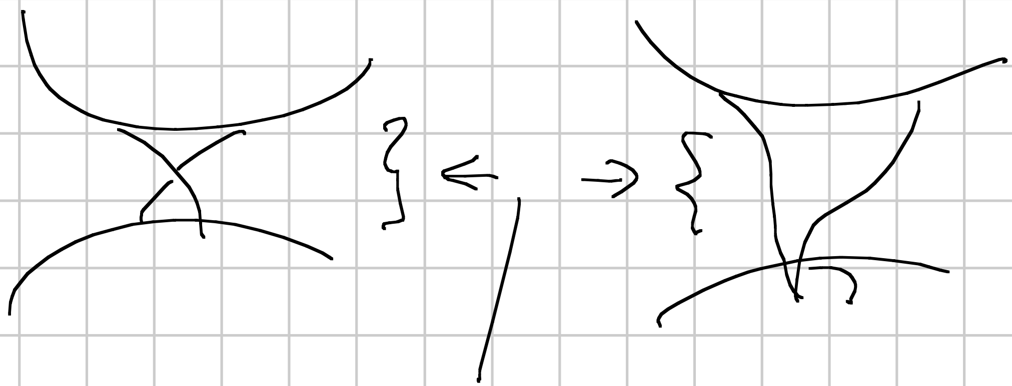
- $lk(K_1, K_2) = lk(K_2, K_1)$

$$\Rightarrow \quad = \frac{1}{2}\left(\sum_{c} \operatorname{sgn}(c) \right)$$

- algoritmo di Seifert : scelta altezza t.c.

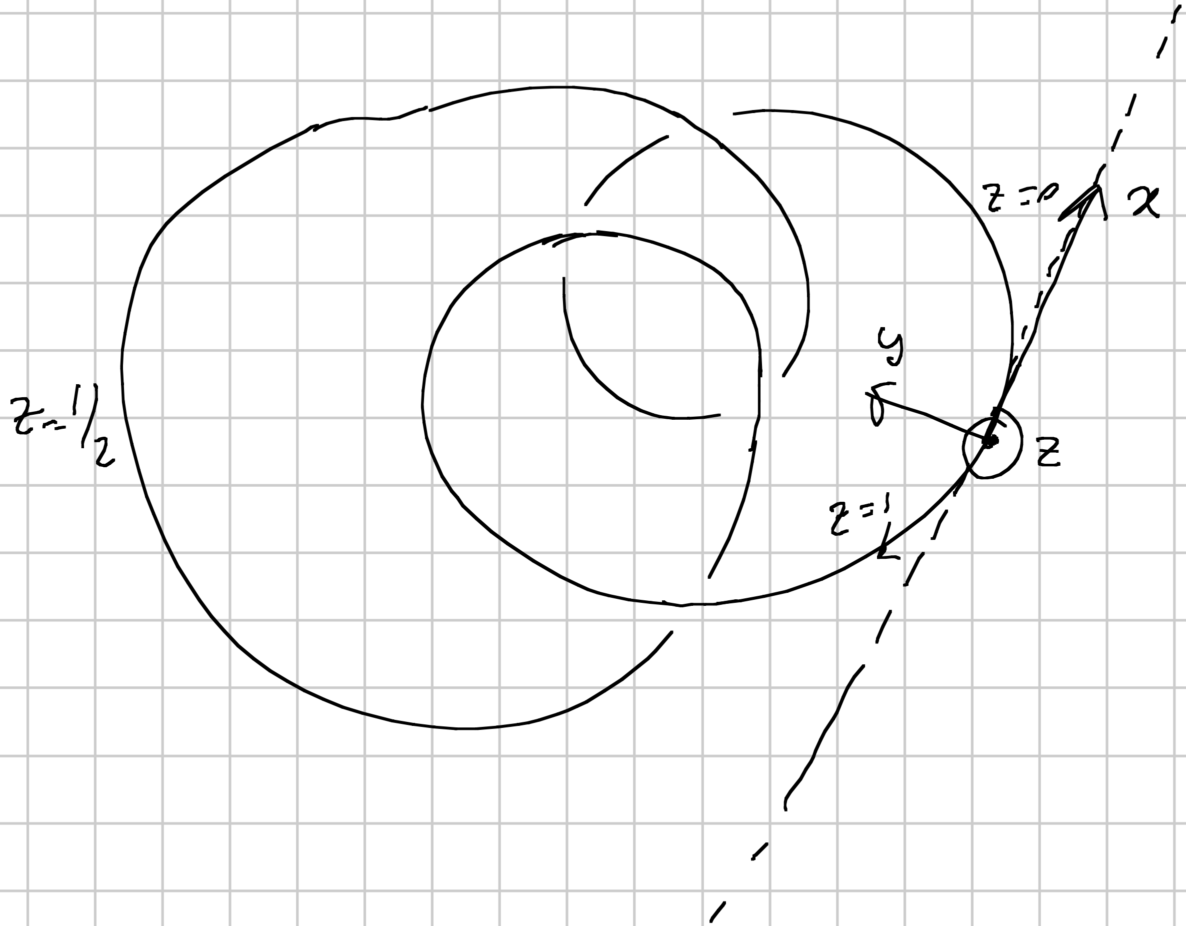
contenuto $\Longleftrightarrow$ più alto

