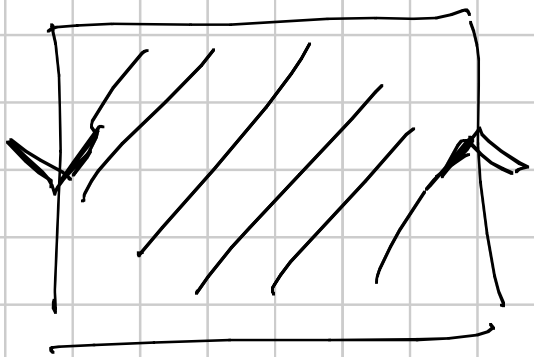
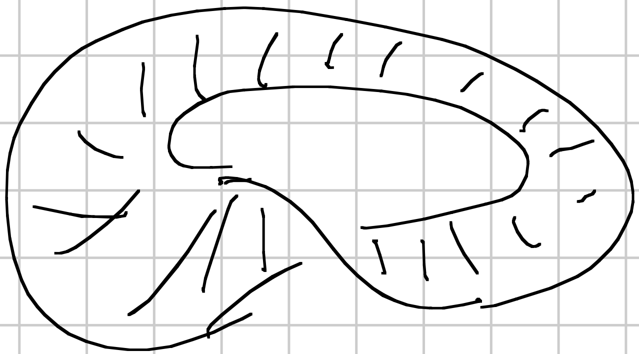
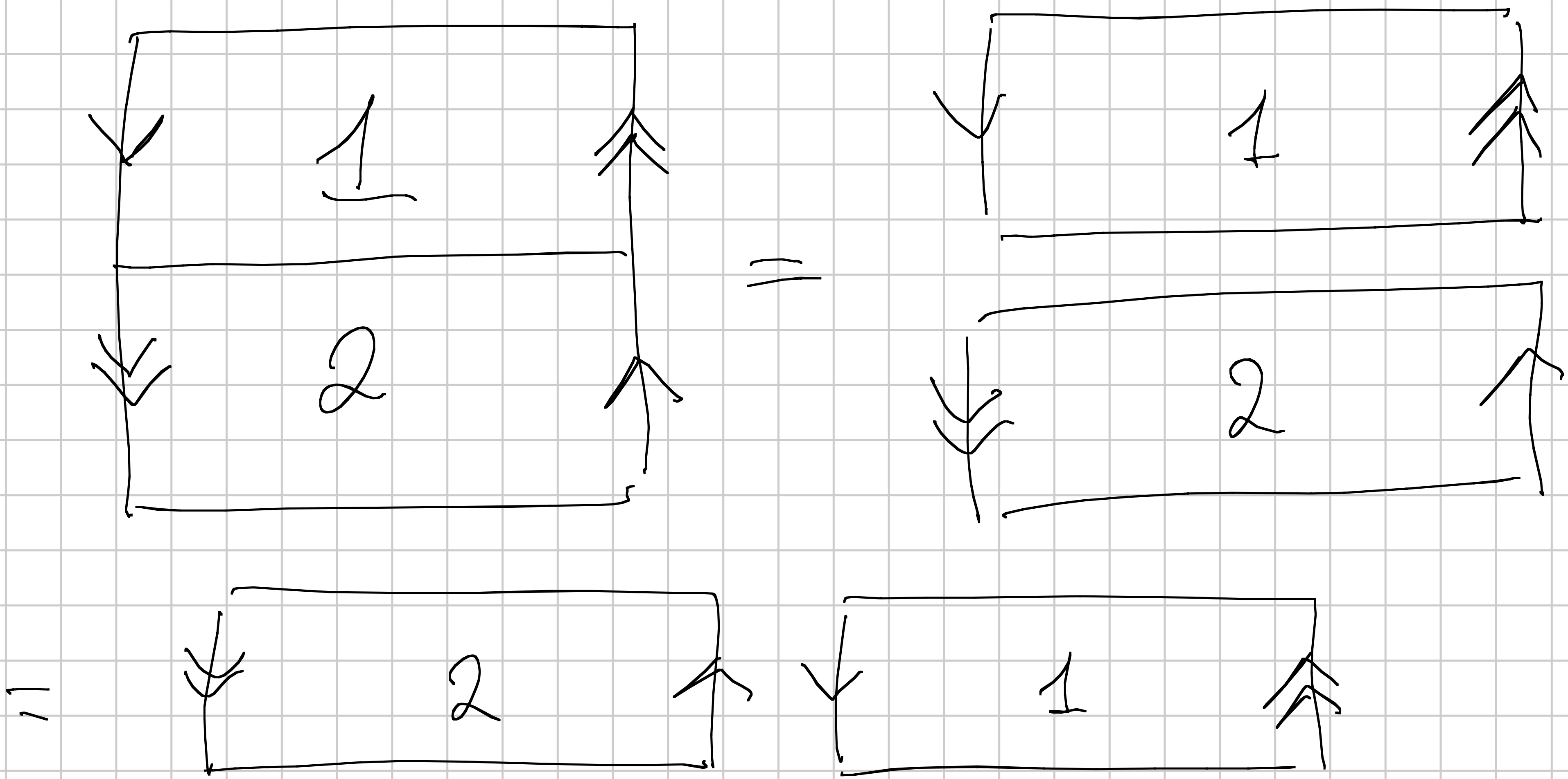
Geometrie 27/4/17

Nastrud. Möbius :

