**UNIVERSITÀ DI PISA**

**Corso di Laurea in Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile**

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 10/1/17 — Quesiti

**Nome** ____________ **Cognome** ____________ **Matricola** ______

**1.** Se $A \in \mathcal{M}_{3\times 3}(\mathbb{C})$ ha traccia e determinante nulli e un autovalore non nullo, si può concludere che è diagonalizzabile? Spiegare.

**2.** Trovare gli autovalori di $\begin{pmatrix} -5 & 6 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ e una base di $\mathbb{R}^2$ che la diagonalizza.

**3.** Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ la forma bilineare $\langle\,.\,|\,.\,\rangle_A$ con $A = \begin{pmatrix} 3 & t^2 \\ t+2 & 5 \end{pmatrix}$ sia un prodotto scalare.

**4.** Stabilire per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ la matrice $\begin{pmatrix} 0 & 5 & -4 \\ -5 & 0 & 3 \\ 4 & -3 & 0 \end{pmatrix}$ sia coniugata a $\begin{pmatrix} 0 & \alpha & 0 \\ -\alpha & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

**5.** Verificare che la conica di equazione $5x^2 - 2xy + 2y^2 - 6y = 0$ è non degenere, e determinarne il tipo affine.

**6.** Stabilire per quali $t \in \mathbb{R}$ il punto $[t-1; -t; t+1]$ sia un punto all'infinito della quadrica $8x^2 - y^2 + z^2 + 2xy - xz + yz + \sqrt{17}x - \pi y + e = 0$.

**7.** Calcolare $\int_\alpha \frac{x\,\mathrm{d}x + y\,\mathrm{d}y}{1+x^2+y^2}$ con $\alpha : [0,1] \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = (t^2, \cos(\pi t))$.

**Le risposte devono essere sinteticamente giustificate**

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Questo foglio deve essere intestato immediatamente con nome, cognome e matricola. Questo foglio va consegnato alla fine della prima ora. Durante la prima ora non è concesso alzarsi né chiedere chiarimenti. Durante la prima ora sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

UNIVERSITÀ DI PISA

Corso di Laurea in
Ingegneria Civile, Ambientale ed Edile

Geometria e Algebra Lineare / II parte — Scritto del 10/1/17 — Esercizî

**1.** In $\mathbb{R}^3$ dotato del prodotto scalare standard considerare il sottospazio $U = \mathrm{Span}\left(\begin{pmatrix}4\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix}\right)$.

(A) (3 punti) Esibire la matrice $M$ della proiezione ortogonale di $\mathbb{R}^3$ su $U$.

(B) (3 punti) Verificare le proprietà caratterizzanti di $M$ come matrice di una proiezione ortogonale.

(C) (3 punti) Posto $N = 2M - \mathrm{I}_3$ provare che $N$ è una matrice ortogonale.

(D) (3 punti) Descrivere l'azione di $N$ su $U$ e su $U^\perp$; dedurne una illustrazione geometrica di $N$.

(E) (3 punti) Dedurre da (D) che $N$ è diagonalizzabile ed esibire una sua coniugata diagonale.

**2.** Considerare la curva $\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^2$ data da $\alpha(t) = \begin{pmatrix} t^3 - 2t^2 - t \\ -t^3 + t^2 + 3t \end{pmatrix}$.

(A) (1 punto) Provare che $\alpha$ è regolare.

(B) (3 punti) Calcolare la curvatura di $\alpha$ nel punto $t = 0$

(C) (2 punti) Determinare il segno della curvatura di $\alpha$ al variare di $t$.

(D) (3 punti) Calcolare $\int_\beta (y\,\mathrm{d}x + x\,\mathrm{d}y)$ dove $\beta$ è la restrizione di $\alpha$ a $[0, 1]$.

Deve essere esibito il libretto o un documento. I telefoni devono essere mantenuti spenti. Sul tavolo è consentito avere solo i fogli forniti e la cancelleria. Dall'inizio della seconda ora si possono consultare i libri di testo del corso, esclusivamente in originale e senza annotazioni. Si può uscire solo in casi eccezionali. Ogni foglio consegnato deve recare nome e numero di matricola. La soluzione di ogni esercizio deve essere consecutiva su un solo foglio. La minuta non va consegnata. Per risolvere un punto di un esercizio è sempre lecito utilizzare gli enunciati dei punti precedenti, anche se non si è riusciti a risolverli.

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

# Risposte ai quesiti

## 5. ♢

**1.** Sì, se $\lambda \neq 0$ è un autovalore, gli altri sono 0 e $-\lambda$, dunque i tre autovalori sono distinti

**2.** $\lambda_1 = 4,\ v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix};\ \lambda_2 = -7,\ v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix}$

**3.** $t = -1$

**4.** $\alpha = \pm 5\sqrt{2}$

**5.** Ellisse

**6.** $t = 2,\ t = \frac{5}{4}$

**7.** $\frac{1}{2} \ln \frac{3}{2}$

1. ♠ 2. ♡ 3. ♠ 4. ♣ 5. ♢ 6. ♠ 7. ♣ 8. ♡ 9. ♣ 10. ♢

# Soluzioni degli eserciziî

## 5. $\diamondsuit$

**1.**

(A) $M = \frac{1}{38}\begin{pmatrix} 34 & 6 & 10 \\ 6 & 29 & -15 \\ 10 & -15 & 13 \end{pmatrix}$

(B) $M \cdot M = {}^{\mathrm{t}}M = M$

(C) ${}^{\mathrm{t}}N \cdot N = N \cdot N = (2M - \mathrm{I}_3) \cdot (2M - \mathrm{I}_3) = 4M \cdot M - 4M + \mathrm{I}_3 = \mathrm{I}_3$

(D) Su $U$ la $N$ agisce come l'identità e su $U^{\perp}$ come meno l'identità, dunque si tratta della riflessione rispetto al piano $U$

(D) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$

**2.**

(A) Le derivate delle componenti sono opposte fra loro solo in $t = 1$, ma ivi non si annullano, dunque non si annullano mai insieme

(B) $\frac{1}{\sqrt{10}}$

(C) Sempre positiva

(D) $-6$