Serve

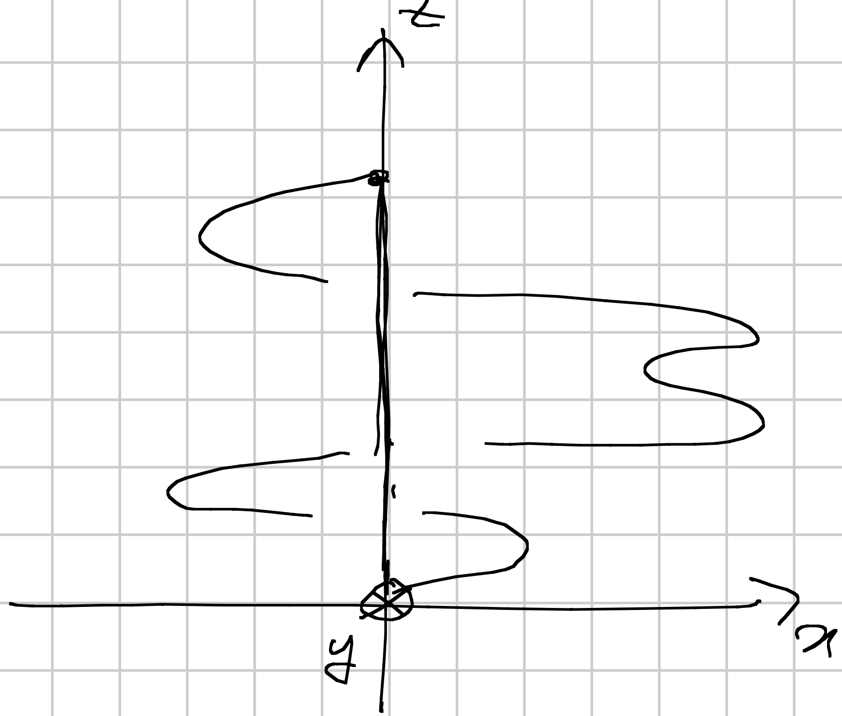


non devono passare altri dischi

3. Cambio incroci per snodare :



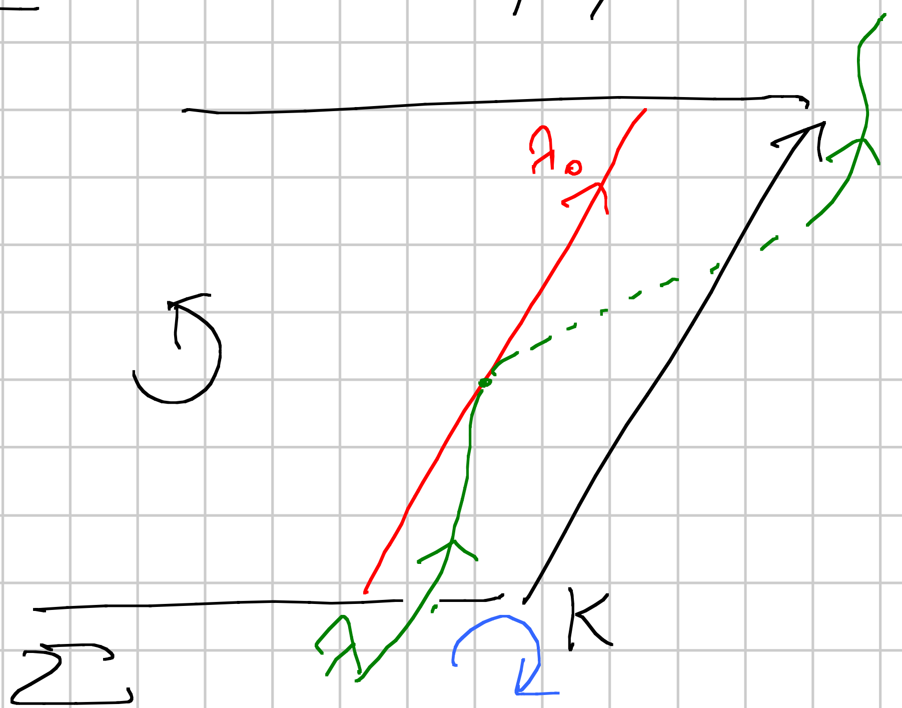
z=0
x
y
z
z=1/2
z=1



z
x
y

Teo: il framing diagrammatico di D è self-lk di D

Dim: $\lambda = \lambda_0 + p \cdot \mu \Rightarrow p = \#_{alg}\, \lambda \pitchfork \Sigma$

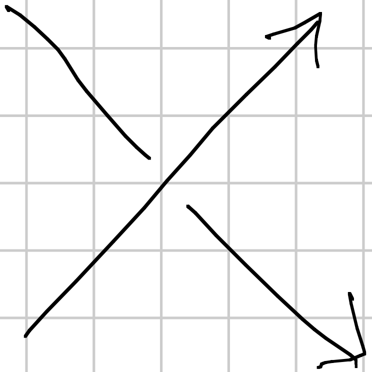


contributo a $p = -1$

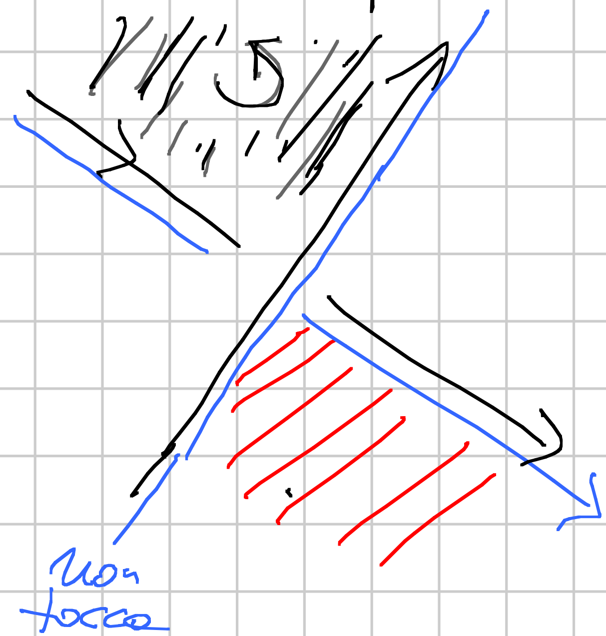
contributo $\#_{alg}\, \lambda \pitchfork \Sigma = -1$

• λ framing diagrammatico $\qquad \text{self}\,\ell k(D) = \#_{alg}(\lambda \pitchfork \Sigma)$

penso a λ come verticalmente sopra D



contributo al self-lk
-1

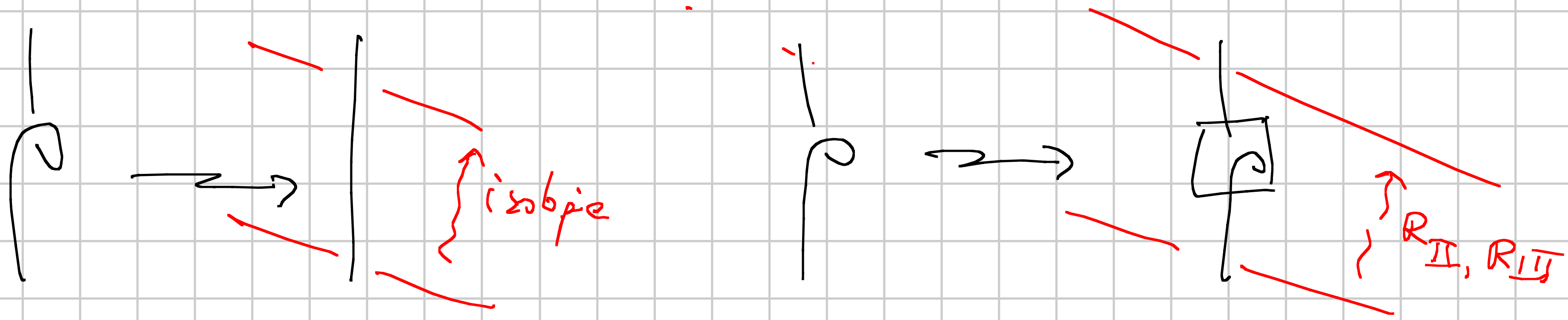


contributo $\#_{alg}(\lambda \pitchfork \Sigma) = -1$

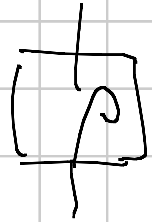
$\blacksquare$

Teo: Se D_0 e D_1 sono diagrammi che danno nodi (link) con framing isotopi con framing allora sono legati da R_{II}, R_{IV} + isotopie su S^2.

Dim: dimenticando framing esiste successione di R_I, R_{II}, R_{III}. Se a un certo punto applico mossa R_I nel senso che cancello un vertice, non la applico e tengo il ricciolo

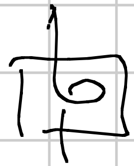


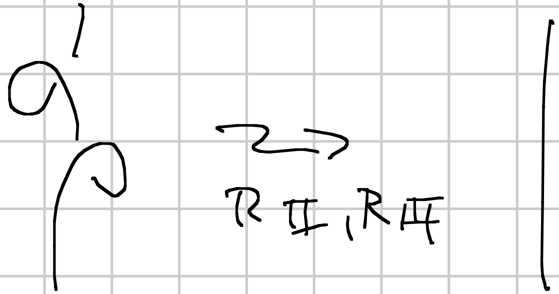
Se invece andava applicata una R_I che crea

Alla fine trovo un diagramma D_1' che coincide con D_1 tranne che per la presenza di alcuni  ; ottenuto da D_0 via R_{II} / R_{III} + isotopie piane

$\Rightarrow$ framed isotopo a D_0 $\Rightarrow$ anche a D_1

$\Rightarrow$ il numero algebrico di riccioli per cui D_1' differisce da D_1 è 0.