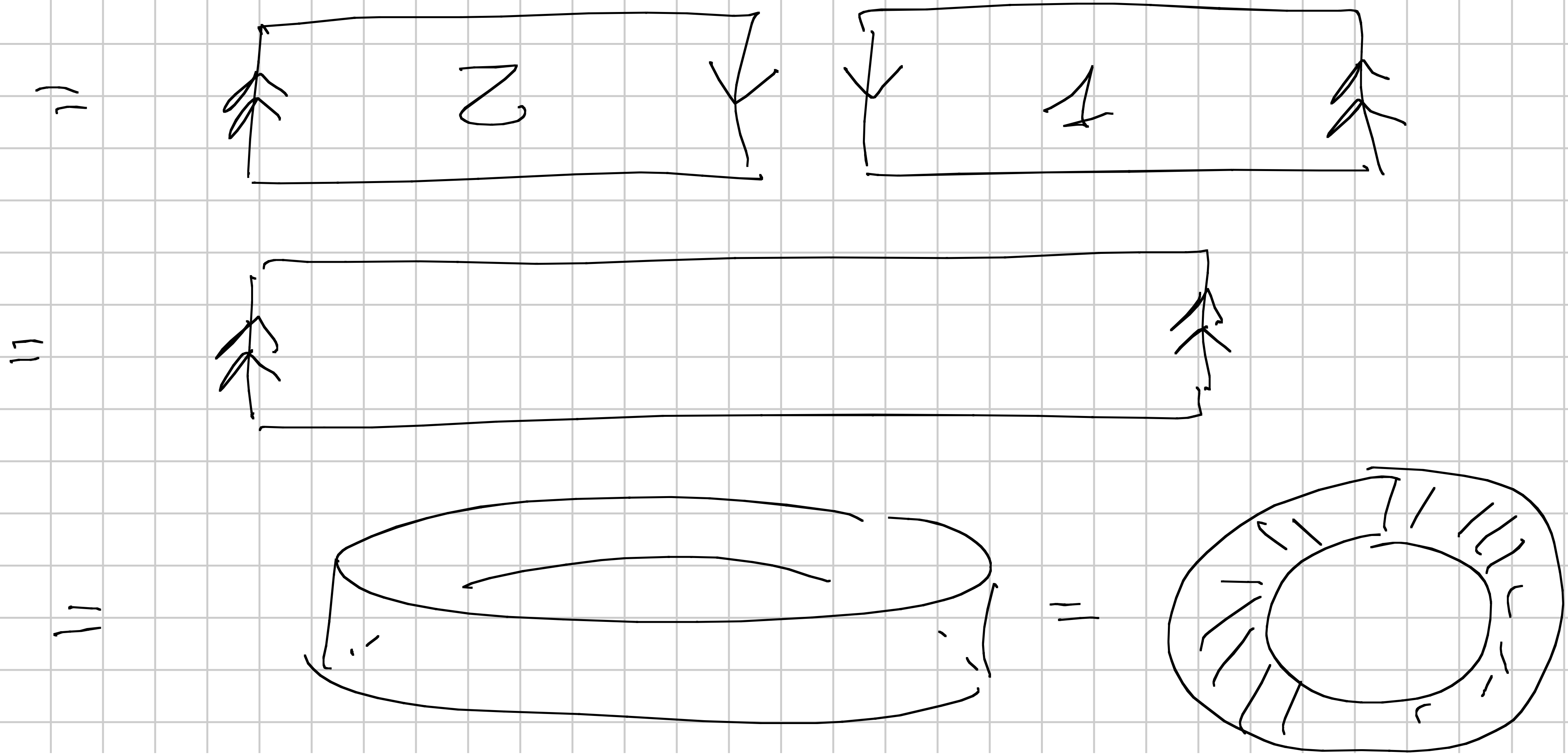


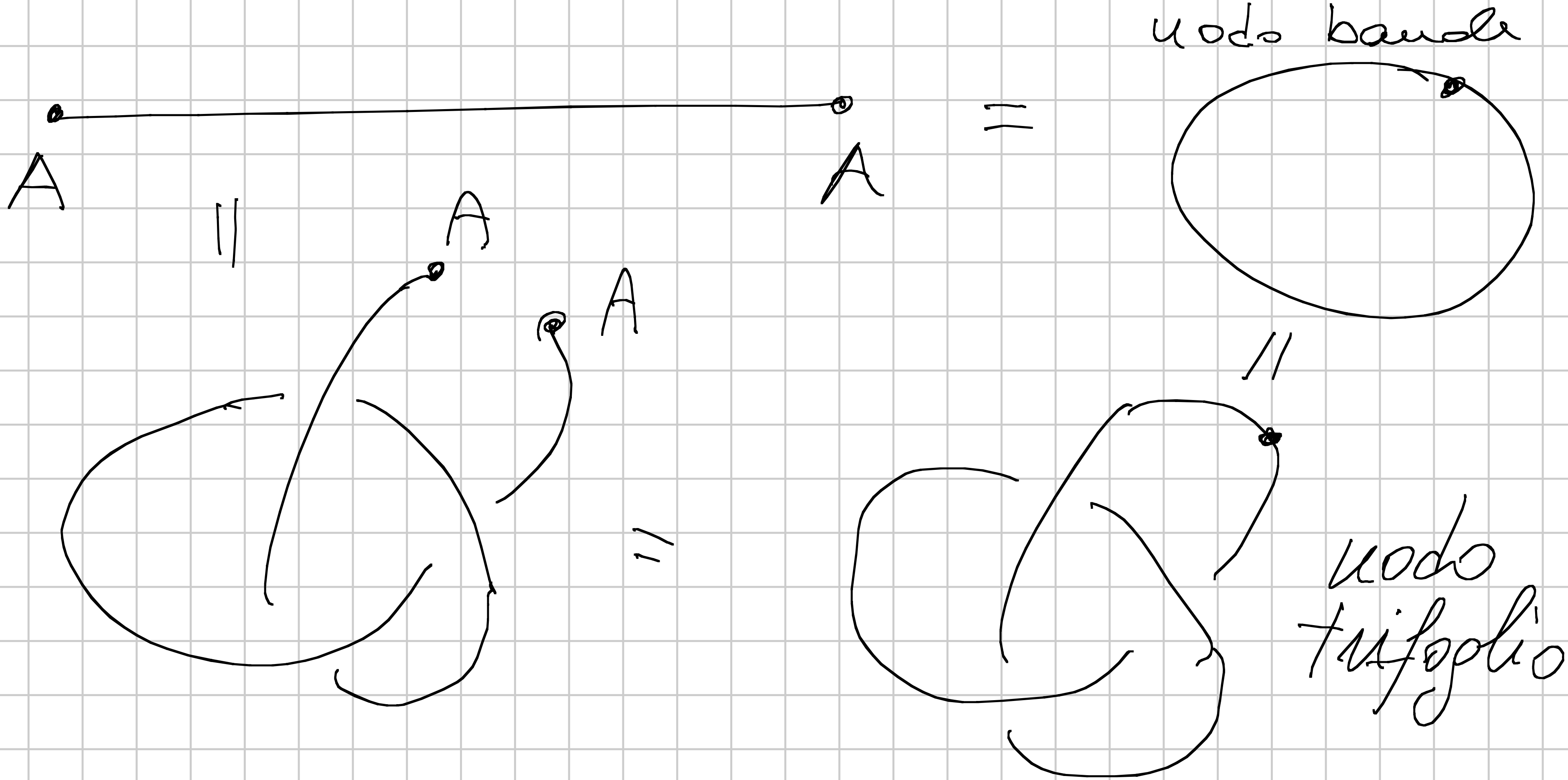
=



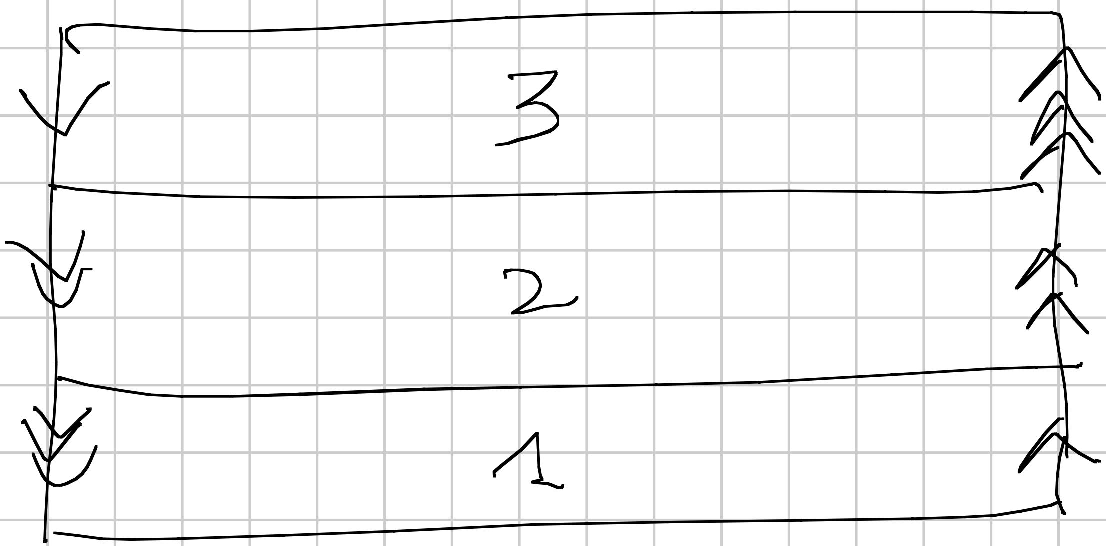


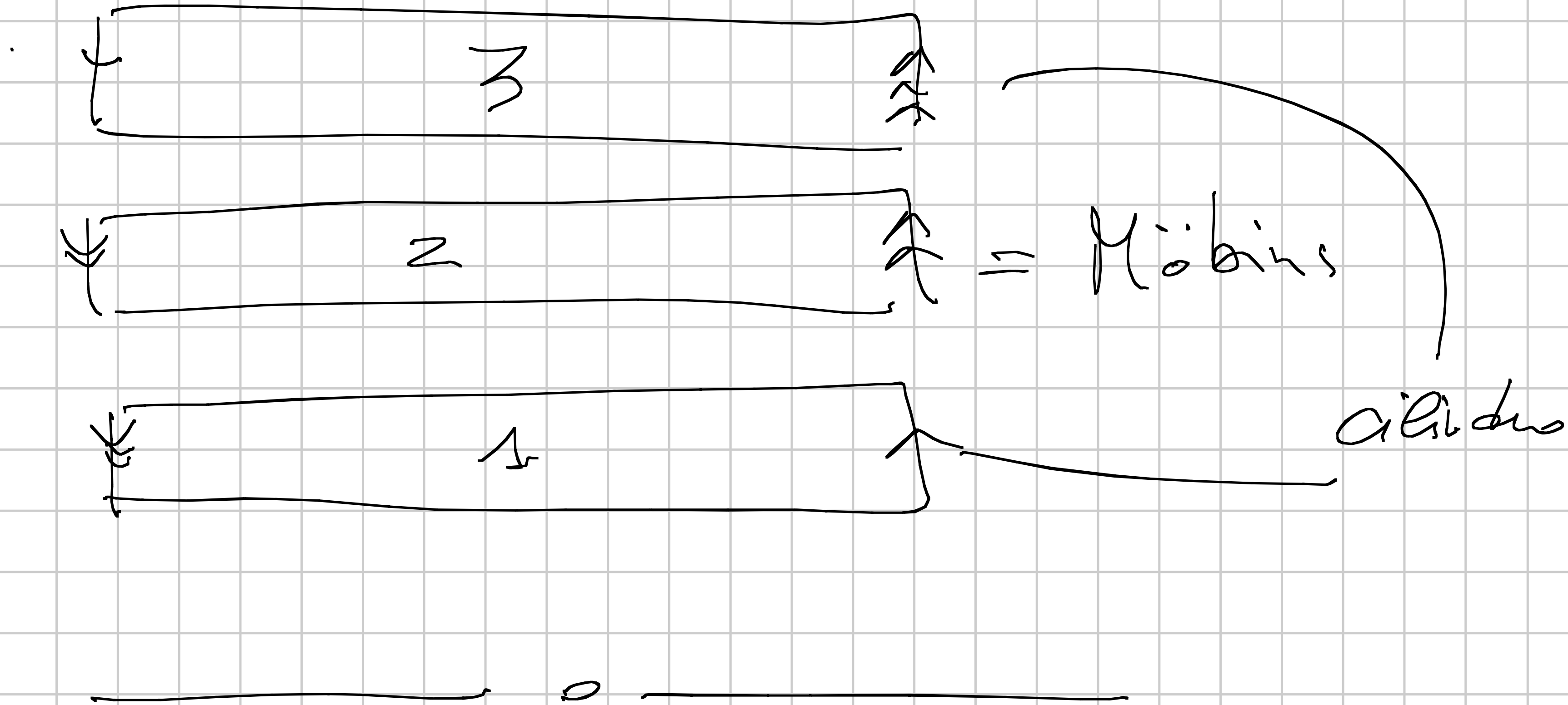
1
2
=
1
2
=
2
1


=
2
1
=
=
=


A
A
nodo banale
A
A
nodo trifoglio

Fatto: intrinsecamente sono uguali, ma estrinsecamente no.





