fatto: operazione ben definita

(bisogna scegliere piccolo arco orientato in K_1 e K_2 :
sono tutti isolati fra loro).

Prop: se



$$\pi_1(K_1) = \langle \alpha_1^{(1)} \alpha_2^{(1)} \dots \mid \pi_1^{(1)} \dots \rangle$$

$$\pi_1(K_2) = \langle \alpha_1^{(2)} \alpha_2^{(2)} \dots \mid \pi_1^{(2)} \dots \rangle$$

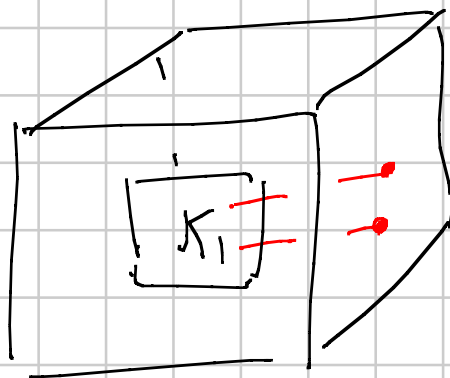
$$\Rightarrow \pi_1(K_1 \# K_2) = \langle x_1^{(1)}, x_2^{(1)}, \dots$$

$$x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, \dots$$

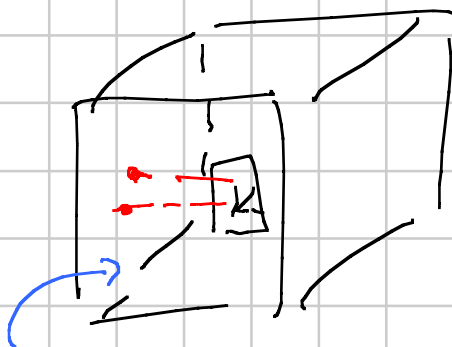
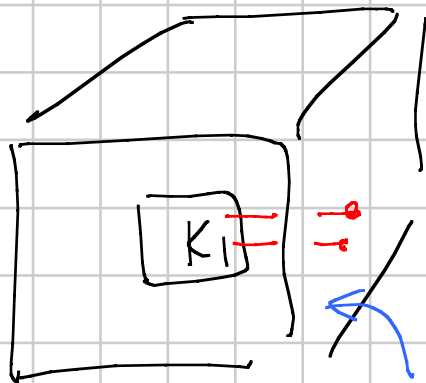
$$\left| \begin{array}{l} x_1^{(1)} \dots \\ x_1^{(2)} \dots \end{array} \right.$$

$$x_1^{(1)} = x_1^{(2)} \rangle$$

Dim: $S^3 \setminus K_1 \cong \mathbb{R}^2$



(ho esploso un pto di K_1 ed disco complementare)



Preliamo $K_1 \# K_2$
incollando questi
loop.



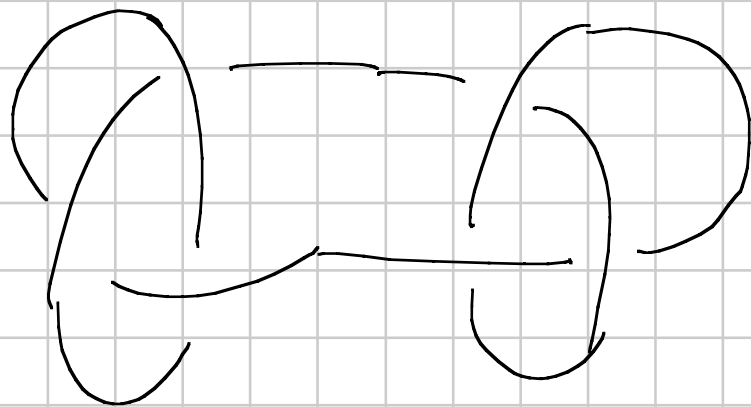
$$\Rightarrow \pi_1(K_1 \# K_2) = \frac{\pi_1(K_1) * \pi_1(K_2)}{\langle x_1^{(1)} = x_1^{(2)} \rangle}$$



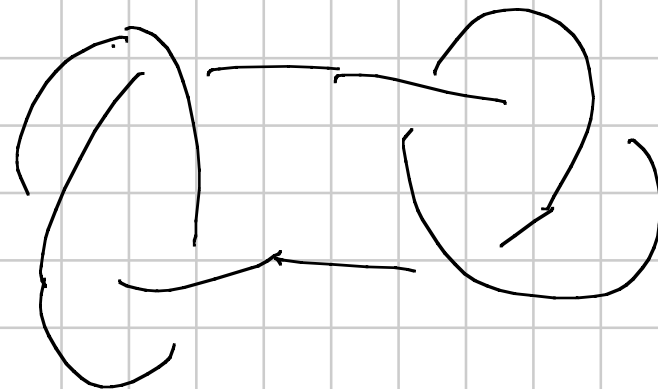
Veicolo:



ma hanno stesso π_1 ,
e complementari a se stessi.



square



granny

hanno π_1 del complementare isomorfi

Tuttavia (non dimostrato) : hanno complementari non
omomorfi -

(Sono nodi non equivalenti)

— o —

Fatto: date due presentazioni finite di gruppi $\bar{\Gamma}$ e $\bar{\Gamma}'$ è difficile stabilire se essi sono isomorfi.

Q: cosa dice l'omologia? A: molto poco.

Visto: $H_1(S^3, \text{mod}) = \mathbb{Z} = \langle \mu \rangle$.

