

Teoria dei Nodi. 8/11/16

$$\phi: B_n \rightarrow \text{Aut}(F_n)$$

$$F_n = \langle x_1, \dots, x_n \rangle$$

$$\phi(\sigma_i): \begin{matrix} x_{j'} \mapsto x_i \\ x_j \end{matrix} \quad \begin{matrix} x_i x_{i+1} x_i^{-1} & j'=i \\ & j'=i+1 \\ & \swarrow \end{matrix}$$

$$B_n = \text{Aut}(D^2, X_n) / \cong$$

$$\phi(f) = (f|_{D^2 \setminus X_n})_* : \pi_1(D^2 \setminus X_n) \xrightarrow{\cong} F_n$$

- Programma:
- caratterizzazione di $\text{Im}(\phi)$
 - applicazione per calcolo di $\pi_1(\mathbb{S}^2, \hat{\mathbb{P}})$
 - diuiso di Markov

(Libro Birman),

Teo: $g \in \text{Aut}(\mathbb{F}_n)$; $g \in \text{Im}(\phi) \iff$

- $g(x_i) = w_i \cdot x_{\tau(i)} \cdot w_i^{-1}$
- $g(x_1 \dots x_n) = x_1 \dots x_n$

Dim: $\Leftarrow$ Le due proprietà valgono per $\phi(\sigma_i)$ e sono stabili per composizione:

$$\begin{aligned}
 h(g(x_i)) &= h(w_i x_{\tau(i)} w_i^{-1}) \\
 &= h(w_i) \cdot h(x_{\tau(i)}) \cdot h(w_i^{-1}) \\
 &= \underbrace{h(w_i) \cdot \tilde{w}_{x(i)}}_{\tilde{w}_i} \cdot x_{\sigma(\tau(i))} \cdot \underbrace{\tilde{w}_{\tau(i)}^{-1} \cdot h(w_i^{-1})}_{\tilde{w}_i^{-1}}
 \end{aligned}$$

4 So che $g(x_1 \dots x_n) = x_1 \dots x_n$

$$\Rightarrow w_1 x_{i_1} w_1^{-1} \cdot w_2 x_{i_2} w_2^{-1} \dots w_n x_{i_n} w_n^{-1} = x_1 \dots x_n$$

|
in F_n

dunque $\exists$ successione di semplificazioni della parola a sx
che toglie le parole a destra; fisso una tale successione.

Claim: succede una delle seguenti

(a) qualche $x_{i_j} w_j^{-1}$ è completamente semplificato w_{j+1}

(b) qualche $w_j x_{ij}$ è completamente semplificato da w_{j-1}^{-1}

Infatti: Caso I: qualche $w_j x_{ij} w_j^{-1}$ si cancella del tutto.

Guardo da che parte si semplifica x_{ij} :

Quattro sottocasi: ① con lettere a sx e a sinistra di x_{ij} ,

(cioè: cioè anche x_{ij-1} si cancella); quando

$$x_{ij-1} w_{j-1}^{-1} w_j x_{ij}$$

è noto che l'ultima delle cancellazioni di x_{ij-1}

deve avvenire raso $dx \Rightarrow x_{ij-1} w_{j-1}^{-1}$ è

cancellato da $w_j \Rightarrow$ vale (a)

(2) Si cancella a su a e dx di x_{ij-1} cioè x_{ij-1}
non si cancella

$$x_{ij-1} w_{j-1}^{-1} w_j x_{ij}$$

$\Rightarrow w_j x_{ij}$ è cancellato da $w_{j-1}^{-1} \Rightarrow$ vale (b).

(3) (4) analoghi a dx.

Caso II: ogni $w_i x_{i_j} w_i^{-1}$ ha un residuo π_j

$$\Rightarrow \pi_1 \dots \pi_m = \alpha_1 \dots \alpha_m \Rightarrow \pi_j = \alpha_j$$

Il residuo di $w_1 x_{i_1} w_1^{-1}$ è α_1 ma la scrittura è

ridotta $\Rightarrow$ o $w_1 = \varepsilon$ e $x_{i_1} = \alpha_1$ dunque $\pi_2 \dots \pi_m = \alpha_2 \dots \alpha_m$

e finisco ricorrendo a α_1 ; oppure w_1 comincia con α_1

$$\underbrace{\alpha_1 w_1 x_{i_1} w_1^{-1}}_{\text{unico residuo } \alpha_1} w_2 x_{i_2} w_2^{-1} \dots w_m^{-1} = \alpha_1 \dots \alpha_m$$

unico residuo α_1

$\Rightarrow x_{i_1} w_1^{-1}$ si semplifica verso dx

$\Rightarrow$ ricado nei casi (3) o (4) del caso I $\Rightarrow$ vale (a) o (b).

Chiamo $L(g)$ = somma delle lunghezze delle parole w_i

$$g(x_i) = w_i x_{\tau(i)} w_i^{-1}$$

Se $L(g) = 0$ ho $g = \tau$ ma $f(x_1 \dots x_n) = x_1 \dots x_n$

$\Rightarrow g = \text{id} \in \text{In}(\phi)$.

