

Geometria 30/3/17

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{K})$; siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ tutti
i suoi autovalori (con m.a. anche quelli
in $\mathbb{C}$ se $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) ; allora

$$\begin{aligned} P_A(t) &= (t - \lambda_1)(t - \lambda_2) \dots (t - \lambda_n) \\ &= t^n - (\lambda_1 + \lambda_2 + \dots + \lambda_n)t^{n-1} + \dots + (-1)^n \lambda_1 \dots \lambda_n \end{aligned}$$

Poi sappiamo

$$P_A(t) = t^m - \text{tr}(A) \cdot t^{m-1} + \dots + (-1)^m \det(A)$$

$$\Rightarrow \text{tr}(A) = \lambda_1 + \dots + \lambda_n$$

Somma di
tutti gli autovalori

$$\det(A) = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$$

prodotto di tutti
gli autovalori

Comparsa: per una 2×2 tr e det
consentono di trovare λ_1, λ_2 .

$$A \text{ simm}; \quad A = \left(\begin{array}{c|c} A_k & \\ \hline & \end{array} \right) \Bigg\}^k$$

$$d_k = \det(A_k)$$

$$\underbrace{\quad}_k \quad (d_0 = 1)$$

Teo: se $d_1, \dots, d_{n-1} \neq 0$ allora i spuri
degli autovalori di A sono i spuri di
 $d_1/d_0, d_2/d_1, \dots, d_n/d_{n-1}$.

Idea: il det è prodotto degli
autovalori. Se penso ad A
costruita per passi $A_1, A_2, A_3, \dots$

FALSO

posso immaginare che A_k abbia più stati
autovalori di A_{k-1} più uno nuovo:

i primi $k-1$ hanno i segni di $d_1/d_0, \dots, d_{k-1}/d_{k-2}$:

e quello nuovo ha segno $+$ dove

d_{k-1} e d_k sono concordi:

($+$ = segno di d_k/d_{k-1})

Se quello nuovo ha segno - allora
 d_{k-1} e d_k sono discordi.

$$(- = \text{segno di } d_k / d_{k-1}) -$$

Dim: per induzione finita su k dimostriamo che
 A_k ha autord con i segni di $d_1/d_0, \dots, d_k/d_{k-1}$.

$$k=1 \quad A_1 = (d_1) \quad \text{autord } d_1 = d_1/d_0 \quad \checkmark$$

Supponiamo vero per $k-1$ con $k < n$.

Supponiamo che A_{k-1} abbia

p autoval pos

m autoval neg

$(p, m) = \text{segui } L. \quad d_1/d_0, \dots, d_{k-1}/d_{k-2}$

Caso I : $d_k/d_{k-1} > 0$; allora devo

provare che A_k ha $p+1$ autov. pos
e m autov. neg.

Poiché d_k e d_{k-1} sono concordi, il
numero di autov. neg. di A_k ha
lo stesso parità di m . Quindi due casi:

I.O. ce ne sono m : ok

I.1 ce ne sono $\geq m+2$:

chiamo $X =$ generato dagli autovett. di A_{k-1}
rispetto ad autoval > 0
 $\dim(X) = p \quad X \subset \mathbb{R}^{k-1} \subset \mathbb{R}^k$

$Y =$ generato dagli autovett. di A_k
rispetto ad autoval < 0
 $\dim(Y) \geq m+2 \quad Y \subset \mathbb{R}^k$

$$\langle Av/v \rangle > 0 \quad \forall v \in X, v \neq 0$$

$$\langle Av/v \rangle < 0 \quad \forall v \in Y, v \neq 0$$

$$\dim X + \dim Y \geq p + m + 2 = (p + m + 1) + 1 = k + 1$$

$$X, Y \subset \mathbb{R}^k \Rightarrow X \cap Y \neq \{0\}.$$

Contradizione

$$I.2 \quad u, u \text{ sono } \leq m - 2.$$

(analogo)