Notazione $U = U(K) \cong D^2 \times S^1$
 $E = E(K) = S^3 \setminus U$

$$T = \partial U = \partial E$$

$$U \cup E = S^3$$

$$H_3(S^3) = \mathbb{Z}$$

$$\downarrow$$

$$H_2(T) = \mathbb{Z}$$

$$\downarrow$$

$$H_2(U) \oplus H_2(E)$$

$$\underbrace{\quad}_{0}$$

$$\downarrow$$

$$H_2(S^3) = 0$$

$\downarrow \text{id}$ (segue dalla costruzione di ∂
in Mayer-Vietoris)

$$\Rightarrow H_2(E) = 0.$$

Teorema: $H_j(S^3 \setminus (K_1 \cup \dots \cup K_m)) \cong \begin{cases} \mathbb{Z}^m = \langle \mu_1, \dots, \mu_m \rangle & j=1 \\ \mathbb{Z}^{m-1} = \langle T_2, \dots, T_m \rangle & j=2 \end{cases}$

Dim: per induzione; $m=1$ visto; passo induttivo -

Considero $L = K_1 \cup \dots \cup K_m \cup K$

$$E = E(L)$$

$$E_m = E(K_1 \cup \dots \cup K_m)$$

$$U = U(K)$$

$$T = \partial U$$

$$E_m = E \cup U$$

$$E \cap U = T$$

$$H_3(E_m) = 0$$

$$\downarrow$$

$$H_2(T) = \mathbb{Z} = \langle T \rangle$$

$$\downarrow$$

$$H_2(U) \oplus H_2(E) = H_2(E)$$

$$\downarrow$$

$$H_2(E_m) = \mathbb{Z}^{m-1} = \langle T_2, \dots, T_m \rangle$$

$$\downarrow$$

$$H_1(T) = \mathbb{Z}^2 = \langle \lambda_T, \mu_T \rangle$$

mappe nulle poiché $T_j \cap T = \emptyset$ per $j=2, \dots, m$

$$\downarrow$$

$$H_1(U) \oplus H_1(E) = (\mathbb{Z} = \langle \lambda_T \rangle) \oplus H_1(E)$$

$$\Rightarrow H_2(E) \cong \mathbb{Z}^m = \langle T_2, \dots, T_m, T \rangle$$

$$\Rightarrow H_1(E)$$

$$H_1(E_m) = \mathbb{Z}^m = \langle \mu_1, \dots, \mu_m \rangle$$

$$\downarrow$$

$$\tilde{H}_0(T) = 0$$

$$= \mathbb{Z}^{m+1} = \langle \mu_1, \dots, \mu_m, \mu_T \rangle$$



Teo (Jordan): $\gamma \subset \mathbb{R}^2$, $\gamma \cong_{\text{omeo}} S^1$

$$\Rightarrow \mathbb{R}^2 \setminus \gamma = L \cup I \quad \partial L = \gamma \quad \bar{L} \cong_{\text{omeo}} D^2$$

Fatto: falso in $\mathbb{R}^3$ per $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, $\Sigma \cong_{\text{omeo}} S^2$.

Controesempio: sfere connesse di Alexander. Però

Teorema: $\Sigma \subset S^3$, Σ liscia o PL

$$\Sigma \underset{\text{liscia}}{\cong} S^2 / \Sigma \underset{PL}{\cong} S^2$$

$$\Rightarrow S^3 \setminus \Sigma = B_1 \cup B_2, \quad \Sigma = \partial B_1 = \partial B_2$$

$$\overline{B_1} \cong \overline{B_2} \cong D^3.$$

Dim (liscia): basta supporre $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$ e

provare che $\Sigma = \partial B$, $\overline{B} \cong D^3$.

Scelgo una funzione altezza $z: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ t.c.

$z|_{\Sigma}$ sia una funzione di Morse.

Definizione: funz. di Morse: $M^{(m)}$ m -varietà liscia ($M \subset \mathbb{R}^N$ loc. grafico $\mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^{N-m}$)
 $f: M \rightarrow \mathbb{R}$; $x \in M$ pto critico se $df(x) = 0$;

nei punti in cui $df(x) = 0$ ha senso considerare
la matrice hessiana delle derivate seconde.

Un pto critico è non degenere se la matrice hessiana

ha $\det \neq 0$, cioè tutti gli autovalori sono non nulli.

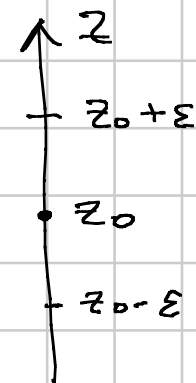
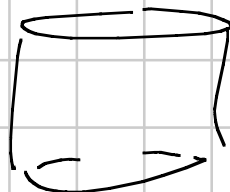
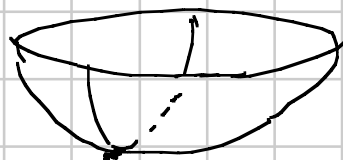
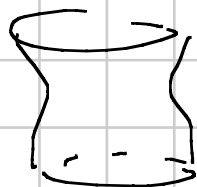
Una funz. di Morse è una f con pts critici tutti non deg.

Fatto: a meno di piccole perturbazione C^∞ ogni f diventa una funzione di Morse. Inoltre i valori critici sono distinti.

Funzione di Morse per $\Sigma^{(2)} \xrightarrow{z} \mathbb{R}$:

(pensiamo $\Sigma \subset \mathbb{R}^3$, z l'altezza) i pts critici sono

++



$\rightarrow = ++$ ribbello

+ -