Provo che se $L(g) > 0$ e vale (a) allora $L(g \circ \phi(\sigma_j)) = L(g) - 1$

$\Rightarrow$ concludo per induzione -

Similmente si vede (b) che $L(g \circ \phi(\sigma_i^{-1})) = L(g)^{-1}$.

Provo il primo:

(a) qualche $x_{ij} w_i^{-1}$ è completamente semplificato w_{i+1}

$$\Rightarrow w_{i+1} = w_i \cdot x_{ij}^{-1} \cdot y_j$$

Devo trovare le nuove parole $\tilde{w}_k$ t.c.

$$(g \circ \phi(\sigma_i))(x_k) = \tilde{w}_k \cdot x_{\sigma(k)} \cdot \tilde{w}_k^{-1}$$

$$(g \circ \phi(\sigma_j))(x_k) = g(x_k) \quad \text{for } k \neq j, j+1$$

$$(g \circ \phi(\sigma_j))(x_j) = g(x_j x_{j+1} x_j^{-1})$$

$$= w_j \cancel{x_j} \cdot \cancel{w_j^{-1}} \cdot \underbrace{\cancel{w_j} \cancel{x_j^{-1}} y_j}_{w_{j+1}} \cdot x_{j+1} \cdot \underbrace{y_j^{-1} \cancel{x_j} \cancel{w_j^{-1}} \cancel{w_j} \cancel{x_j^{-1}} \cancel{w_j^{-1}}}_{w_{j+1}^{-1}}$$

$$\Rightarrow \tilde{w}_j = w_j \cdot y_j$$

$$(g \circ \phi(\sigma_j))(x_{j+1}) = g(x_j) = w_j x_j w_j^{-1}$$

$$\Rightarrow \tilde{w}_{i+1} = w_i$$

$$L(g) = \dots + L(w_i) + \underbrace{L(w_{i+1})}_{L(w_i) + 1 + L(y_i)} + \dots$$

$$L(g \circ \phi(\sigma_i)) = \dots + \underbrace{L(\tilde{w}_i)}_{L(w_i) + L(y_i)} + \underbrace{L(\tilde{v}_{i+1})}_{L(v_i)} + \dots$$

$$\Rightarrow \Delta L \leq -1.$$

□

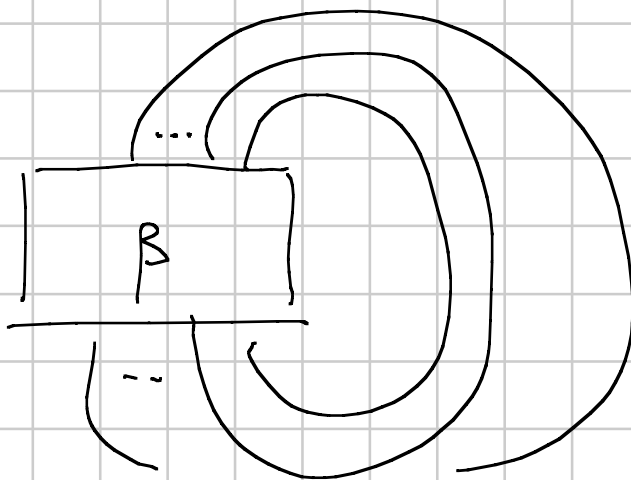
Prop: sia $L = \hat{\beta}$ e sia $\phi(\beta)(x_i) = W_i x_{\tau(i)} W_i^{-1}$

$$\Rightarrow \pi_1(S^3, L) = \langle x_1, \dots, x_n \mid W_i x_{\tau(i)} W_i^{-1} = x_i \quad i=1, \dots, n \rangle$$

inoltre una qualsiasi delle relazioni si può omettere.

Dim:

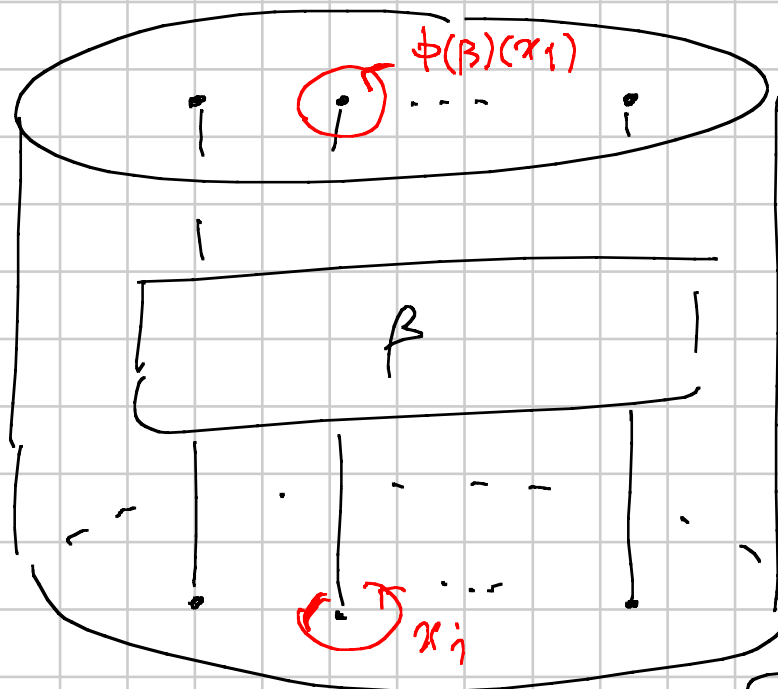
$L =$



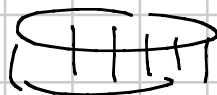
$$\pi_1(S^3 \setminus L) = \pi_1(\mathbb{R}^3 \setminus L)$$

$\mathbb{R}^3 \setminus L$ is covered by $U_1 \cup U_2$

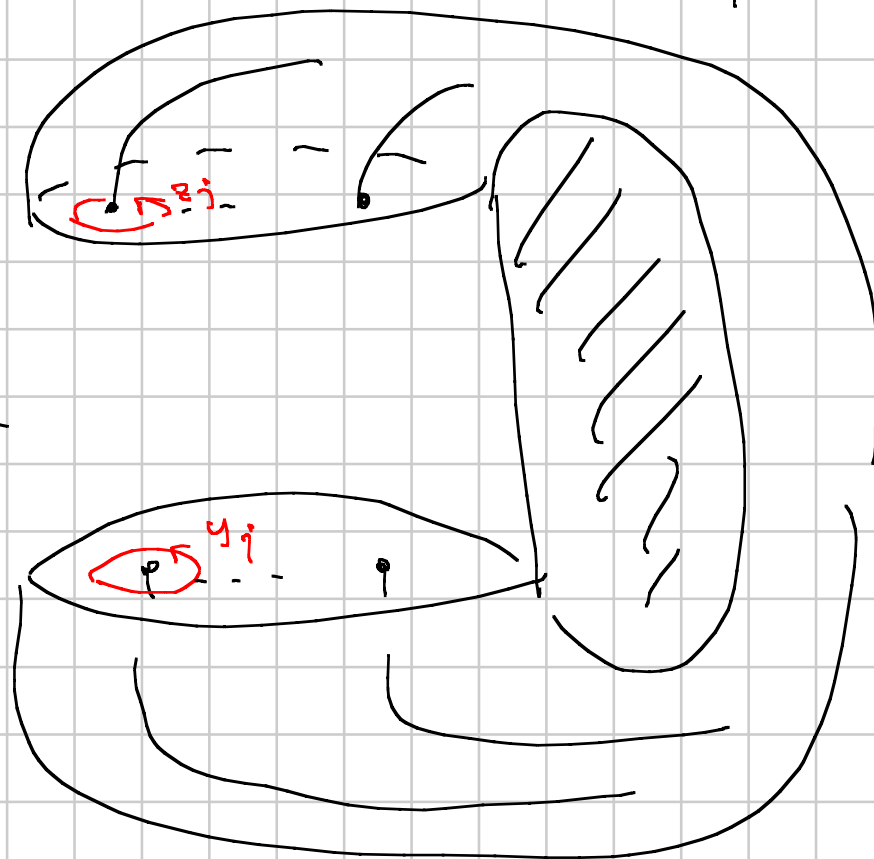
$U_1 =$



cover =



$U_2 =$



$$\Rightarrow \pi_1(S^3 \setminus L) = \frac{\pi_1(U_1) * \pi_1(U_2)}{"\pi_1(U_1 \cap U_2)"} =$$

$$\pi_1(U_1) = \langle x_1 \dots x_n \rangle$$

$$\pi_1(U_2) = \langle y_1 \dots y_n \rangle$$

$$\pi_1(U_1 \cap U_2) = \pi_1 \left(\text{cylinder diagram} \right)$$

$$= \langle y_1 \dots y_n z_1 \dots z_n \rangle$$

$$\Rightarrow \pi_1(S^3 \setminus L) = \langle x_1 \dots x_n \underbrace{y_1 \dots y_n}_{z_1 \dots z_n} \mid y_i = z_i, y_i = x_i, z_i = \phi_{\beta}(x_i) \rangle$$