$$\text{II. } d_k/d_{k-1} < 0$$

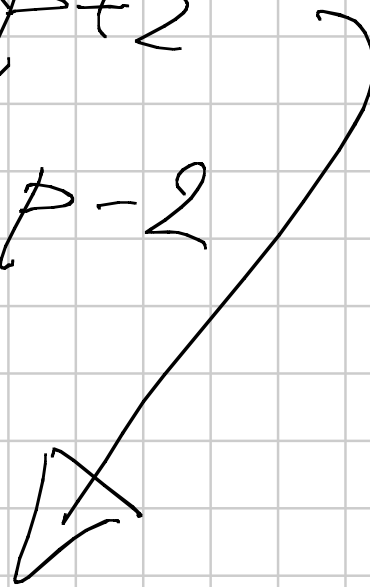
$\Rightarrow$ il numero di autoval. neg. di A_k ha
parità diversa dal quello di A_{k-1}

$\Rightarrow$ il numero di autoval. pos. di A_k
ha la stessa parità di quello di A_{k-1} .

II.0 ce ne sono p ✓

II.1 ce ne sono $\geq p+2$

II.2 ce ne sono $\leq p-2$



$X = \sqrt{\text{pencilo degli autovet. di } A_{k-1}}$
rispetto ad autovel < 0

$Y = \sqrt{\text{pencilo degli autovet. di } A_k}$
rispetto ad autovel > 0

$$X, Y \subset \mathbb{R}^k \quad \dim X = m \quad \dim Y \geq p+2$$

$$m + p + 2 = k + 1$$

$$\langle Av/v \rangle < 0 \quad \forall v \in X, v \neq 0$$

$$\langle Av/v \rangle > 0 \quad \forall v \in Y, v \neq 0$$

condizione

(altro andopo).

$k=m$: se $d_m \neq 0$ come primo.

Se $d_m = 0$ ho almeno un autovel $= 0$
e si fa vedere (con opportuni skip XX
come sopra)

che ci sono al più $p+1$ autovel ≤ 0

e al più $m+1$ fattori ≤ 0

$\Rightarrow$ almeno p pos e m neg.

ma $p + m + 1 = n$ e allora ce ne sono
 p pos, m neg, uno nullo. 

Versione completa del teorema di Routh

e sue conseguenze reali -

Def: chiamo $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ normale
se $A^* \cdot A = A \cdot A^*$.

Oss: sono normali:

- 1) le A hermitiane ($A^* = A$)
(in particolare: reali simmetriche)

2) A antihermitiana ($A^* = -A$)
(in part. le re di antisimmetriche)

3) A unitaria ($A^* \cdot A = I_n$)
(in part. le re di ortogonali)

Ma non solo.

Oss: Se A è normale allora $B = A + iI_n$
è anch'essa normale:

$$\begin{aligned} B^* \cdot B &= (A^* + \bar{i}I_n) \cdot (A + iI_n) \\ &= A^* \cdot A + iA^* + \bar{i}A + |i|^2 \cdot I_n \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B \cdot B^* &= (A + iI_n)(A^* + \bar{i}I_n) \\ &= A \cdot A^* + \bar{i}A + i \cdot A^* + |i|^2 \cdot I_n \end{aligned}$$

Quindi sono normali:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2-i \\ 2+i & 7 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} i & 0 \\ 0 & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1+i & 2-i \\ 2+i & 7+i \end{pmatrix}$$

(non è dei tre tipi di sopra)

$$\frac{1}{2} \begin{pmatrix} 1 & -\sqrt{3} \\ \sqrt{3} & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \dots$$

Teo (spettro su $\mathbb{C}$) :

A normale $\iff$ si diagonalizza tramite
una matrice, cioè
ammette base ortonormale
di autovettori; cioè
 $\exists M \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ t.c.

$$M^* \cdot M = I_n \quad \text{e}$$

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Dim: $\Leftarrow$

Nota che una matrice diagonale è normale:

$$A = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}, \quad A^* = \begin{pmatrix} \bar{\lambda}_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \bar{\lambda}_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A \cdot A^* = \begin{pmatrix} |A_1|^2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \ddots & & \\ & & |A_n|^2 & \end{pmatrix} = A^* \cdot A.$$

Prova dunque il fatto ~~più~~ facile:

se $\exists M$ t.c. $M^* \cdot M = I_n$ e $B = M^{-1} \cdot A \cdot M$ è normale
allora A è normale.