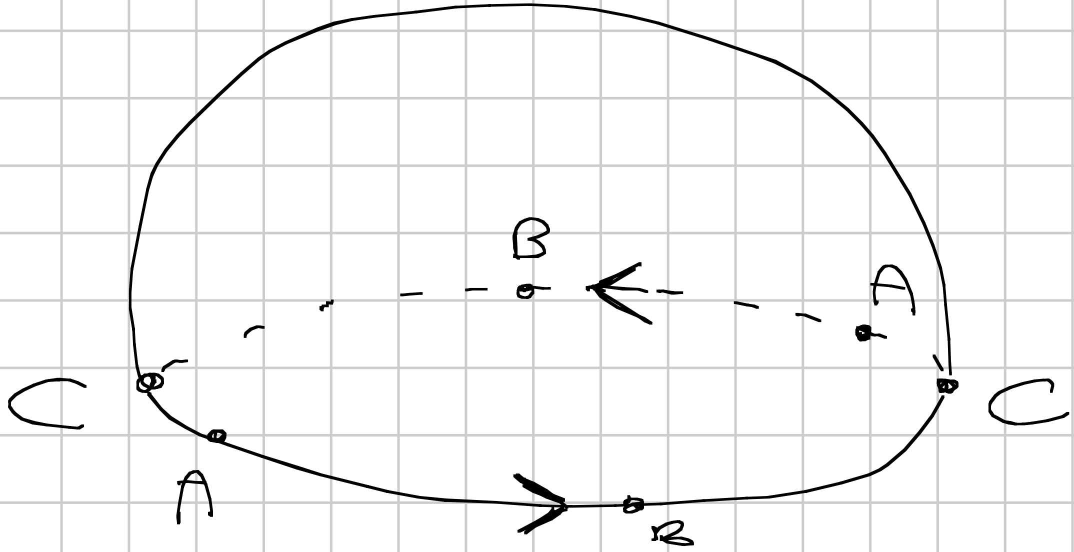
3
2
= Möbius
1
cilindro
0

Visto: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = D^2_+ \big/ {\scriptstyle x \sim -x \text{ se } x \in S^1}$

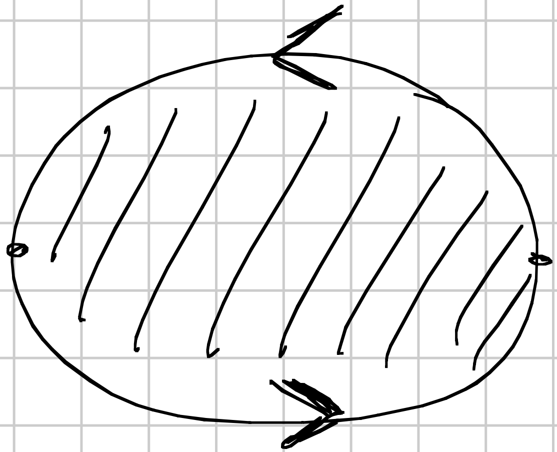
$$D^2_+ = \{ x \in S^2 : x_3 \geq 0 \}$$