$$= \langle x_1 \dots x_n \mid x_j = \phi_{\tau}^{-1}(x_j) \rangle$$

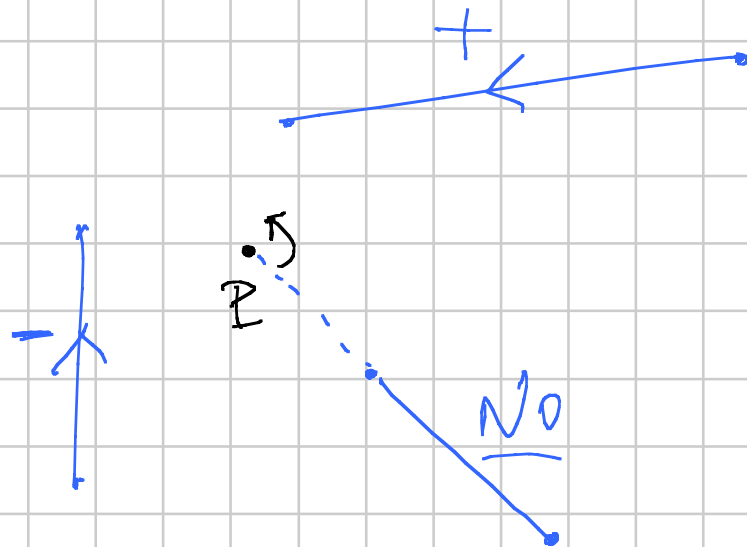
Poiché $\phi'_\beta(x_1 \dots x_n) = x_1 \dots x_n$

ognuna delle relazioni $\phi_p(x_j) = x_j$ è implicata dalle
combinazioni delle altre —

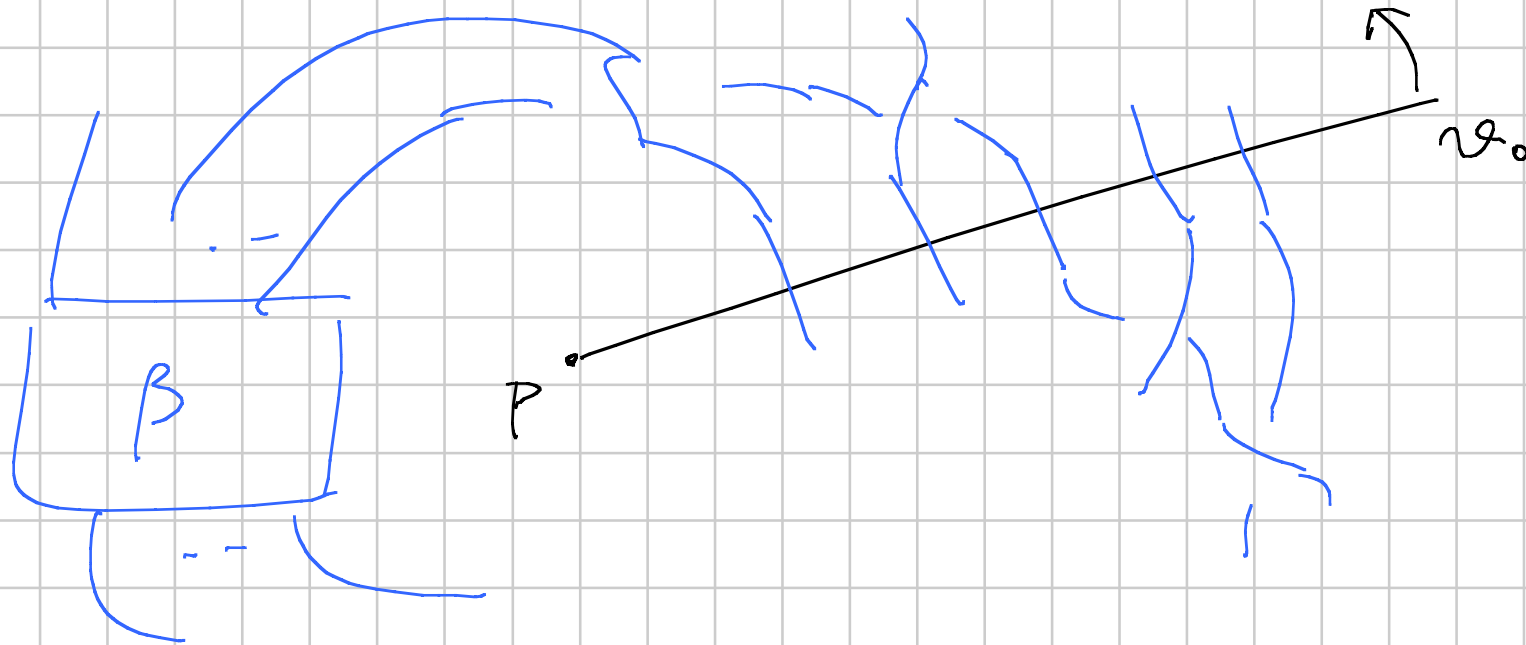
Considero link orientati L simplici in $\mathbb{R}^3$ dove ho

retta π orientata - Suppongo sempre che L non contenga
 segmenti complanari con π , fisso un punto $P \in \pi$,
 il piano $\pi^\perp$ per P e considero la proiezione di L su $\pi^\perp$
 che suppongo perire

$\pi^\perp$



Ricordo: L è in posizione taccia rispetto a π se e solo se
 i segmenti sono positivi. In tal caso $L = \hat{\beta}$ con