Si fa:

$$A = M \cdot B \cdot M^{-1} = M \cdot B \cdot M^*$$

$$\Rightarrow A^* = (M^*)^* \cdot B^* \cdot M^* = M \cdot B^* \cdot M^*$$

$$A^* \cdot A = \underbrace{(M B^* M^*)}_{I_n} (M B M^*) = M \cdot B^* \cdot B \cdot M^*$$

$$A \cdot A^* = \underbrace{(M B M^*)}_{I_n} (M B^* M^*) = M \cdot B \cdot B^* \cdot M^*$$

$$\Rightarrow \text{ok, } A^* A = A \cdot A^*$$

$\Rightarrow$ Prendo u , autovettore unitario di A ,
lo completo a base ortonormale U_1
di $\mathbb{C}^n$, quindi $U_1^* \cdot U_1 = I_n$ e

$$U_1^* \cdot A \cdot U_1 = \begin{pmatrix} \lambda_1 & w \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

Poiché A è normale e U_1 è unitario,

da sopra ottengo che $\begin{pmatrix} A_1 & w \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$ è normale:

$$\begin{pmatrix} A_1 & w \\ 0 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \overline{A_1} & 0 \\ w^* & A_1^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \overline{A_1} & 0 \\ w^* & A_1^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_1 & w \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

$$\parallel \begin{pmatrix} \|A_1\|^2 + \|w\|^2 & \dots \\ \dots & A_1 A_1^* \end{pmatrix}$$

$$\parallel \begin{pmatrix} \|A_1\|^2 & \dots \\ \dots & w^* w + A_1^* A_1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow W=0, \quad A, A^* = A^* \cdot A,$$

$$\Rightarrow U^* A U = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_1 \end{pmatrix}$$

con $A_1 \in M_{(n-1) \times (n-1)}$ normale

condotto per induzione come nel caso reale. $\square$

9.5.8. Esibire $A = P_W$ provando $A^* = A^2 = A$.

$$(a) W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix} \right)$$

$$P_W \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix} \right\|^2} \begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{(3+i)z + (1-2i)w}{9+1+1+4} \begin{pmatrix} 3-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{15} \begin{pmatrix} 10 & 1-7i \\ 1+7i & 5 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} z \\ w \end{pmatrix}$$

$$A^* = A \quad \checkmark$$

$$A^2 = \frac{1}{15 \cdot 15} \begin{pmatrix} 10 & 1-7i \\ 1+7i & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 10 & 1-7i \\ 1+7i & 5 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{15 \cdot 15} \begin{pmatrix} 100 + 1 + 49 & 10 - 70i + 5 - 35i \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{15 \cdot 15} \begin{pmatrix} \cancel{10} \cancel{150} & \cancel{15} - \cancel{105}i \\ \cancel{1+7i} & \dots \end{pmatrix}$$

(b)

$$W = \{z \in \mathbb{C}^2 : (1-i)z_1 + (2+i)z_2 = 0\}$$

$$= \text{Span} \begin{pmatrix} 2+i \\ i-1 \end{pmatrix}$$

$$P_W \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix} = \frac{(2-i)z_1 - (1+i)z_2}{7} \begin{pmatrix} 2+i \\ i-1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \underbrace{\begin{pmatrix} 5 & -1-3i \\ -1+3i & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad W = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+i \\ 3-2i \end{pmatrix} \right)$$

$$P_W \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} = \frac{(2+i)z_1 + (1-i)z_2 + (3+2i)z_3}{4+1+1+1+9+4} \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+i \\ 3-2i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{20} \begin{pmatrix} 5 & 1-3i & 8+i \\ 1+3i & 2 & 1+5i \\ 8-i & 1-5i & 13 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$

A

$$A^* = A \quad \checkmark$$

$$A^2 = A \quad \dots$$

(d)

$$W = \{z : iz_1 + (1-2i)z_2 + (3+i)z_3 = 0\}$$

$$= \left(\text{Span} \begin{pmatrix} -i \\ 1+2i \\ 3-i \end{pmatrix} \right)^\perp$$

$$P_W(z) = z - P_{W^\perp}(z)$$

$$= \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix} - \frac{i z_1 + (1-2i)z_2 + (3+i)z_3}{1+1+4+9+1} \begin{pmatrix} -i \\ 1+2i \\ 3-i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{16} \begin{pmatrix} 15 & 2+i & -1+3i \\ 2-i & 11 & -1-7i \\ -1-3i & -1+7i & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} z_1 \\ z_2 \\ z_3 \end{pmatrix}$$