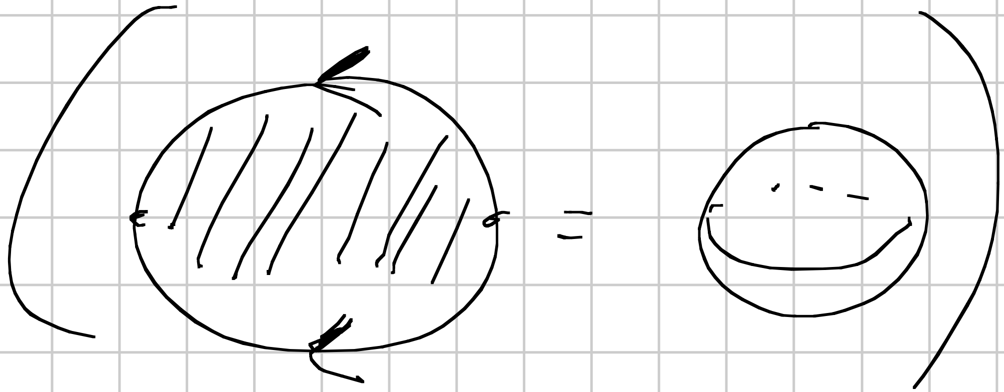
$$S^1 = \{ x \in S^2 : x_3 = 0 \}$$

$\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) =$

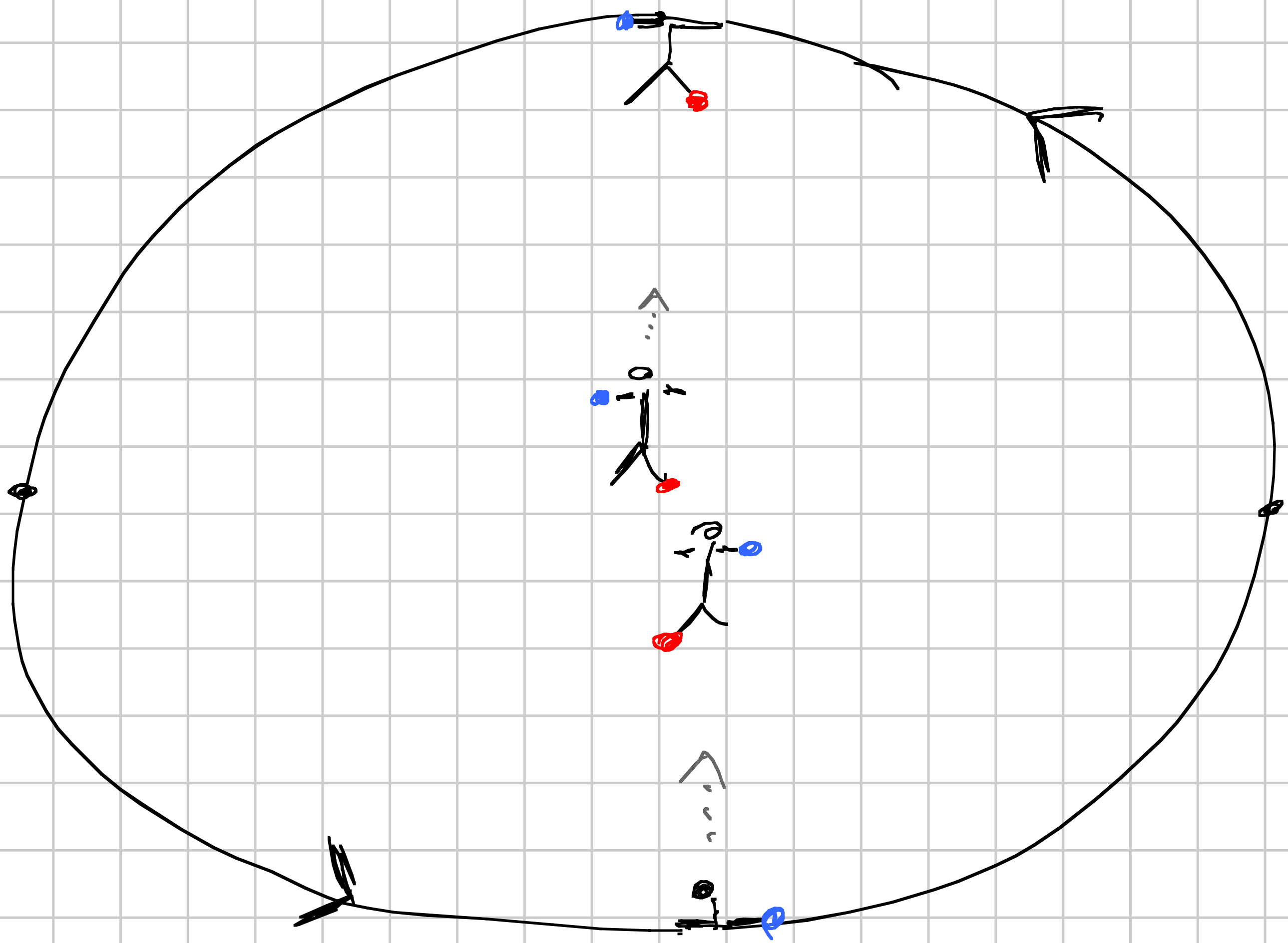


$=$

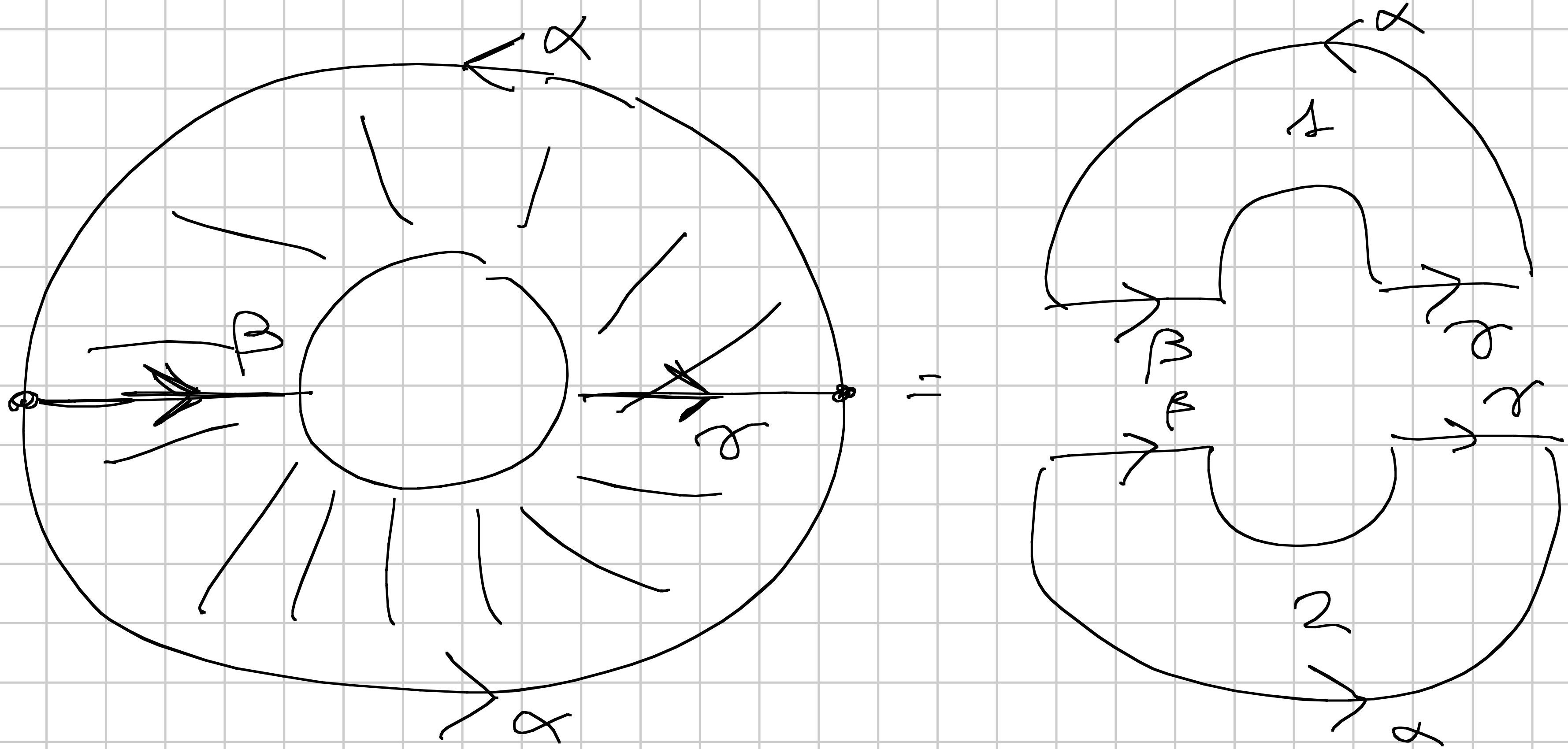


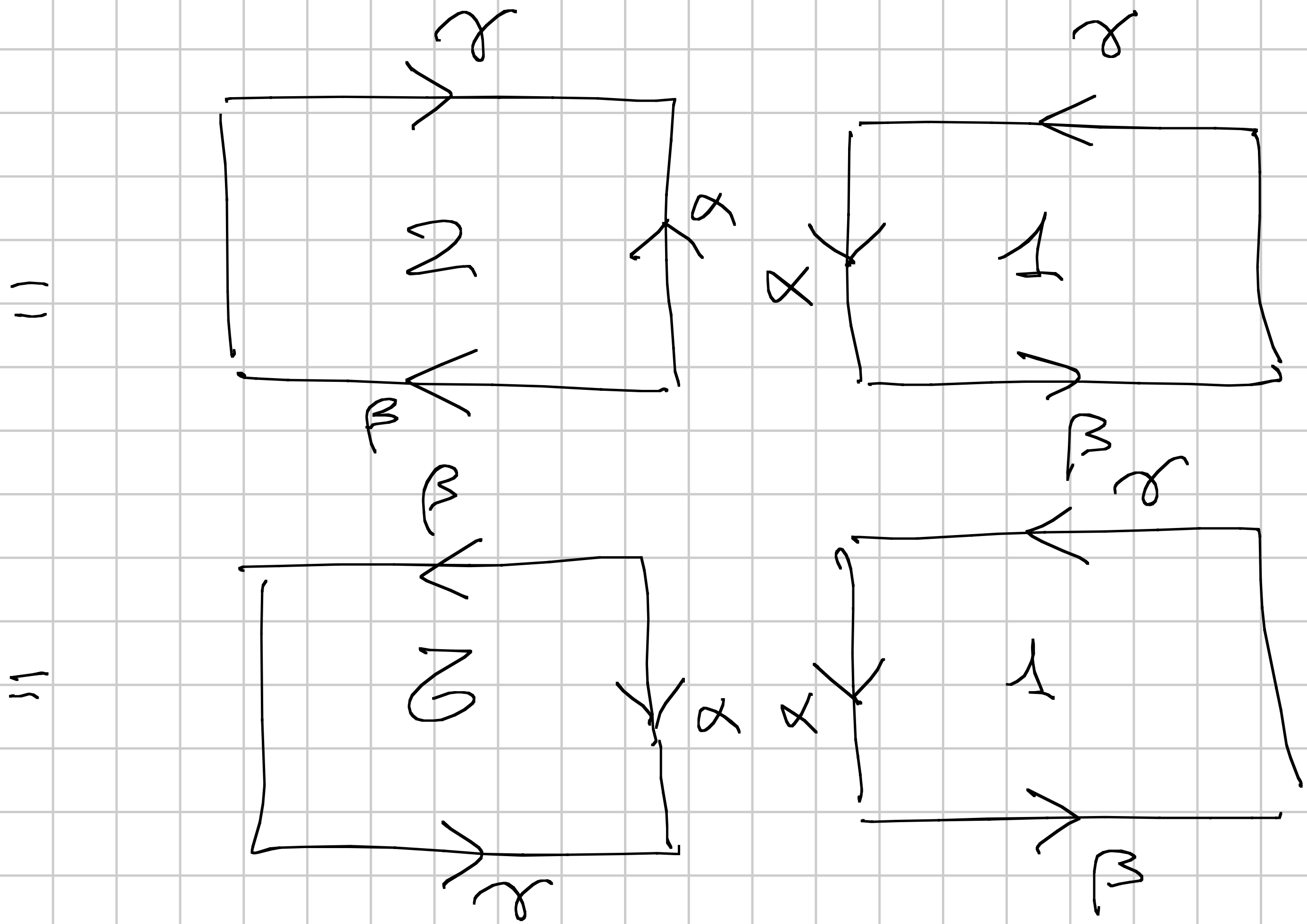


Fatto: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ non si può realizzare in $\mathbb{R}^3$.