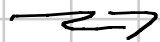
Mossa che genera isotopie di link PL :

$$\left(\begin{array}{l} [x_0 \dots x_m] \\ = \text{Conv}(x_0, \dots, x_m) \\ \xrightarrow{e} \\ ab = [a, b] \\ \text{orientato da} \\ a \text{ a } b \end{array} \right)$$

Σ_{ac}^b : si applica a L se

$$[a, b, c] \cap L = [a, c]$$

e sostituisce L con $L' = (L \setminus ac) \cup ab \cup bc$



Def: chiamo mosse dente di sega (sawtooth) su L una mosse che sostituisce un segmento negativo con

$$p_0 q_1 \cup q_1 p_1 \cup p_1 q_2 \cup \dots \cup p_m q_m \quad \text{tutti positivi}$$

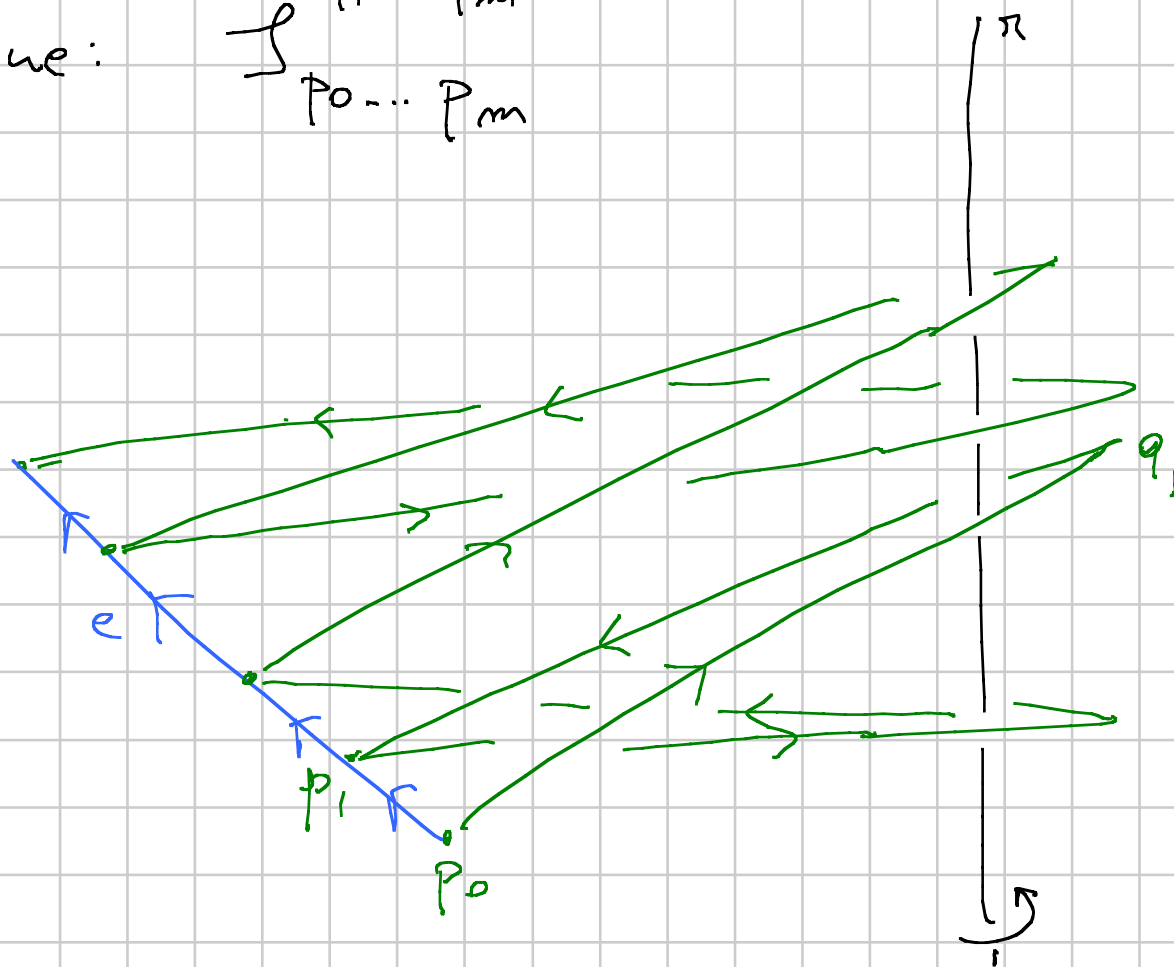
dove $p_0, \dots, p_m$ suddivisione di Σ , quindi $\Sigma_{p_{i-1} p_i}^{q_i}$ è lecita,

i triangoli $[p_{i-1} q_i p_i]$ hanno al più un p_i

in comune :

Notazione:

$$\int_{p_0 \dots p_m}^{q_1 \dots q_m}$$



π applica se
 π attraverso opw
 $[p_i, q_i, p_i]$ in
 un pto intero

Lemma: dato e lato negativo di L esiste una sawtooth in e .

