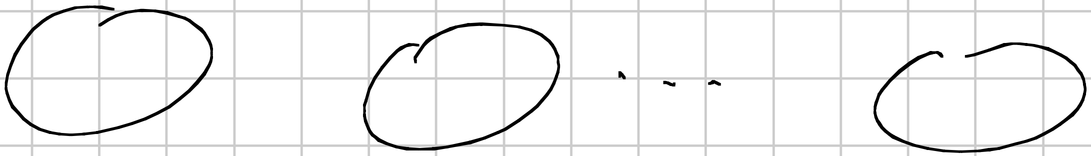
$$\pi_1(A \cup B_j) = \langle x_1 \dots x_p z_j \mid z_j^{-1} \cdot x_s ,\ z_j^{-1} \cdot x_p^{-1} \cdot x_q \cdot x_p \rangle$$

$$= \langle x_1 \dots x_p \mid x_q x_p = x_p x_s \rangle . \qquad \square$$

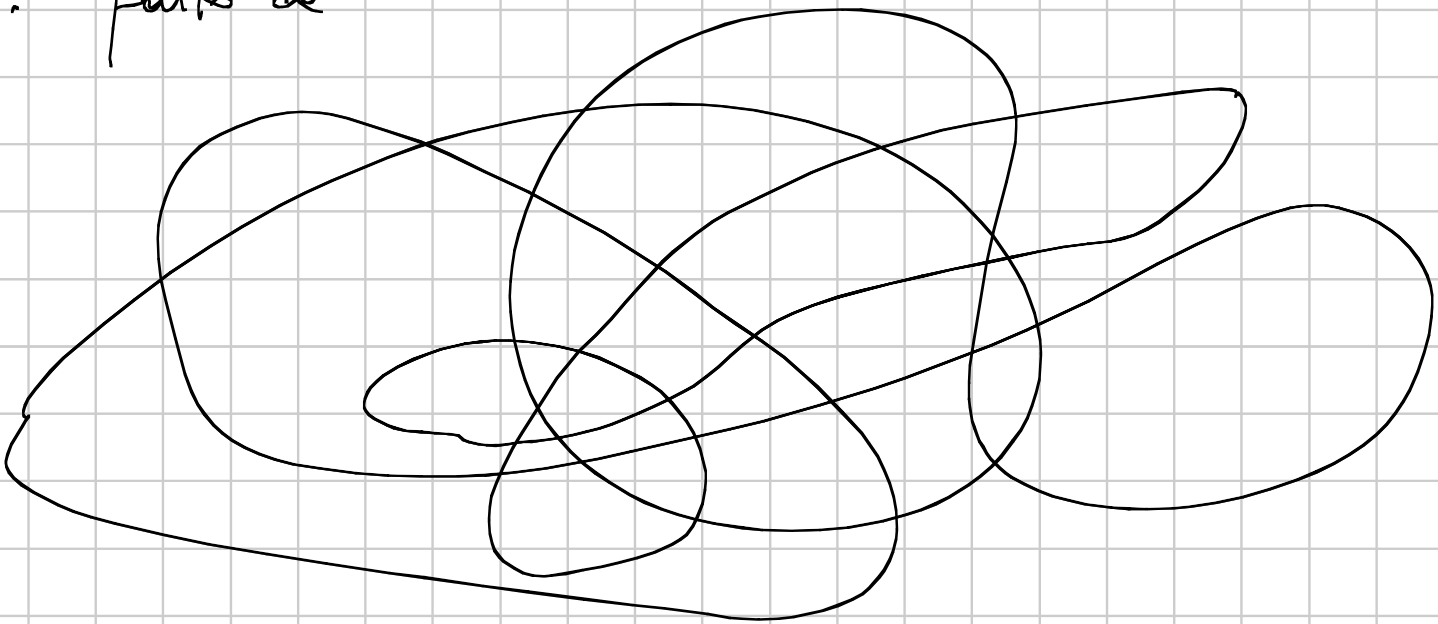
Oss: in qualsiasi diagramma il numero di archi che sono segmenti (o), è uguale al numero di incroci.

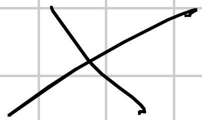
Dim 1: • provare che c − o non cambia con switch

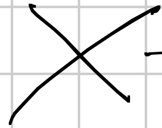
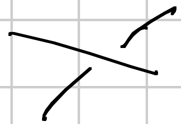
(facile)

- provare che non cambia con $R_{I} / II / III$
- per  $c = o = 0$. $\boxed{\text{Ts}}$

<u>Dim 2</u> : parto da



considerando che in  nessuno dei due è interrotto.