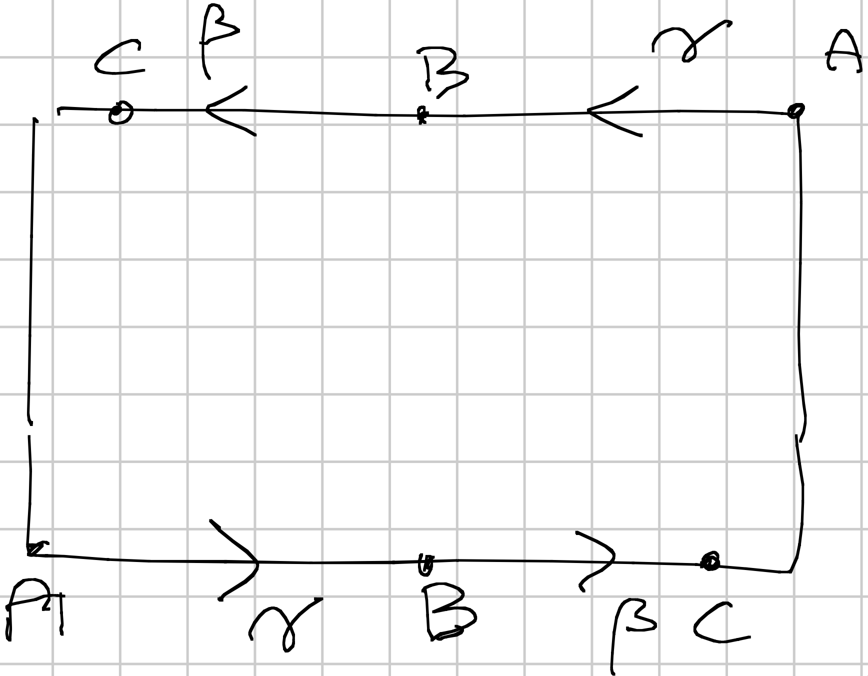


Esaminiamo $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \setminus$ piccolo disco :

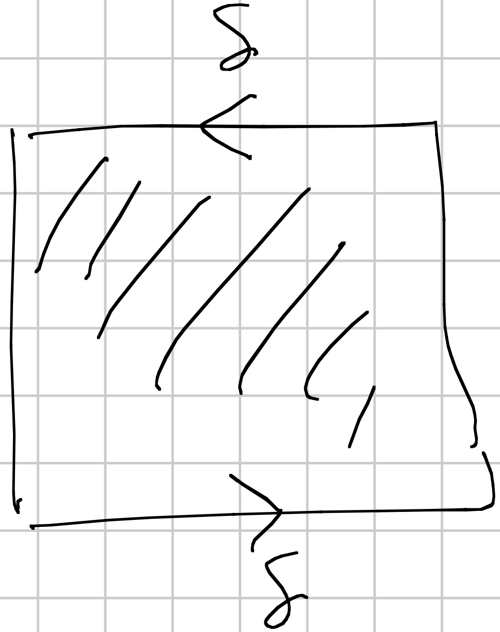



=
γ
α
2
β
γ
α
1
β
=
β
2
α
γ
γ
α
1
β

=



=



=

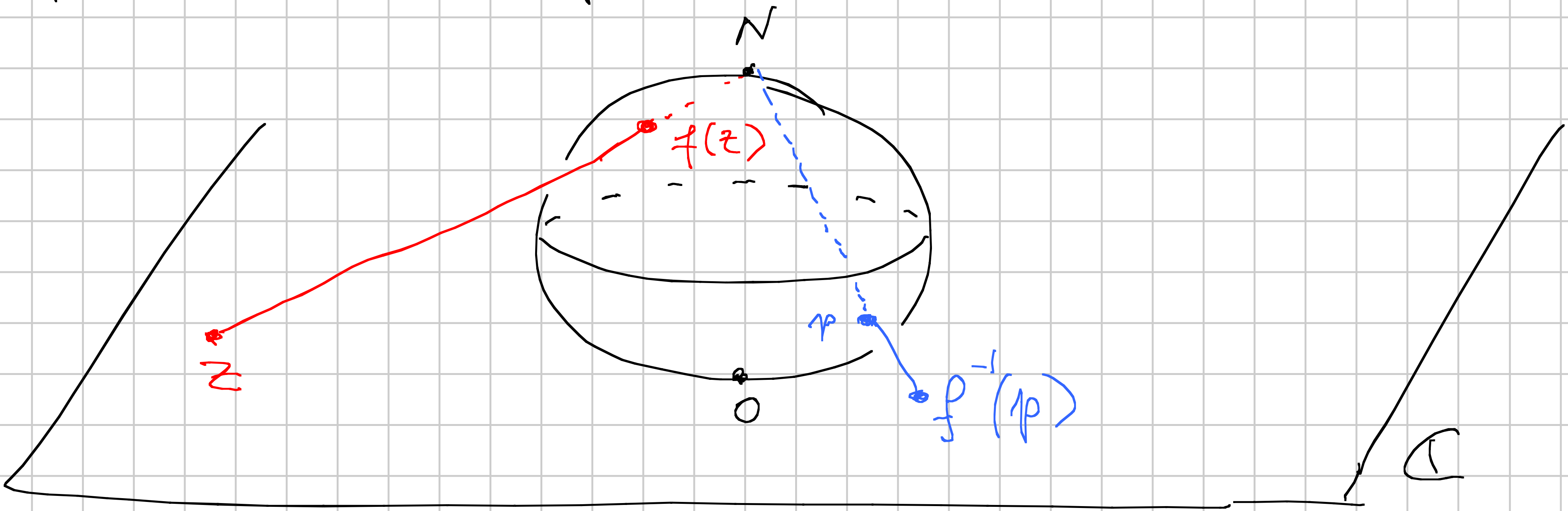
Möbius

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \cup \underset{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{P}^0(\mathbb{R})}}{\{\infty\}}$$

$$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \underset{\substack{\shortparallel \\ \mathbb{P}^0(\mathbb{C})}}{\{\infty\}} \;\text{“}=\text{”}\; S^2$$

Corrispondenza tra S^2 e $\mathbb{C} \cup \{\infty\}$:

proiezione stereografica:



$f : \mathbb{C} \longrightarrow S^2 \setminus \{N\}$ bijettiva

Per $|z| >> 0$ ho $f(z) \longrightarrow N$

dunque f crea una corrispondenza tra

$\mathbb{P}^1(\mathbb{C}) = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e S^2

$$\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \left(\mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}\right) \Big/ {\scriptstyle x \sim y \text{ se } y = kx} = \text{l'insieme delle rette in } \mathbb{R}^{n+1}$$

Def: chiamo sottospazio proiettivo di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ la proiezione di $W \setminus \{0\}$ con $W \subset \mathbb{R}^{n+1}$ sttosp. vett., cioè l'insieme delle rette contenute in W.