Via R_{II}, R_{III} faccio scivolare le  in modo che siano consecutive. $\sum_{alg} = 0 \Longrightarrow$ due adiacenti opposti



$\blacksquare$

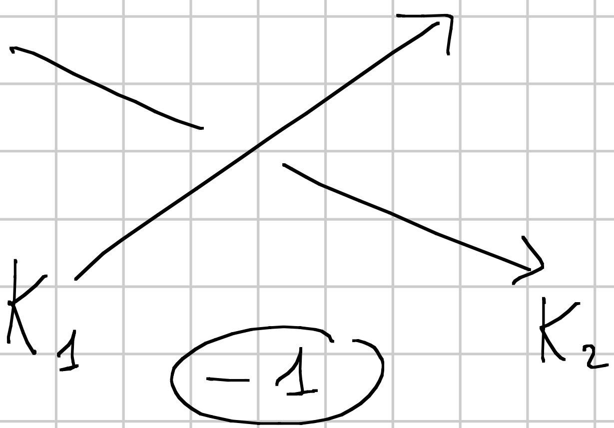
Prop: $lk(K_1, K_2) = n$ se $[K_2] = n \cdot \mu_1 \in H_1(E(K_1))$.

Dim 1. (1) $[\gamma] = n \cdot [\mu_1] \in H_1(E(K_1))$

$$\Longrightarrow n = \#_{alg}(\gamma \cap \Sigma_1)$$

② $\#_{alg}(K_2 \cap \Sigma_1) = lk(K_1, K_2)$. ▨

Dm 2 : $lk(K_1, K_2) = \sum \pm 1$



$[K_2] = [\tilde{K}_2] - [\mu_1]$

...

▨

<u>Teorema</u>: se $K_0, K_1 \subset S^3$ sono nodi isotopi
o link

$\Rightarrow$ sono ambient-isotopi, cioè

$\exists \, (f_t)_{t \in [0,1]}$ $\quad f_t : S^3 \to S^3$ t.c.

$f_0 = id \qquad f_1(K_0) = K_1$.

<u>Idee liscia</u>: per ipotesi esiste $(K_t)_{t\in[0,1]}$.

Provo che $\forall t \in [0,1]$ $\exists \varepsilon$ t.c. $\forall s, u \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$
K_s e K_u sono ambient-isotopi.

Basta perché $[0,1]$ cpt.

E' sufficiente provare che $\forall t \; \exists \varepsilon$ t.c. K_s ambient isotopo a K_t $\forall s \in (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$.

Intuizione: un nodo J molto vicino a un nodo K è ambient-isotopo a K.

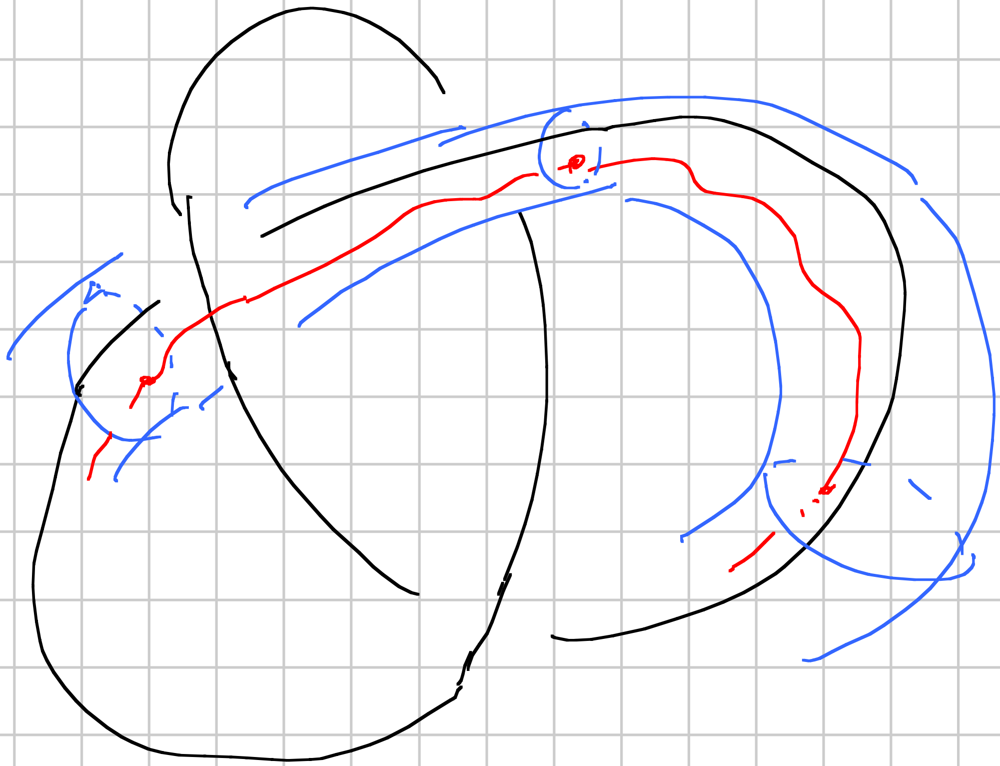
Prendo U intorno regolare di K, cioè

$$\exists g: D^2 \times S^1 \xrightarrow[\text{omeo}]{} U \quad \text{con } \rho(\{0\} \times S^1) = K.$$

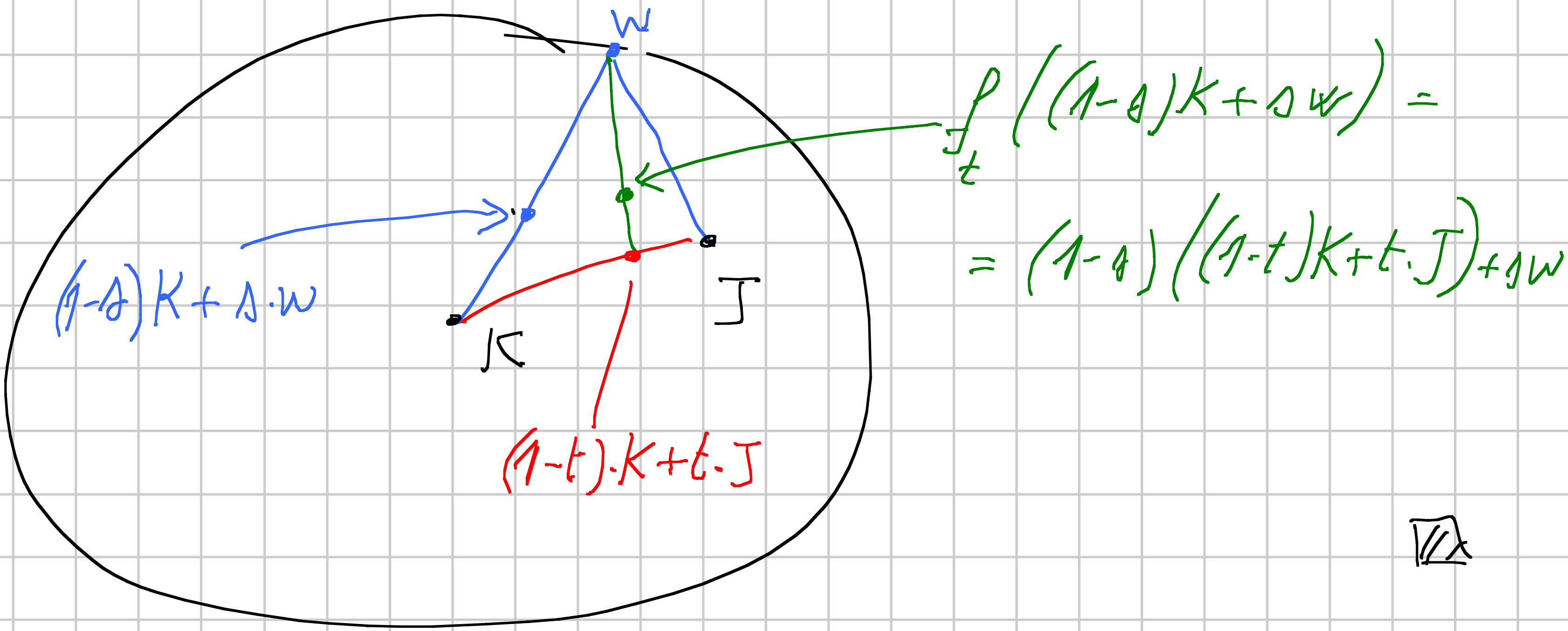
Per J molto C^1-vicino a K ho $J \subset \mathring{U}$ e