Ora $c = o = 0$; basta provare che qualsiasi  $\longrightarrow$ 

aumenta sia c sia o di 1. $\square$

Cor: $\pi_1(S^3 \setminus L) = \langle x_1, \dots, x_n \mid r_1, \dots, r_n \rangle$

Oss: una qualsiasi delle relazioni può essere omessa.

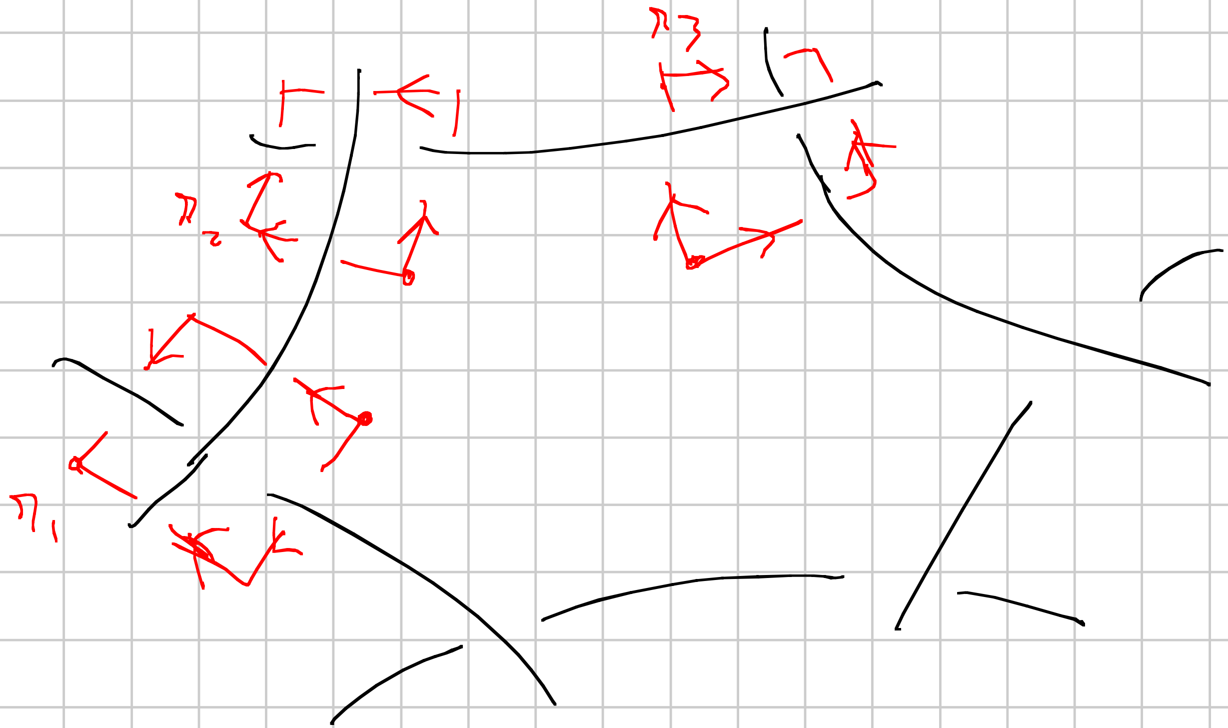
"Dim"