 A

(e)

$$W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1-i \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2i \\ -4 \\ 3-i \end{pmatrix} \right)$$

$$= \text{Span} \left(\begin{pmatrix} (1-i)(3-i) - (3)(-4) \\ -(1 \cdot (3-i) - 3 \cdot (2i)) \\ 1 \cdot (-4) - (1-i)(2i) \end{pmatrix} \right) \perp$$

$$= \left(\text{Span} \begin{pmatrix} 14 + 4i \\ -3 - 7i \\ -6 + 2i \end{pmatrix} \right)^\perp$$

$$P_{W^\perp}(z) = z - \frac{(14 - 4i)z_1 + (-3 + 7i)z_2 + (-6 - 2i)z_3}{14^2 + 4^2 + 3^2 + 7^2 + 6^2 + 2^2} \begin{pmatrix} 14 + 4i \\ -3 - 7i \\ -6 + 2i \end{pmatrix}$$

$$= \dots$$

10.1.1

Trovare autov. / autoval.
+ diagonalizzabilità

$$(2) \quad \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

Oss: per una matrice triang. superiore
o inferiore gli autov. sono

i coeff. sulla diag. princ.:

$$\det(tI_n - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & \lambda_n \end{pmatrix}) = \det \begin{pmatrix} t-\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ * & & t-\lambda_n \end{pmatrix}$$
$$= (t-\lambda_1) \cdots (t-\lambda_n)$$

$$A = \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 = -3$$

$$\lambda_2 = 7$$

distinct $\Rightarrow e^{\lambda t}$ Liap.

$$V_1: \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (-3) \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x = -3x \\ x + 7y = -3y \end{cases}$$

$$x + 10y = 0$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 10 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$V_2: \begin{pmatrix} -3 & 0 \\ 1 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7 \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} -3x = 7x \end{cases}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$(b) \quad A = \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}$$

Simul. : ammette base autonoma di autovet.

Siccome non è $\lambda \cdot I_2$ gli autoval sono
distinti : i relativi autospazi sono n.c.

che sono autovalori di L ho trovato

$$P_A(t) = t^2 - 5t - 5$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{5 \pm \sqrt{25 + 20}}{2} = \frac{5 \pm 3\sqrt{5}}{2}$$

$$V_1: \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{5 + 3\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 4x - 3y = (5 + 3\sqrt{5})/2 \cdot x \\ -3x + y = (5 + 3\sqrt{5})/2 \cdot y \end{cases}$$

$$\begin{cases} 3(1 - \sqrt{5})x - 6y = 0 \\ -6x - 3(1 + \sqrt{5})y = 0 \end{cases}$$

$$\begin{cases} (1 - \sqrt{5})x - 2y = 0 \\ 2x + (1 + \sqrt{5})y = 0 \end{cases}$$

$$1 + \begin{pmatrix} 1 - \sqrt{5} & -2 \\ 2 & 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix} = 1 - 5 + 4 = 0$$

$$V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 - \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$V_2 : \begin{pmatrix} 4 & -3 \\ -3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \frac{5 - 3\sqrt{5}}{2} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$V_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 + \sqrt{5} \end{pmatrix}$$

OK: $\langle v_1 | v_2 \rangle = 0$

Matrice ortho du diagonaliser A:

$$M = \frac{1}{\sqrt{10+2\sqrt{5}}} \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 1-\sqrt{5} & 1+\sqrt{5} \end{pmatrix}$$

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} (5+3\sqrt{5})/2 & 0 \\ 0 & (5-3\sqrt{5})/2 \end{pmatrix}$$

$$(c) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = 7$$

$$\lambda_1 \cdot \lambda_2 = 14$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{7 \pm \sqrt{49 - 56}}{2} = \frac{7 \pm i\sqrt{7}}{2}$$

$\Rightarrow$ non diagon. su $\mathbb{R}$; su $\mathbb{C}$: v_1, v_2 come sopra