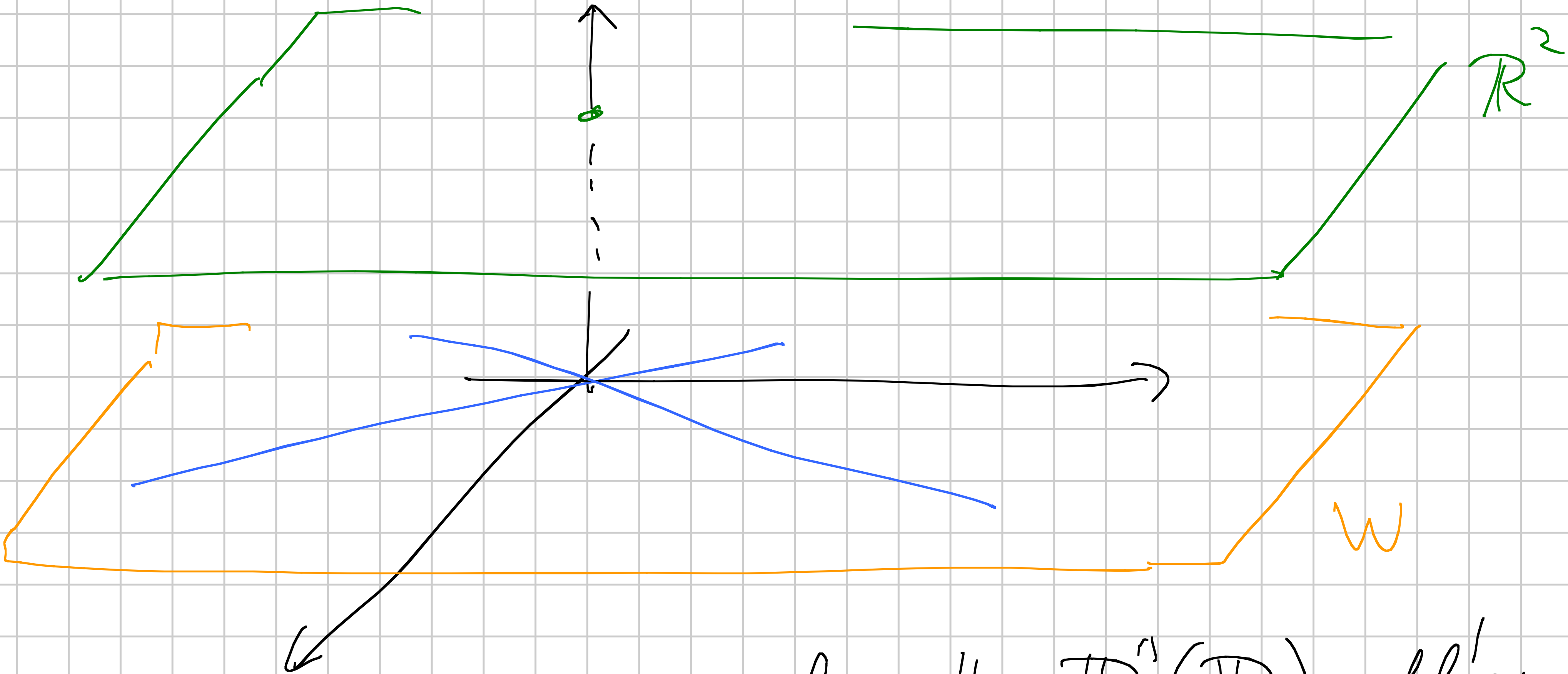
$(W \neq \{0\})$.

Es: In $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ i sottosp. proiettivi sono:

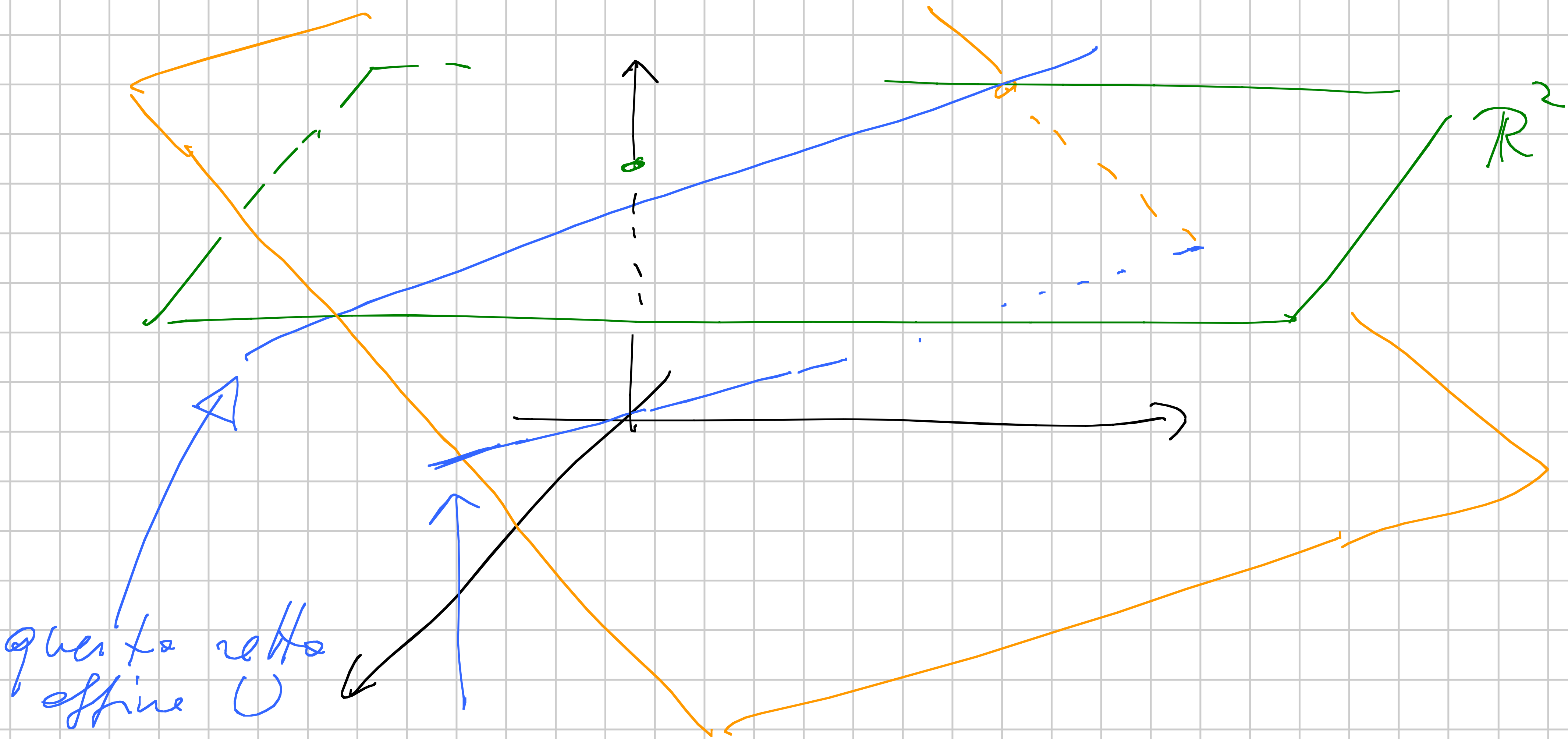
dim $= 0$ i punti

dim $= 2$ tutto $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

dim $= 1$, considerando $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^2 \cup \underbrace{\mathbb{P}^1(\mathbb{R})}_{\text{pti a } \infty}$



$\longrightarrow$ la retta $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ all'∞



$\mathbb{R}^2$
questa retta affine U

il suo
pto all'∞

Prop: due rette proiettive distinte in $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ si incontrano sempre in esattamente un pto.