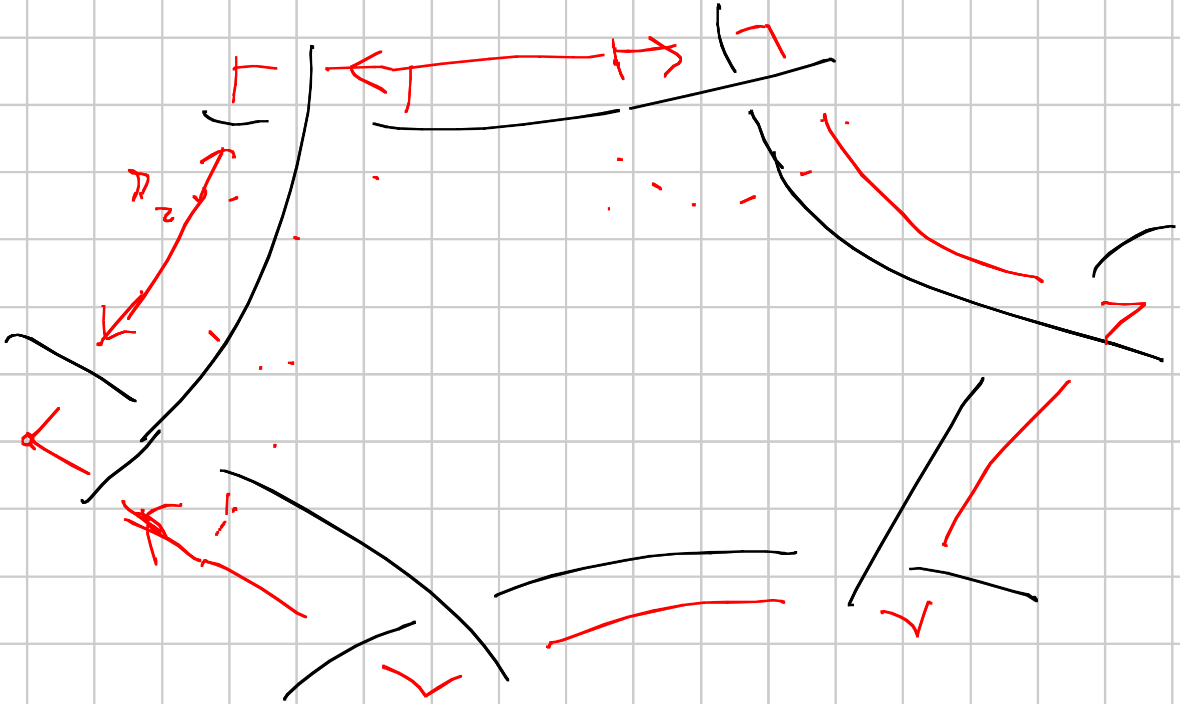
(Un diagramma può essere split $\boxed{D_1}$ $\boxed{D_2}$

$$\pi_1(S^3 \setminus L) \cong \pi_1(S^3 \setminus L_1) * \pi_1(S^3 \setminus L_2)$$

caso che escludo sempre. Per diagrammi non split le regioni di $S^2 \setminus$ proiezione sono dischi.)

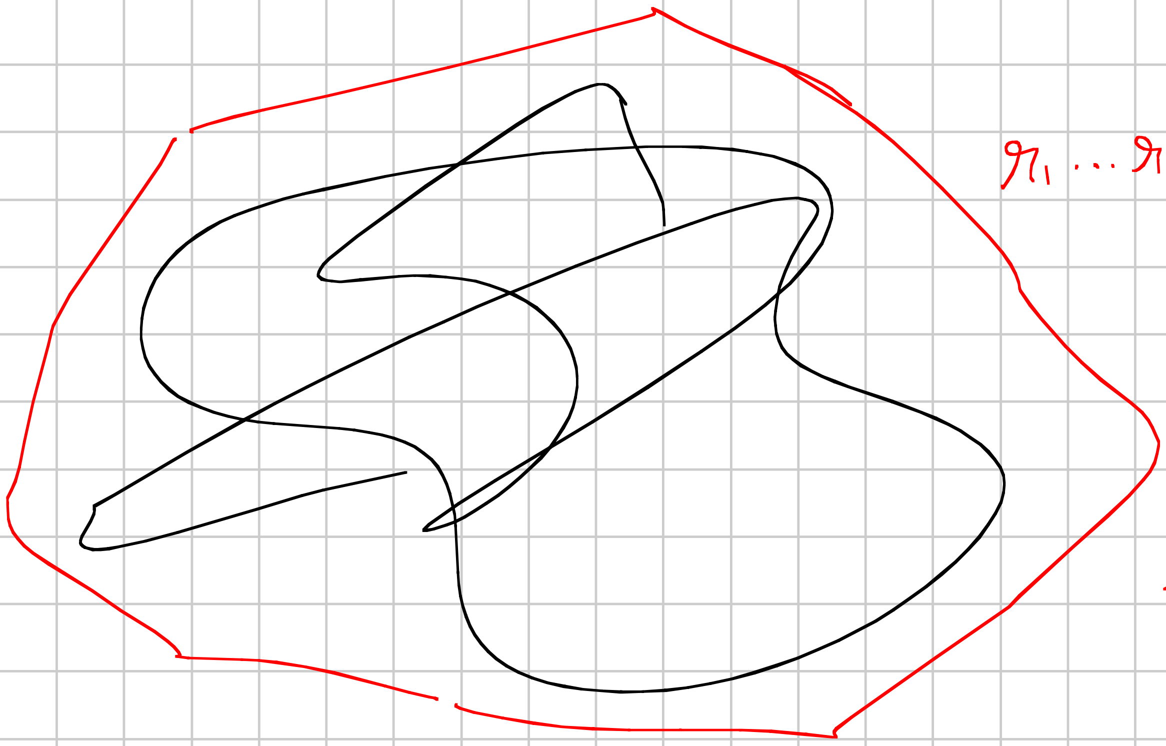
Provo che il prodotto di opportuni coniugati delle relazioni (ognuna presa una e una sola volta) è 1:





$\pi_1 \cdot \pi_2 \cdot \cdot \cdot$

Iterande h

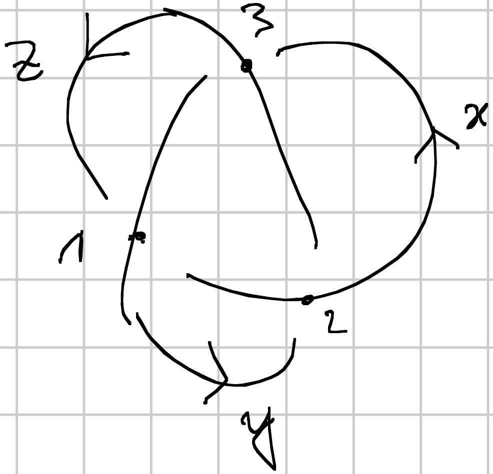


$r_1 \cdots r_n$

$\Longrightarrow \pi_1 \cdots \pi_n = 1.$

∎

Es:



1. $zy = yx$

2. $yx = xz$

3. $xz = zy$

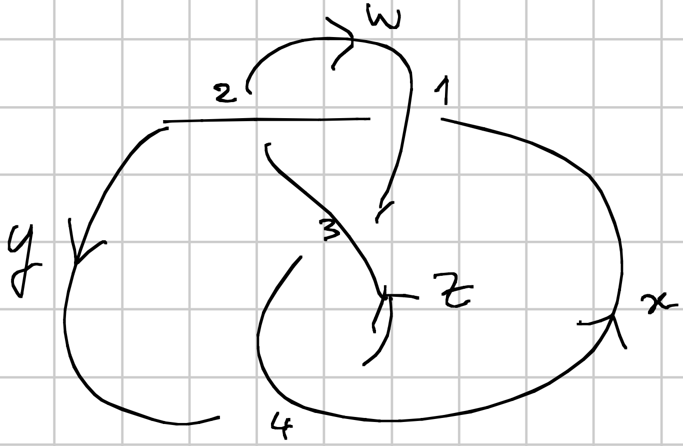
2. $z = x^{-1} y x$

1. $x^{-1} y x y = y \cdot x$ cioè $yxy = xyx$

3. $x \cdot x^{-1} y x = x^{-1} y x \cdot y = 2$

$\Rightarrow \pi_1 (S^3 \setminus \text{trif}) = \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$

Es:



1. $yw = wx$
2. $wy = yz$
3. $wz = zx$
4. $yx = xz$

2. $w = yzy^{-1}$

1. $x = w^{-1}yw = yz^{-1}y^{-1}yyzy^{-1} = yz^{-1}yzy^{-1}$

3. $yzy^{-1} \cdot z = zyz^{-1}yzy^{-1}$ cioè $y^{-1}z^{-1}yzy^{-1} = z^{-1}yzy^{-1}z^{-1}$

$a = y^{-1}$ $\quad b = z^{-1}$

Verifichiamo che $4 = 3$

$$\pi_1(S^3, 8) = \langle a, b \mid a \cdot [b, a^{-1}] = [b, a^{-1}] \cdot a \rangle .$$

Oss: $\pi_1(S^3, \text{trif}) = \langle x, y \mid xyx = yxy \rangle$

$$\phi : \pi_1(S^3, \text{trif}) \longrightarrow \mathfrak{S}_3$$

$$\phi(x) = (12) \qquad \phi(y) = (23)$$

$$\underset{(13)}{\underset{\parallel}{(12)(23)(12)}} = \underset{(13)}{\underset{\parallel}{(23)(12)(23)}} \qquad \underline{\text{OK}}$$

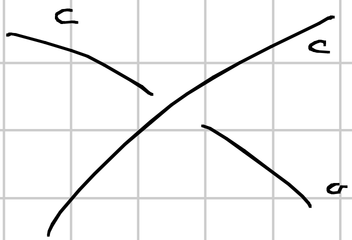
ϕ omomorfismo suriettivo ($\Longrightarrow \pi_1(S^3, \text{trif})$ non abeliano).