$g^{-1}(J) \pitchfork D^2 \times \{t\} \quad \forall z \in S^1$

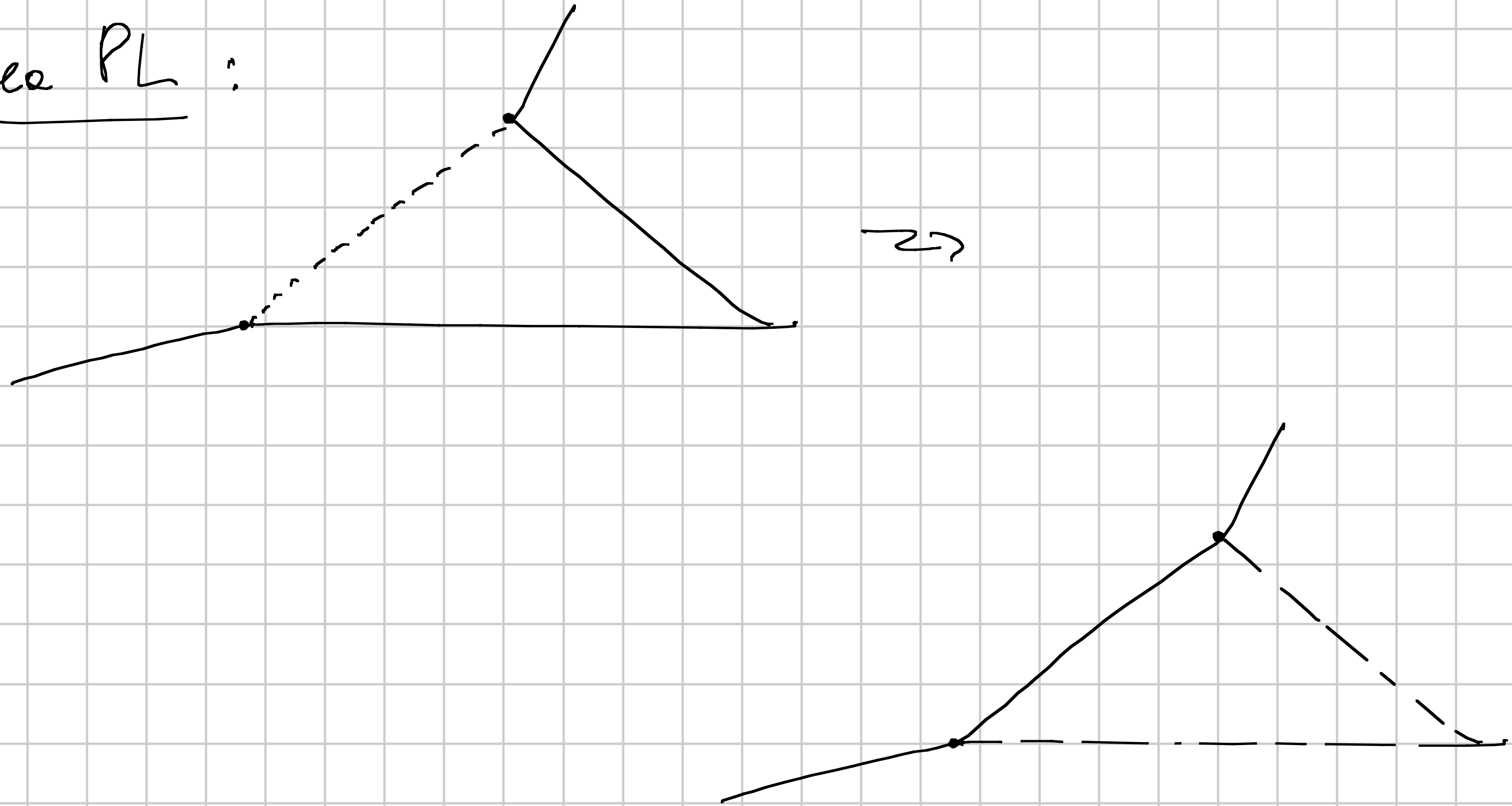
in un punto

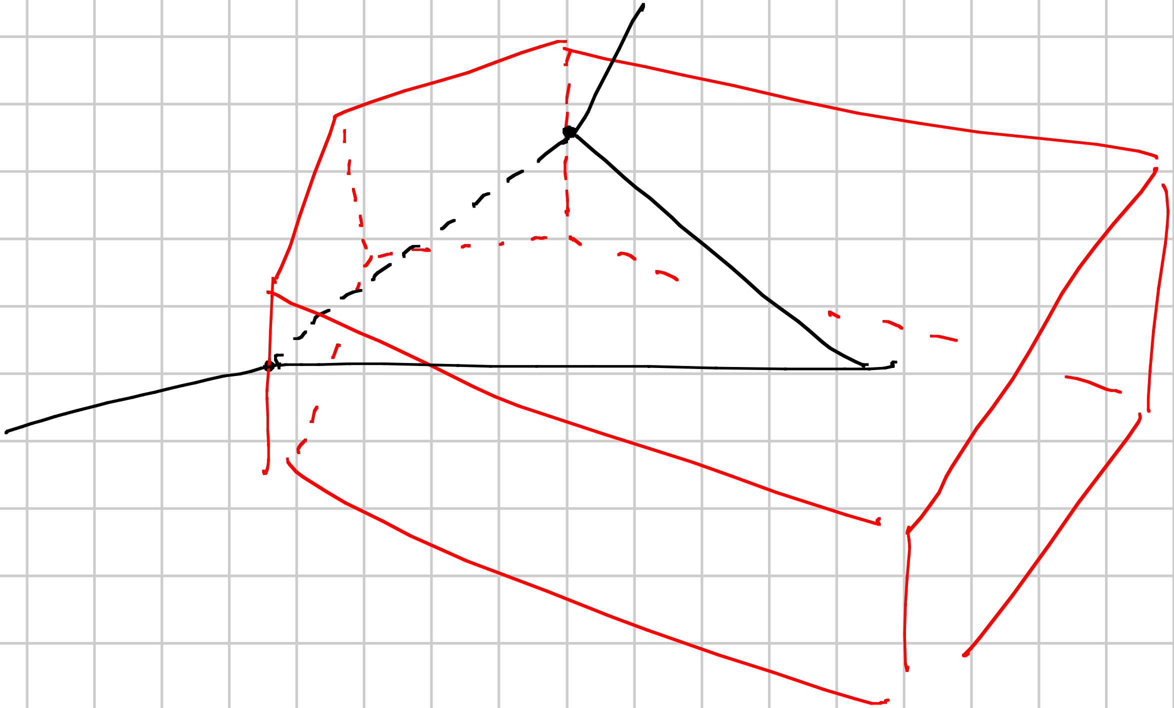


Costruisco l'isotopia ambiente tra J e K supportata in U e su $\bar{U}$ tramite g, identità su $\bar{D}'$, mentre su D'



Idea PL:

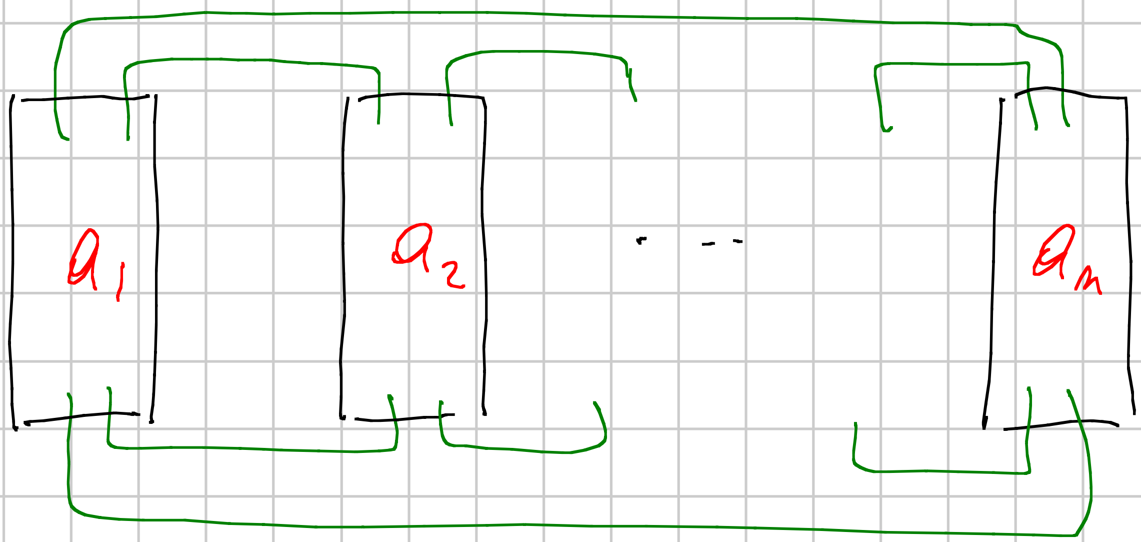


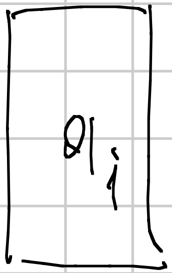


Costruire isotopia ambiente supportata nella scatola di mano / in ⟶ . ☒

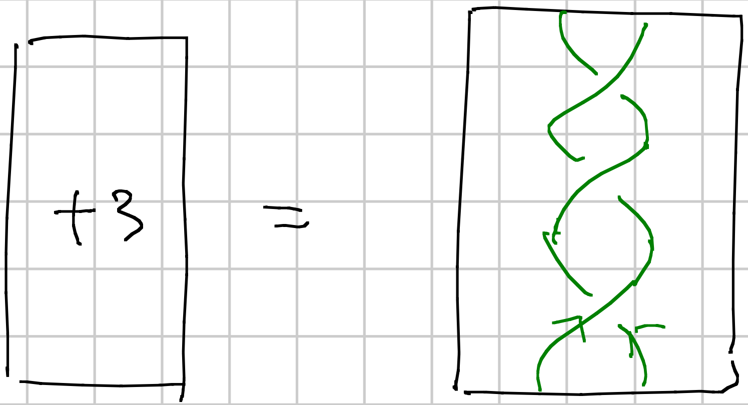
Esempi di nodi e invarianti (facili da definire, ma incalcolabili)

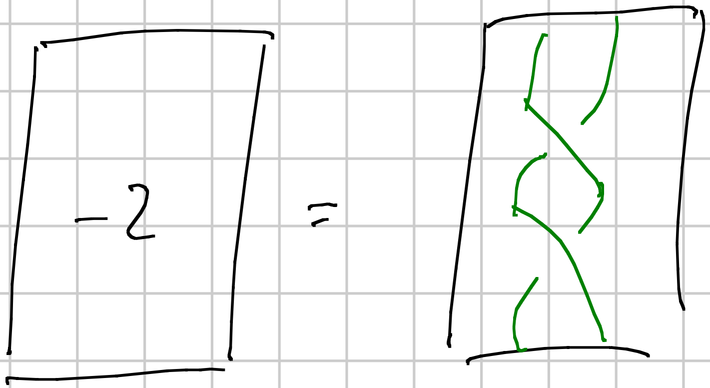
Pretzel $\quad a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$