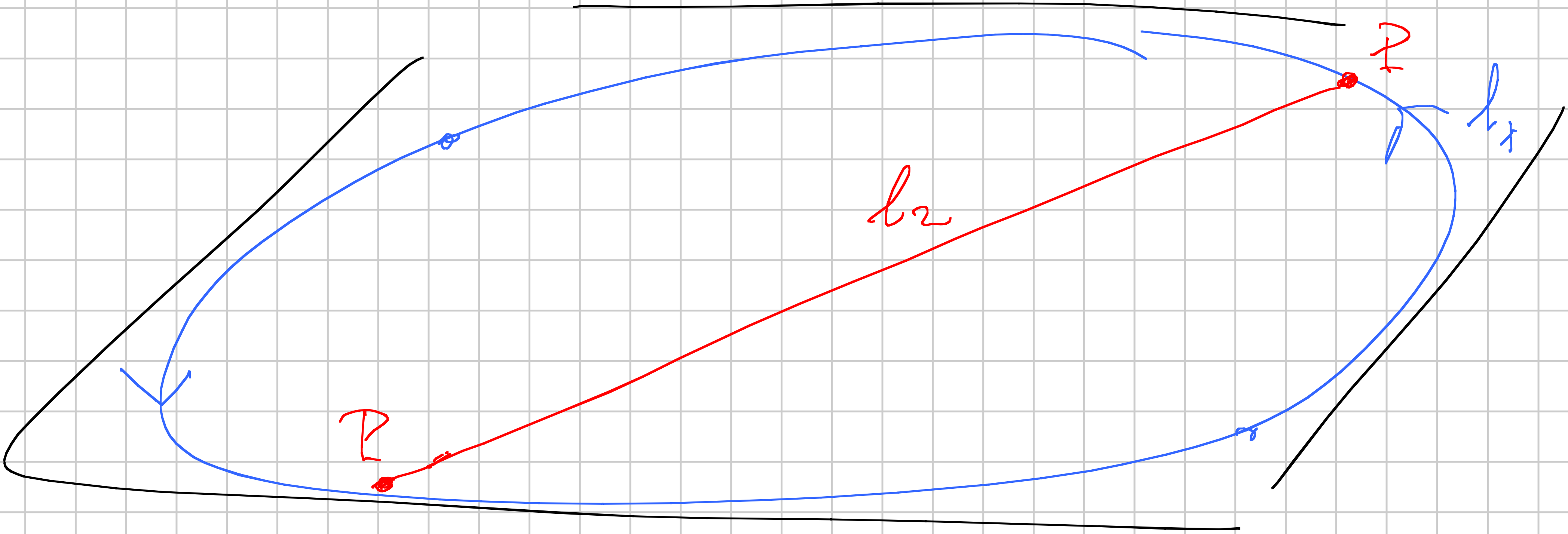
Dim: l_1 proiez. di W_1 ; $W_1 \subset \mathbb{R}^3$, $\dim W_1 = 2$
l_2 proiez. di W_2 ; $W_2 \subset \mathbb{R}^3$, $\dim W_2 = 2$

$\ell_1 \neq \ell_2 \Rightarrow W_1 \neq W_2 \Rightarrow W_1 \cap W_2 = Z$

$\dim Z = 1 \Rightarrow \ell_1 \cap \ell_2$ è il punto $[Z]$. $\blacksquare$

Per $\ell_1, \ell_2 \subset \mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ci sono quattro casi:

- se ℓ_1 è la retta all'∞
  il pto $\ell_1 \cap \ell_2$ è il pto all'∞ di ℓ_2



P = pto a ∞ di ℓ_2

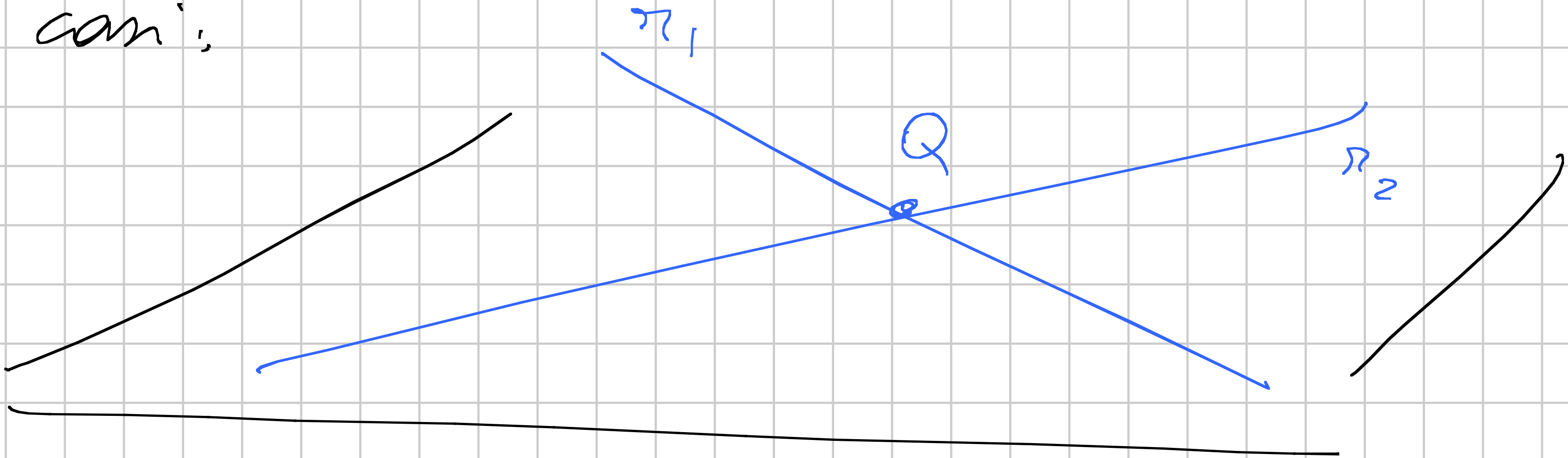
- Se nessuna delle due è la retta all'∞

ho $\ell_1 = r_1 \cup P_1$ $\qquad$ r_1 retta affine in $\mathbb{R}^2$

P_1 il suo p.to all'∞

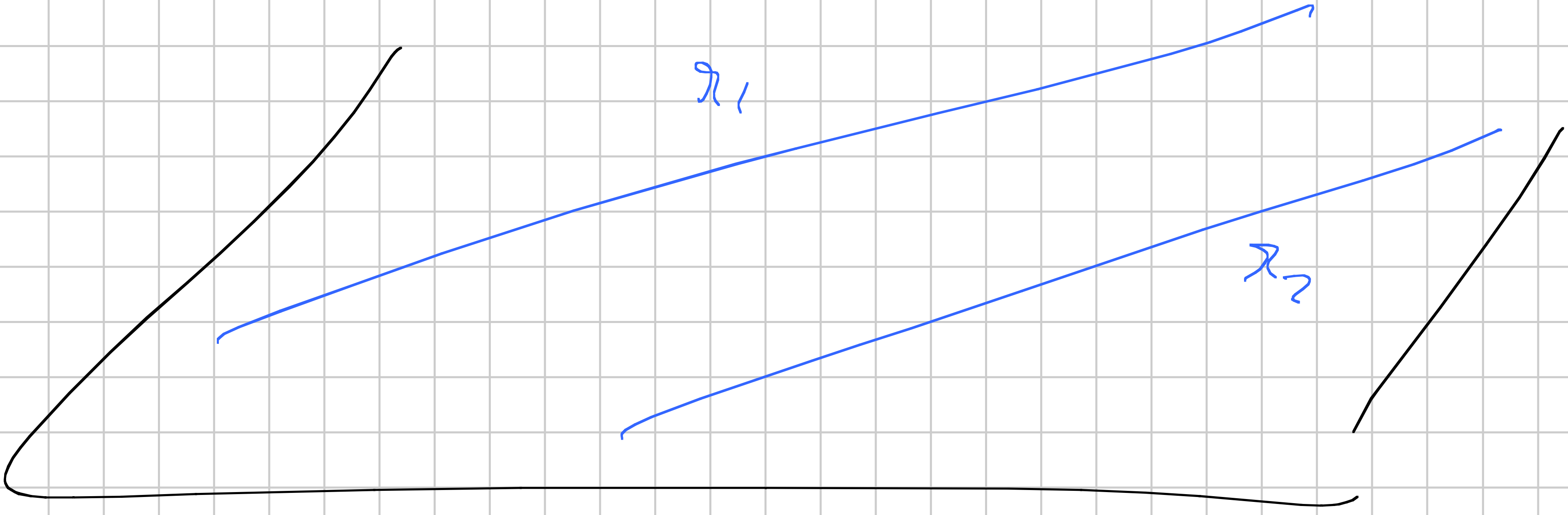
$\ell_2 = r_2 \cup P_2$ $\qquad$ ...

due casi:

1) 

$\pi_1 \cap \pi_2 = \{Q\}$ $\qquad$ $P_1 \neq P_2$

2)



$\pi_1 \parallel \pi_2 \qquad (\pi_1 \cap \pi_2 = \emptyset)$

$\pi_1 \cap \pi_2 = \pi_1 = \pi_2$

"due rette parallele si incontrano all'∞"

— o —

Se $x \in \mathbb{R}^{n+1} \setminus \{0\}$ indico con $[x]$ la sua classe di equiv. in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ e scrivo $[\underbrace{x_1 : x_2 : x_3 : \ldots : x_{n+1}}_{\text{coordinate omogenee}}]$

" : " perché non contano le singole x_j bensì i rapporti x_j/x_k.