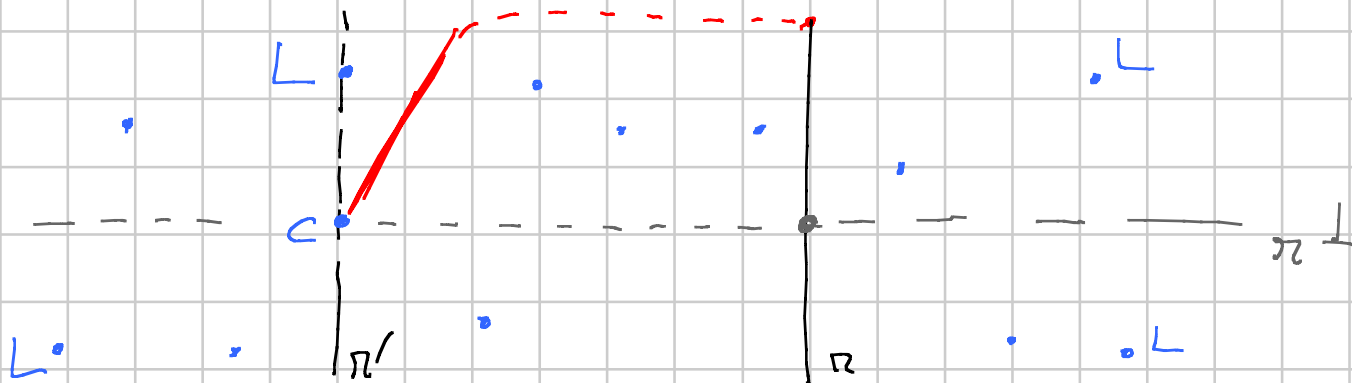
Quoltre:

- (1) Se Ω è un convesso che incontra e in al più un estremo, posso realizzarlo in modo che ogni $[p_{i-1}, q_i, p_i]$ with Ω tranne che nell'estremo che piec'no.
- (2) Se e' è un lato di L con un estremo comune ad e , posso realizzarlo in modo che $\text{Conv}(p_0, q_1, p_1, \dots, q_m, p_m) \cap e'$

sia solo tale estremo

(Oss: la Prop senza (1) e (2) $\Rightarrow$ Alexander)

Dim: Caso I: esaminiamo un incrocio c su e ; esaminiamo
piano che contiene $c \cup \pi$, $\pi' \parallel \pi$ per c :



Posso trovare segmento quasi verticale con estremi c e su $\mathbb{R}$ -

Nel caso (1) il convesso Ω non può contenere part. su $\mathbb{R}'$

Se saprei che sotto c : altrimenti contiene $c \in \text{int}(e)$

$\Rightarrow$ posso scegliere il segmento che è "lontano da Ω "

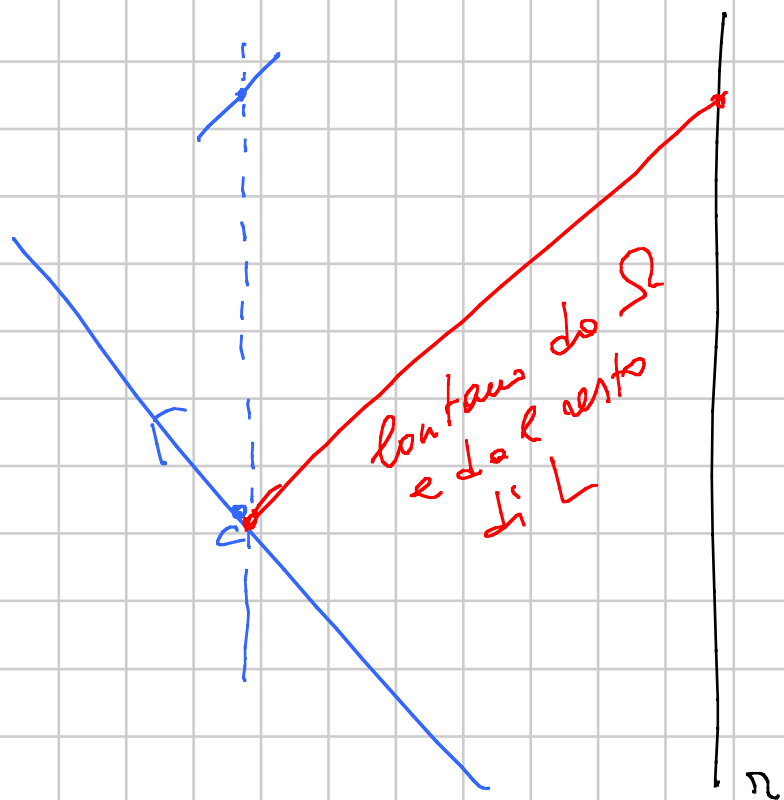
scegliendo: κ il secondo estremo e verso $+\infty$ o $-\infty$ su $\mathbb{R}$;