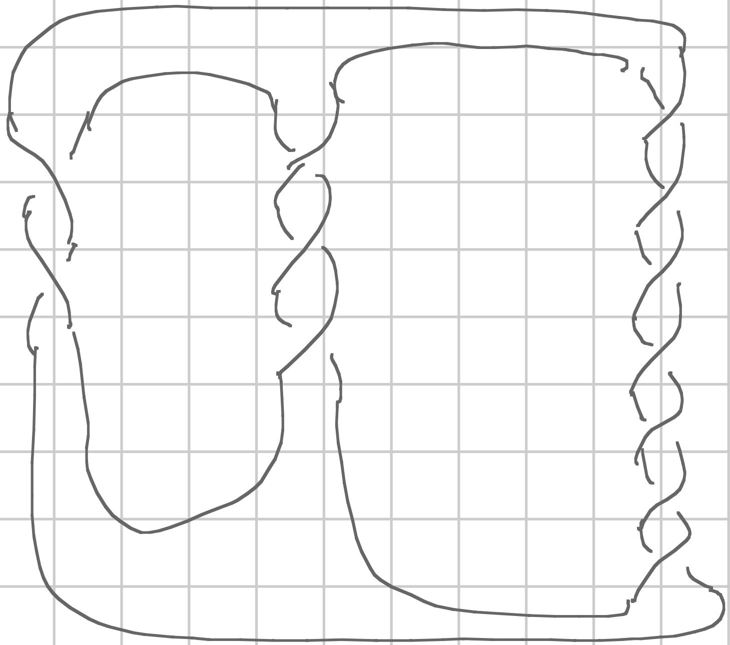


$= |a_j|$ mezzi twist verticalmente verso l'alto di segno $\mathrm{sgn}(a_j)$



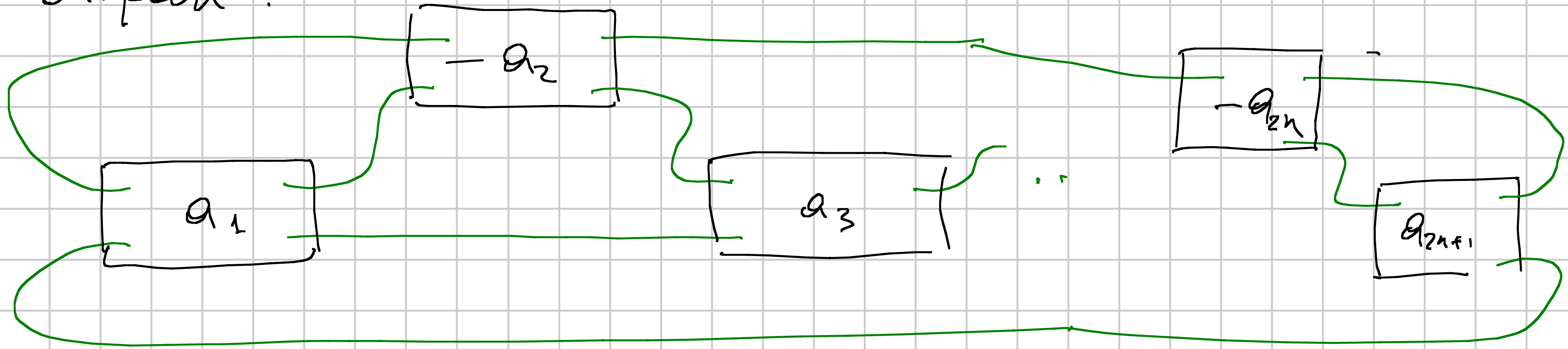


$-2, 3, 7$

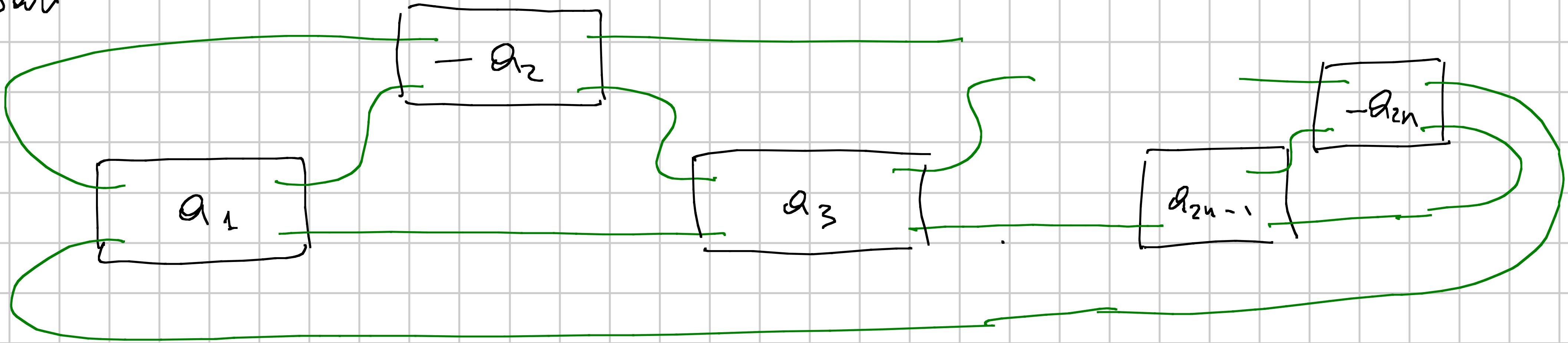


Nodi razionali: $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$

n dispari :



n pari



$$\boxed{\quad a \quad}$$ = come prima

Frazioni continue $\qquad q/p \in \mathbb{Q}$

$$q = p \cdot a_0 + r_1$$

$$p = r_1 \cdot a_1 + r_2$$

$$r_1 = r_2 \cdot a_2 + r_3$$

$$\dots$$

$$r_{n-1} = r_n \cdot a_n + 0$$

$$\Longrightarrow \frac{q}{p} = a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\ddots\, a_{n-1} + \cfrac{1}{a_n}}}}$$

Comunque posti $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{Z}$ $a_n \neq 0$

$$a_0 + \cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{\dots}} \in \mathbb{Q}$$

Fatto: Nodo razionale di parametri $a_1, \dots, a_n$ dipende solo da

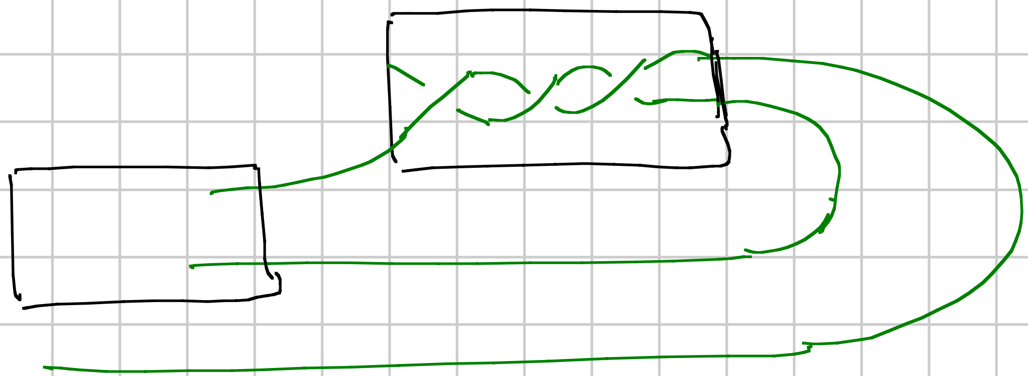
$$\cfrac{1}{a_1 + \cfrac{1}{a_2 + \cfrac{1}{\dots}}} =: q/p$$

Provo che senza cambiare q/p le regole pari e dispari si corrispondono.

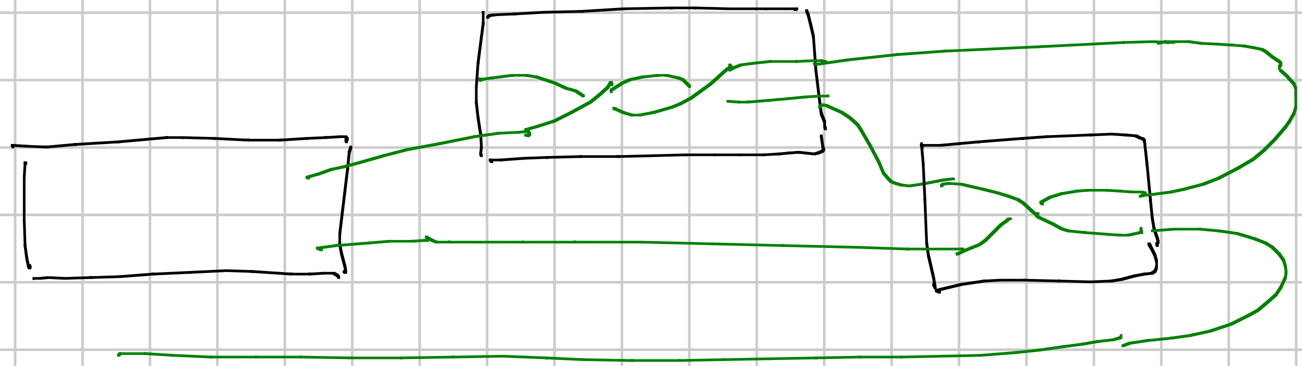
n pari, $a_n > 0$

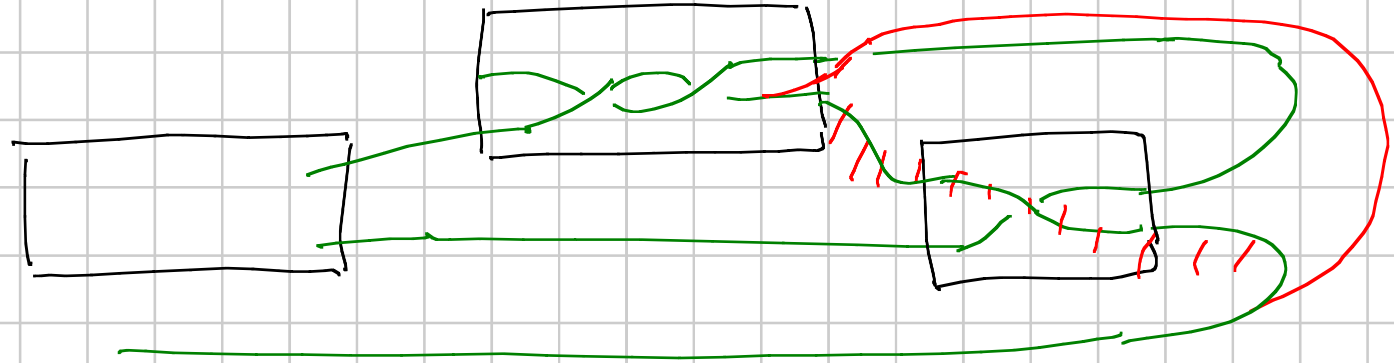
$$\frac{1}{a_n} = \frac{1}{(a_n - 1) + \frac{1}{1}}$$