Es: $\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) \ni [-8:4:10] = [12:-6:-15]$

poiché $\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix} = -\frac{3}{2} \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

dunque $\begin{pmatrix} 12 \\ -6 \\ -15 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -8 \\ 4 \\ 10 \end{pmatrix}$

dunque rappresentano lo stesso punto di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$

Def: un polinomio nelle variabili $x_1, \dots, x_{n+1}$ si dice omogeneo di grado d se contiene solo monomi di grado d:

$$7xy^2z^5 - \sqrt{3}\,x^4yz^3 + \pi x^2y^3z^3$$

omogeneo di grado 8

<u>Fatto</u>: se $p(x)$ è omogeneo di grado d

allora $p(\lambda \cdot x) = \lambda^d \cdot p(x)$.

Conseguenza: dato $p(x)$ omogeneo di grado d e $y = \lambda \cdot x$ con $x, y \neq 0$, $\lambda \neq 0$

$$p(x) = 0 \iff p(y) = 0$$

dunque possiamo definire il luogo

$$\{ [x] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : p(x) = 0 \}.$$

Es: (1) Ha senso

$$\left\{[x,y,z]\in\mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : \underbrace{7x^2y-2xyz+\pi yz^2}_{\text{omog. di grado 3}}=0\right\}$$

(2) Non ha senso

$$\mathcal{L}=\left\{[x,y]\in\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) : y=x^2\right\}$$

$[1:1] \overset{?}{\in} \mathcal{L}$ $\quad 1 = 1^2$ Sì

però $[1:1] = [2:2]$ ma $2 \neq 2^2 \ldots$

Def: chiamiamo quadrica proiettiva un insieme in $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ definito da equaz. pol. omogenea di grado 2.

Fatto: ogni tale equazione si scrive come

$$ {}^t x \cdot A \cdot x = 0 $$

$A \in M_{(n+1)\times(n+1)}(\mathbb{R})$ simmetrica

Cambi di coordinate proiettivi :

trasformazioni su $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ indotte da trasf. lineari invertibili di $\mathbb{R}^{n+1}$, cioè

$$[x'] = [M \cdot x]$$

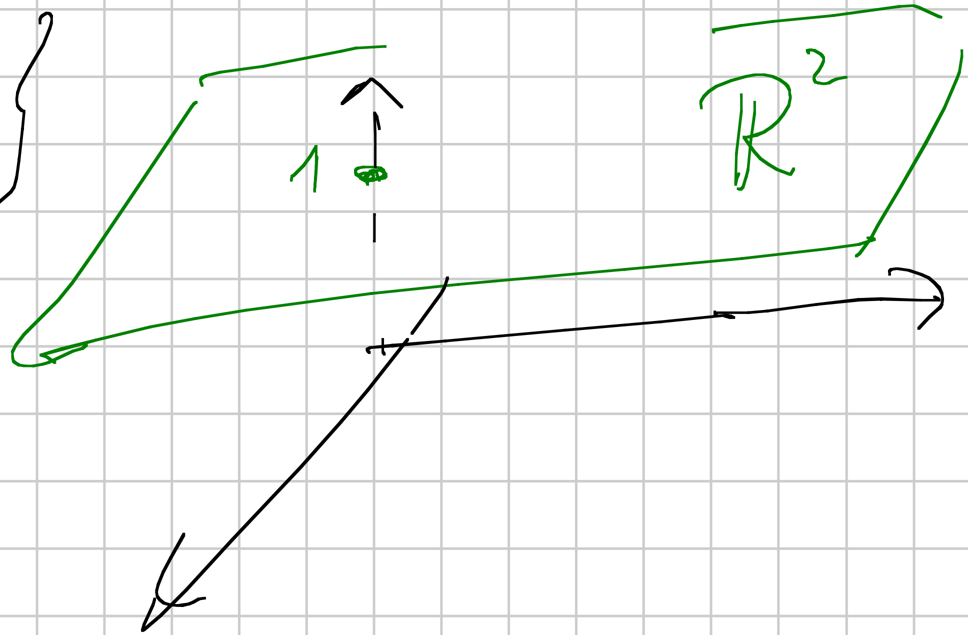
$$M \in \mathcal{M}_{(n+1)\times(n+1)} , \det(M) \neq 0$$

Visto: $\mathbb{R}^n$ (stsp. affine) si identifica al sottospazio di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ dato da

$$\left\{ \left[\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R}^n \right\}$$

Invece

$$\left\{ \left[\begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : x \in \mathbb{R}^n \right\}$$



è il $\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})$, parte all'$\infty$ di $\mathbb{R}^n$.

Q: quali sono le trasf. proiettive che mandano punti all'∞ in pti all'∞?

$$M = \begin{pmatrix} N & v \\ {}^t w & c \end{pmatrix} \qquad \begin{array}{l} N \in M_{n\times n} \\ v, w \in \mathbb{R}^n \\ c \in \mathbb{R} \end{array}$$

Voglio: $\quad M \cdot \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

$$\begin{pmatrix} N & v \\ {}^t w & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Nx \\ {}^t w \cdot x \end{pmatrix}$$

dunque voglio che $\ {}^t w \cdot x = 0 \quad \forall x \in \mathbb{R}^n$

da cui $w = 0$. Dunque

$$M = \begin{pmatrix} N & v \\ 0 & c \end{pmatrix}$$

con $\det(M) = \det(N) \cdot c \neq 0$, perciò $\det(N) \neq 0$ e $c \neq 0$. Noto che

$$M' = \frac{1}{c} \begin{pmatrix} N & v \\ 0 & c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{c}N & \frac{1}{c}v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

e M' definisce la stessa trasformazione di $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ che M.

$$[M' \cdot y] = \left[\frac{1}{c} \cdot M \cdot y\right] = [M \cdot y] \quad \forall y \in \mathbb{R}^{n+1}$$

quindi suppongo $c = 1$, ovvero

$$M = \begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Azione sulla parte affine $\mathbb{R}^n \times \{1\}$:

$$\begin{pmatrix} N & v \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} Nx + v \\ 1 \end{pmatrix}$$

dunque $\quad x \longmapsto Nx + v$

$N \in M_{n \times n}$, $\det N \neq 0$, $v \in \mathbb{R}^n$

Abbiamo provato:

Prop: le trasf. proiettive che lasciano la parte all'infinito in sé stessa sono precisamente le trasf. affini della parte affine.

Def: in $\mathbb{R}^n$ chiamo quadrica affine un luogo definito da una equazione polinomiale di II grado, che si scrive come

$$^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$A = \begin{pmatrix} Q & l \\ {}^t l & c \end{pmatrix} \in M_{(n+1)\times(n+1)} \text{ simm.}$$

Q = matrice della parte quadratica

$2l$ = la parte lineare

c = termine noto

Def: se $\mathcal{C} = \{ x \in \mathbb{R}^n : {}^t\begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} \cdot A \cdot \begin{pmatrix} x \\ 1 \end{pmatrix} = 0 \}$ è quadrica affine chiamo

$$\hat{\mathcal{C}} = \{ [y] \in \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) : {}^t y \cdot A \cdot y = 0 \}$$

$$\mathcal{C}_\infty = \{ [x] \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) : {}^t x \cdot Q \cdot x = 0 \}$$

$\hat{\mathcal{C}}$ = completamento proiettivo di $\mathcal{C}$

$\mathcal{C}_\infty$ = parte all'∞ di $\mathcal{C}$

Es: $\mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : 7x^2 - 5xy + 6y^2 - 11x + 8y + 1 = 0 \right\}$

$$ {}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5/2 & -11/2 \\ -5/2 & 6 & 4 \\ -11/2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ 1 \end{pmatrix} $$

$$ \hat{\mathcal{C}} = \left\{ \left[\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \right] \in \mathbb{P}^2(\mathbb{R}) : 7x^2 - 5xy + 6y^2 - 11xz + 8yz + z^2 = 0 \right\} $$

$$
{}^t\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5/2 & -11/2 \\ -5/2 & 6 & 4 \\ -11/2 & 4 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}
$$

$$
\mathcal{C}_\infty = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \in \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \ : \ 7x^2 - 5xy + 6y^2 = 0 \right\}
$$

$$
{}^t\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -5/2 \\ -5/2 & 6 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}
$$