UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 18/7/17 — Quesiti

Nome ______________ **Cognome** ______________ **Matricola** ␣␣␣␣␣␣

1. Per quali $k \in \mathbb{R}$ è diagonalizzabile la matrice $\begin{pmatrix} 4k^2-3k-5 & -4k^2+6k+10 \\ 2k^2-2k-4 & -2k^2+4k+8 \end{pmatrix}$?

2. Data $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ determinare $p_A(t)$ sapendo che $\mathrm{tr}(A) = -4$, che $\det(A) = 7$ e che $p_A(-2) = 11$.

3. In $\mathbb{R}^3$ trovare tutti i vettori unitarî, con somma delle coordinate nulla e ortogonali a $\begin{pmatrix} 6 \\ 4 \\ -7 \end{pmatrix}$.

4. Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ esiste una base ortonormale di $\mathbb{R}^3$
costituita da autovettori della matrice $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & -t & t^2-5 \\ t^2-4t & t^3+1 & 2 \\ 1+t & t^2-2t-1 & t-\pi \end{pmatrix}$.

5. Determinare il tipo affine della quadrica $2x^2+17y^2+13z^2-6xz-2x-4y+6z+2=0$.

6. Per quali $t \in \mathbb{R}$ la retta in $\mathbb{P}^3(\mathbb{R})$ passante per $[2:0:1:0]$ e per $[1:t:0:3]$
incontra quella passante per $[1:-1:0:2]$ e per $[t+1:0:1:0]$?

7. Per quali $a, b \in \mathbb{R}$ la forma $(ax^3y^2 - 6xy^3)\,\mathrm{d}x + (10x^4y + bx^2y^2)\,\mathrm{d}y$ è esatta su $\mathbb{R}^2$?

Le risposte devono essere sinteticamente giustificate

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 18/7/17 — Esercizî

1. Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ data da $\alpha(s) = \begin{pmatrix} s + \cos(2s) \\ s^3 - s^2 + s \\ s^2 + \sin(3s) \end{pmatrix}$.

(A) (2 punti) Provare che α è semplice e regolare.

(B) (5 punti) Determinare il riferimento di Frénet di α nel punto $s = 0$.

(C) (5 punti) Calcolare curvatura e torsione di α nel punto $s = 0$.

2. In $\mathbb{R}^3$ considerare i vettori $v_1 = 4e_1 + e_2 - e_3$, $v_2 = 2e_1 + e_2 + 3e_3$ e il sottospazio $X = \text{Span}(v_1, v_2)$

(A) (4 punti) Esibire la matrice M della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su X.

(B) (3 punti) Dette p_1 e p_2 le proiezioni ortogonali su $v_1^\perp$ e $v_2^\perp$ rispettivamente, provare che l'applicazione lineare $f = p_1 \circ p_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ ha gli autovalori 0 e 1. [Suggerimento: *non* trovare le matrici di p_1 e p_2, e in particolare *non* calcolare il polinomio caratteristico di f.]

(C) (3 punti) Trovare un autovettore di f relativo all'autovalore diverso da 0 e da 1. [Suggerimento: come sopra.]

(D) (2 punti) Trovare l'autovalore di f diverso da 0 e da 1. [Suggerimento: come sopra.]

Risposte ai quesiti

5. ♡

1. $k \neq \frac{3}{2}$

2. $t^3 + 4t^2 - 5t - 7$

3. $\pm\frac{1}{7\sqrt{6}}\begin{pmatrix} 11 \\ -13 \\ 2 \end{pmatrix}$

4. $t = 3$

5. Insieme vuoto

6. $t = 1$ e $t = -\frac{3}{2}$

7. $a = 20,\ b = -9$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♡ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

Soluzioni degli esercizî

5. ♡

1.

(A) $Y'(t) > 0$ per ogni t

(B) $t = \frac{1}{\sqrt{11}}\begin{pmatrix}1\\1\\3\end{pmatrix}$, $n = \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}-2\\-1\\1\end{pmatrix}$, $b = \frac{1}{\sqrt{66}}\begin{pmatrix}4\\-7\\1\end{pmatrix}$

(C) $\kappa = \frac{2}{11}\sqrt{6}$, $\tau = -\frac{23}{44}$

2.

(A) $M = \frac{1}{54}\begin{pmatrix}50 & 14 & -2\\14 & 5 & 7\\-2 & 7 & 53\end{pmatrix}$

(B) $p_2(v_2) = 0$, dunque $f(v_2) = 0$; se $v_3 = v_1 \wedge v_2$ si ha $p_1(v_3) = v_3$ e $p_2(v_3) = v_3$, dunque $f(v_3) = v_3$

(C) Poiché $p_2(X) \subset X$ e $p_1(X) \subset X$ si ha $f(X) \subset X$; inoltre $\mathrm{Im}(f) \subset \mathrm{Im}(p_1) = v_1^\perp$, dunque un autovettore di f è un generatore u_1 di $X \cap v_1^\perp$

(D) Se u_2 è un generatore di $X \cap v_2^\perp$ l'immagine di u_1 tramite f si ottiene proiettando ortogonalmente prima su u_2 e poi su u_1; facendo i calcoli si trova $u_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\5\end{pmatrix}$ e $u_2 = \begin{pmatrix}11\\2\\-8\end{pmatrix}$, da cui facilmente $f(u_1) = \frac{1}{7}u_1$