$a_1, \dots, a_n$



$a_1, \dots, a_n - 1, 1$





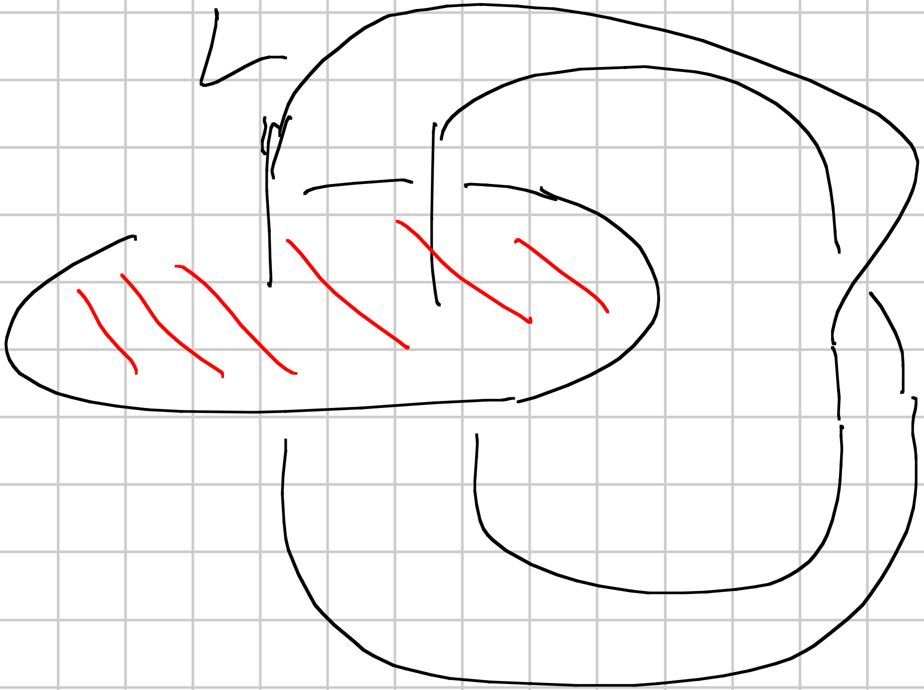
Invarianti impliciti

$K \rightsquigarrow E(K)$

Thm (Gordon-Luecke): per nodo K, $E(K)$ è un invariante completo

$$\left(E(K_1) \underset{\text{omeo}}{\cong} E(K_2) \Longrightarrow K_1 \text{ equiv. a } K_2 \right).$$

Oss: Falso per link.

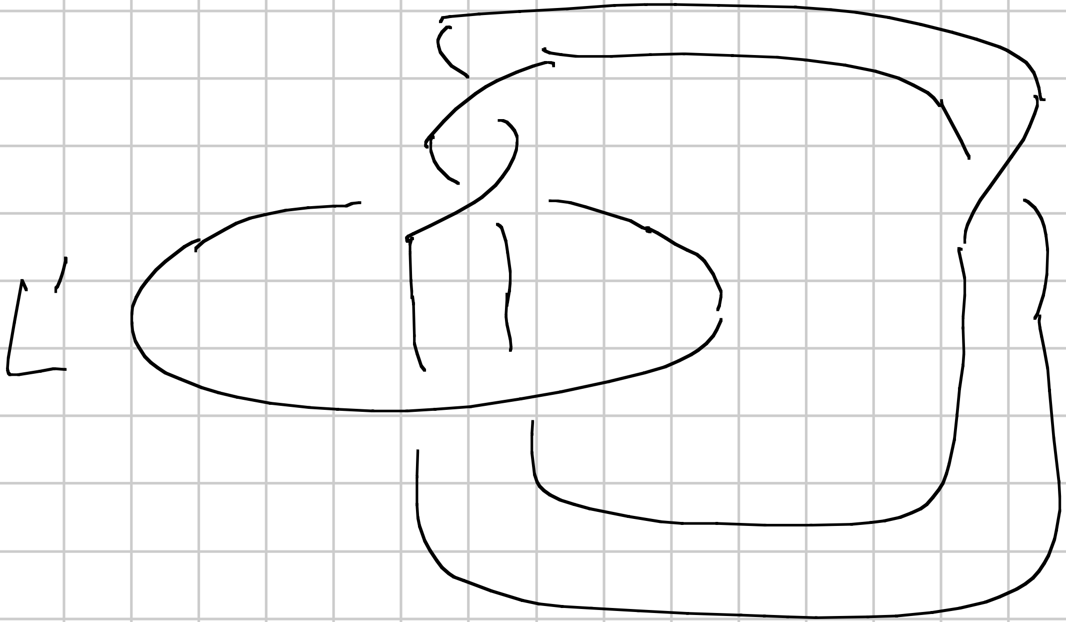


ciascuna componente è un nodo banale

Taglio $S^3 \setminus L$ lungo D e riattacco dopo rotaz.

di 2π; la varietà risultante è la stessa ed è

$S^3 \setminus L'$ con



$S^3 \setminus L \cong S^3 \setminus L'$

$L' \not\cong L$

$L' = \bigcirc \cup$ Trifoglio

Unknotting number di K (o link)

(1) $\min \{ n :$ $\exists\, D_0$ diagramma di K e

$D_0 \to D_1 \to \cdots \to D_n$ dove $D_{j-1} \to D_j$

è uno scambio di incrocio e $D_n \cong \bigcirc$ $\}$

(2) $\min \{ n :$

$\exists\, (K_t)_{t \in [0,1]}$ $\overbrace{\text{famiglia}}^{\text{decente}}$ di curve in S^3 che

sono nodi per $t \neq t_1, \dots, t_n$ con

$K_0 \cong K$, $K_1 \cong \bigcirc$ e K_{t_j} ha un solo punto doppio trasversale }

(3) $\min \{ n : \exists D_0 \rightsquigarrow D_0' \rightsquigarrow D_1 \rightsquigarrow D_1' \rightsquigarrow \ldots D_n \rightsquigarrow D_n'$

$D_0 \cong K, D_n' \cong \bigcirc$, $D_j \rightsquigarrow D_j'$ è

equivalenza di diagrammi (isotopie piane, R_I, R_{II}, R_{III})

$D_{j-1}' \rightsquigarrow D_j$ è scambio di incrocio }

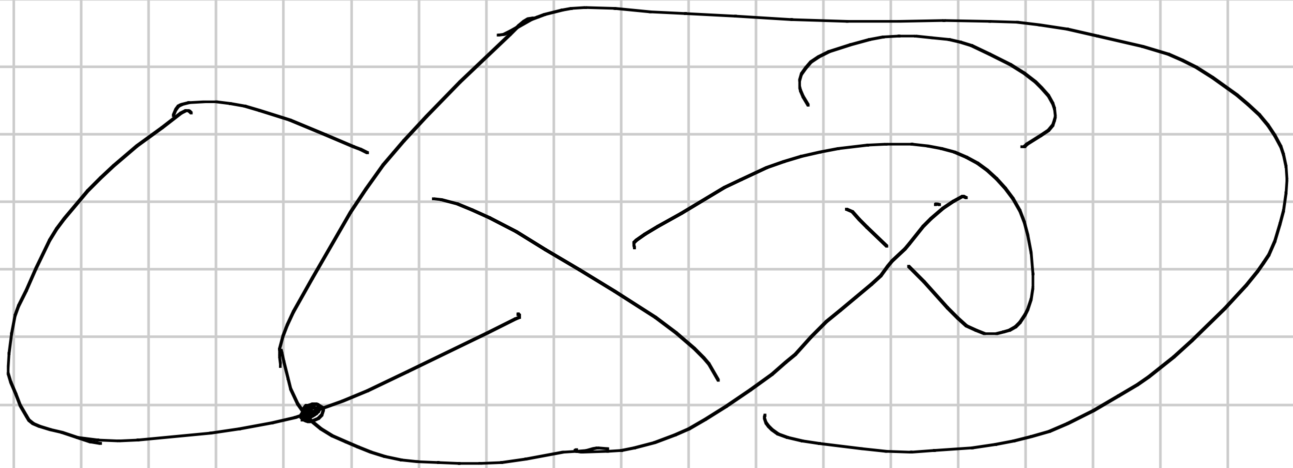
Prop: sono equivalenti.

Ovvio: $(2) \leq (3) \leq (1)$.