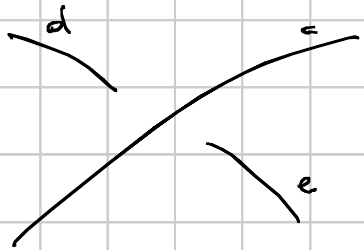
Prop: le tricolorazioni di D (non split) che rappresenta L corrispondono a $\phi : \pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow S_3$ / con impiego uso dei tre colori $\Longleftrightarrow$ ϕ surgettivo.

Dim: tricolorazione 0, 1, 2 $\rightsquigarrow \phi$

$$\phi(x_p) = \begin{cases} (12) & \text{se } a_p \text{ ha colore } 0 \\ (13) & \text{se } a_p \text{ ha } \text{"} \ 1 \\ (23) & \text{se } \qquad\qquad 2 \end{cases}$$

Ben def:





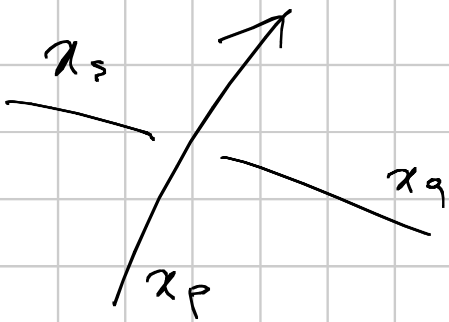
$\tau \cdot \tau = \tau \cdot \tau$ $\qquad$ $\tau \cdot \sigma = \sigma \cdot \eta$ $\qquad$ $\forall\, \sigma, \eta, \tau \in \mathfrak{S}_3 \setminus A_3$ distinti

vero

uso di 3 col $\Longleftrightarrow$ trasp $\in \mathrm{Im}(\phi)$

$\Longleftrightarrow$ ϕ surgettivo.

Viceversa prendo $\phi : \pi_1(S^3 \setminus L) \longrightarrow \mathfrak{S}_3$



$\phi(x_q)\phi(x_p) = \phi(x_p) \cdot \phi(x_s)$

$\Longrightarrow$ $\phi(x_q), \phi(x_s)$ stessa parità

$\Longrightarrow$ Tutti i $\phi(x_p)$ hanno stessa parità.

Pari : $\nexists$ non suriettive.

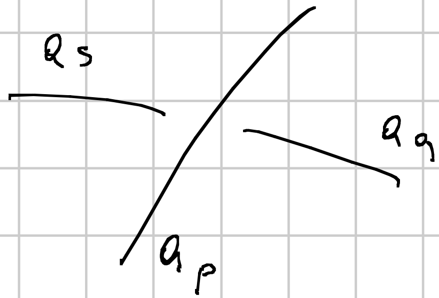
Trasposizioni : basta vedere che la relaz. $\sigma\tau = \tau\eta$

con $\sigma, \tau, \eta \in S_3 \setminus A_3$ vale solo se sono tutte uguali o tutte diverse.

— o —

Interpretazione 3-colorabilità :

$f : \{\text{ovenac}\} \longrightarrow \mathbb{Z}/3$



$f(a_p)+f(a_q)+f(a_s)=0 \in \mathbb{Z}/3$

↪ $f(a_q)+f(a_s)\equiv 2f(a_p)$

Generalizzazione $m \geq 3$ <u>non è</u> $f(a_p)+f(a_q)+f(a_s)\equiv 0\ (p)$

Invece: mod-m colorazioni

$$\{\text{overarc}\} \longrightarrow \mathbb{Z}/m \quad \text{t.c.} \quad f(a_q)+f(a_s)\equiv 2f(a_p)\ (m)$$

<u>Esercizio</u>: provare invarianza rispetto a R_I, R_{II}, R_{III} del numero di mod-m colorazioni / permutaz. colori.