Nel caso (2): viene restrizione -

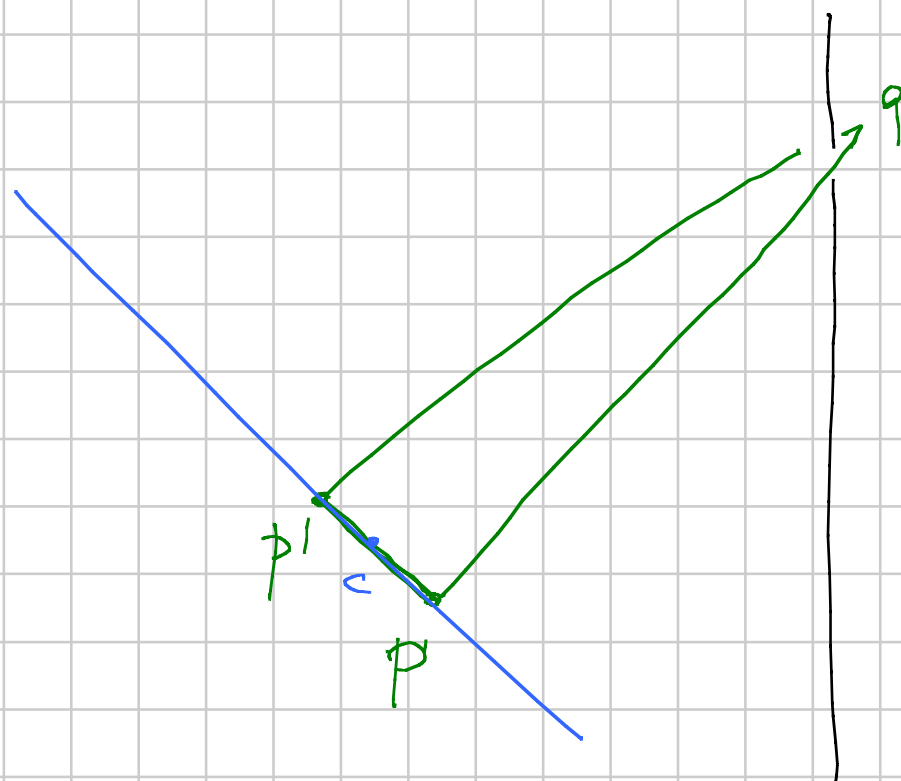
Ora prendo un cortissimo segmento su e vicino a c

e un punto molto vicino al secondo estremo del segmento

e "opere oltre" $\mathbb{R}^1$.