Facile: $(3) \leq (2)$.

Ho (K_t) con pti doppi in $t_1, \dots, t_m$

Prendo una proiezione di K_{t_j}:



La stessa proiezione di $K_{t_j-\varepsilon}$ e $K_{t_j+\varepsilon}$ sono legate da scambio di incrocio. Le proiez. così trovate di

$K_{t_j+\varepsilon}$ e $K_{t_{j+1}-\varepsilon}$

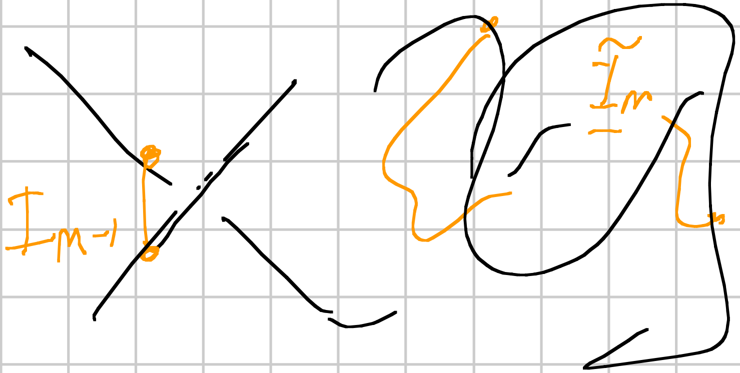
danno nodi isotopi $\Longrightarrow$ sono legate da $R_I / R_{II} / R_{III}$

(1) ≤ (2) H_0 $(K_t)_{t\in[0,1]}$ con pti doppi in $t_1, \dots, t_m$

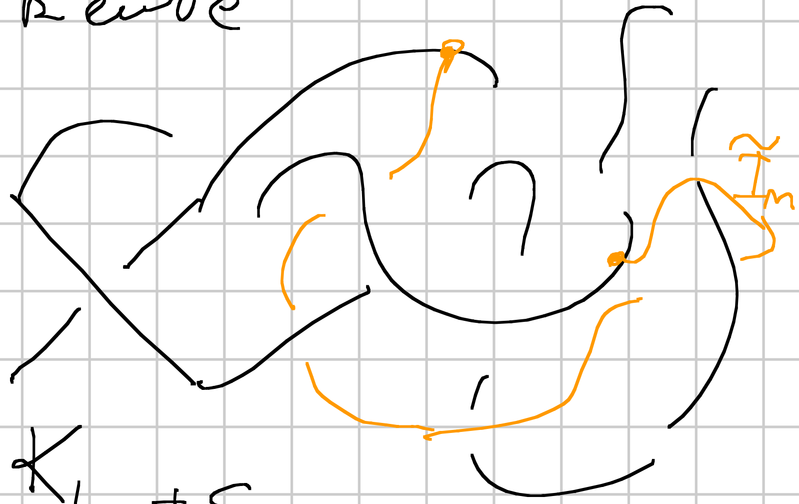
$K_{t_m-\varepsilon}$ $K_{t_m+\varepsilon}$

$$\tilde{K}_{t_m-\varepsilon} = K_{t_m-\varepsilon} \cup I_m$$

Ora la deformazione di $K_{t_m-\varepsilon}$ in $K_{t_{m-1}+\varepsilon}$ è isotopia $\Longrightarrow$ è isotopia ambiente



$K_{t_{m-1}-\varepsilon}$



$K_{t_{m-1}+\varepsilon}$

Pongo $\tilde{K}_{t_{n-1}-\varepsilon} = K_{t_{n-1}-\varepsilon} \cup I_{n-1} \cup \tilde{I}_n$

Procedo a ritroso fino a 0 trovando

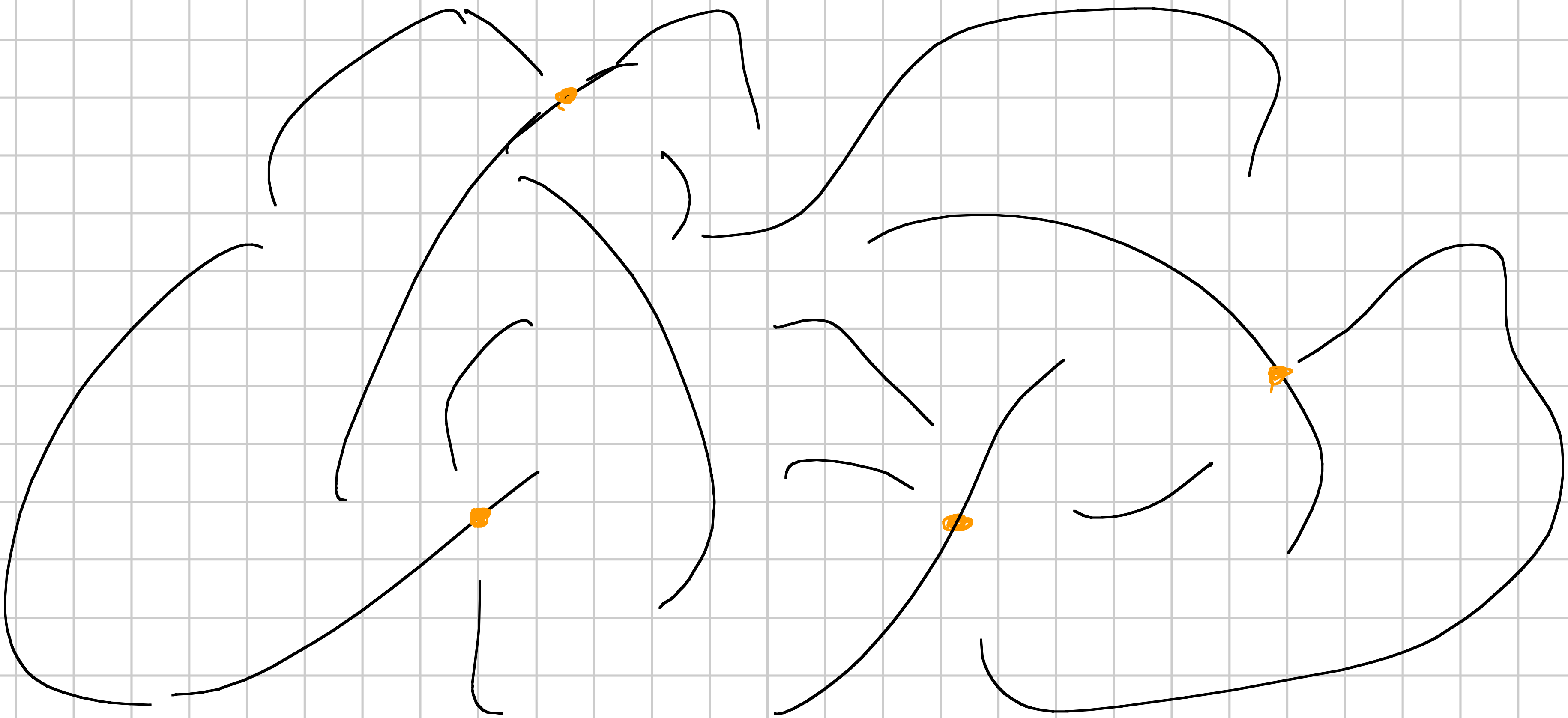
$$\tilde{K}_0 = K_0 \cup \tilde{I}_1 \cup \dots \cup \tilde{I}_n$$

So che

espandola per ogni j ottengo un il nodo banale.

Ora espando una isotopia di $\tilde{K}_0$ in modo che ogni $\tilde{I}_j$ torni a essere un segmento continuo

Metto questi piccoli segmenti dritti tutti paralleli fra loro e proietto sul piano a loro ortogonale :



scambiando gli incroci mancati dai • trovo proiet. nodo banale