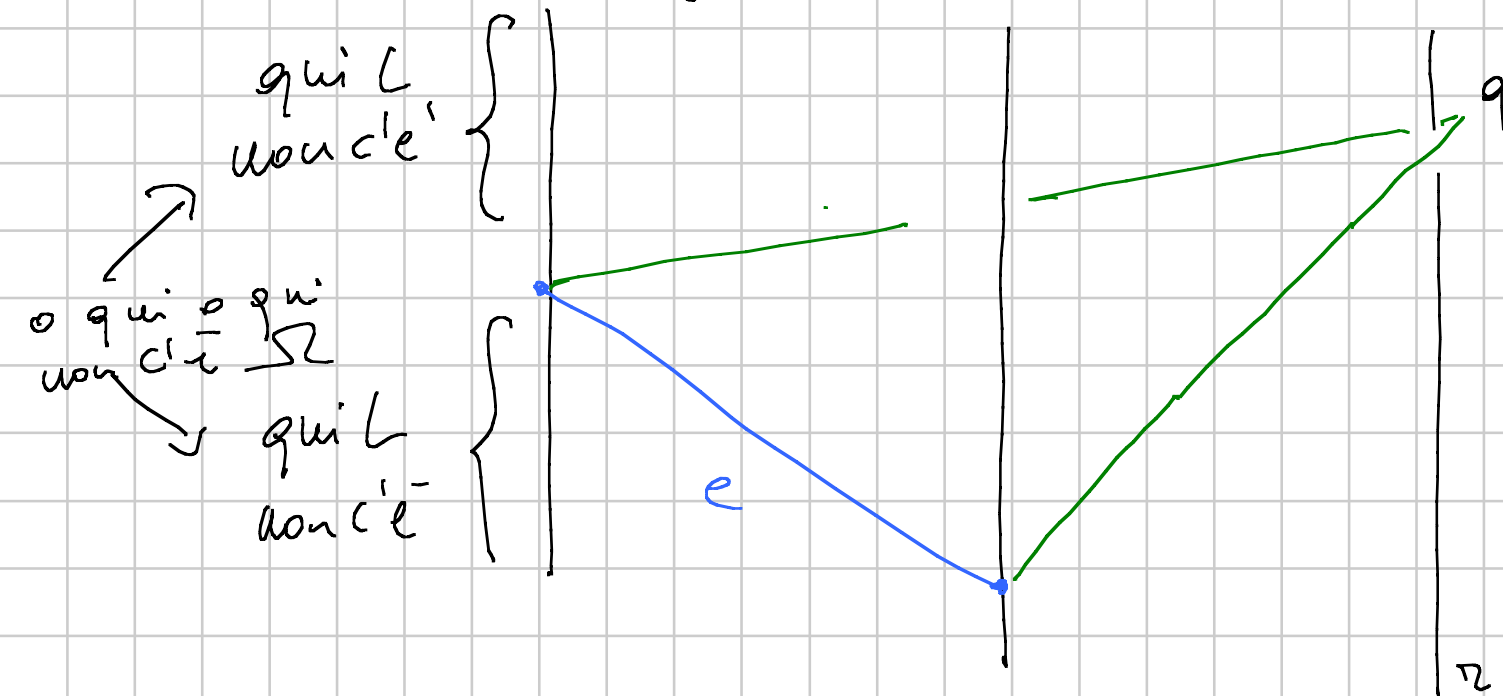


$\Rightarrow$



Esempio le $\mathcal{E}_{PP'}^q$ che sono parte della sawtooth -

Facendolo su ogni intervallo mi riduco a 2 linee rette.

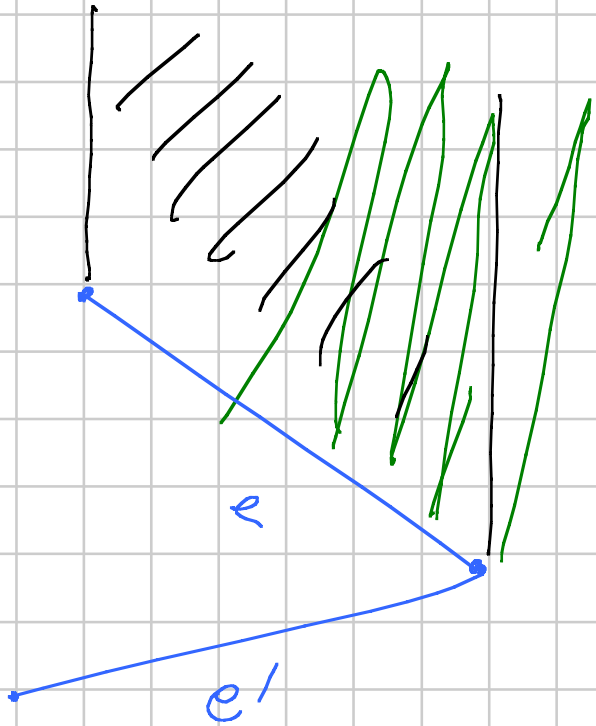


prendendo q verso $\pm \infty$ posso evitare che il triangolo tocchi L

Per il caso (1) scegliendo opportunamente t_0 o $-t_0$
evito che il triangolo tocchi Σ - Fine caso (1).
Nel caso (2) non ho restrizioni -

Allora nel caso (2) prendo tutti i punti q delle
sawtooth (sia per gli incroci sia dopo)
in modo che siano verso t_0 ;

$\Rightarrow \text{Conv} (p_0 q_1 \dots q_m p_m)$ quasi contenuto nella striscia sopra e !



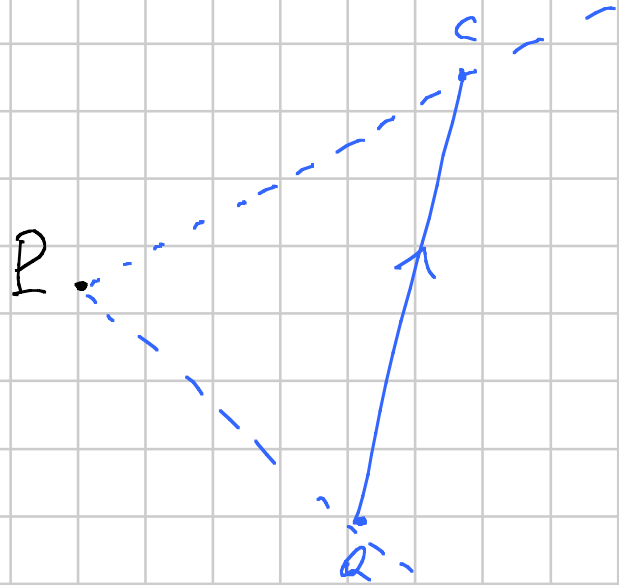
$e' \cap$ tale striscia =
l'estremo inevitabile

$\Rightarrow$ con i q_j molto alti

$\text{Conv}(p_0 \dots q_m p_m) \cap e' = \text{estremo}$ $\square$

Altre mosse: chiamo $\mathcal{R}_{ac}^b$ una mossa Σ_{ac}^b se

$ac > 0$, $ab > 0$, $bc > 0$:



Σ_{ac}^b è $\mathcal{R}_{ac}^b$ se

$b \in \text{angolo convesso } \widehat{PQC}$

