

Geometria 26/5/2017

ESERCIZIO (libro avanzato)

25 2. $\alpha: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ $\alpha(t) = (\sin(\pi t), 2t^2 - 1)$

A) α è liscia (cioè, tutte e due le componenti sono derivabili con derivate continue, $\neq 0$ in ogni punto)

segno della curvatura per $t = \frac{3}{2}$

calc. " per $t = \frac{1}{2}$

$$K(t) = \frac{\det(\alpha'(t), \alpha''(t))}{\|\alpha'(t)\|^3}$$

$$\alpha'(t) = (\pi \cos(\pi t), 4t)$$

$$\alpha''(t) = (-\pi^2 \sin(\pi t), 4)$$

$$t = \frac{3}{2}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 6 \\ \pi^2 & 4 \end{pmatrix} < 0$$

$$K(t) < 0$$

$$t = \frac{1}{2}$$

$$\det \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ -\pi^2 & 4 \end{pmatrix} = 2\pi^2$$

$$\|\alpha'(\frac{1}{2})\| = 2$$

$$K(\frac{1}{2}) = \frac{\pi^2}{4}$$

B) β ist rektifiziert α auf $[0, \frac{1}{2}]$

$$\int_{\beta} e^{xy} (y dx + x dy) =$$

$$= \int_0^{\frac{1}{2}} e^{\sin(\pi t)(2t^2-1)} \left((2t^2-1)\pi \cos(\pi t) + \sin(\pi t) 4t \right) dt$$

$$= \int_0^{1/2} e^{\sin(\pi t)(2t^2-1)} \left(2t^2 \pi \cos(\pi t) + 4t \sin(\pi t) + \pi \cos(\pi t) \right) dt = \dots = \frac{1}{\sqrt{e}} - 1$$

c) Describere intervalli I t.c. $\alpha|_I$ è chiusa
 e dire $\exists I_0$ t.c. $\alpha|_{I_0}$ è semplice.

$I = [a, b]$ $\alpha|_I$ è chiusa se $\alpha(a) = \alpha(b)$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \sin(\alpha a) = \sin(\alpha b) \\ 2a^2 - 1 = 2b^2 - 1 \end{cases} \Rightarrow a^2 = b^2$$

cioè $a = \pm b$

Venno bene solo intervalli della forma $I = [-a, a]$

$$\sin(\pi a) = \sin(-\pi a) \quad \text{cioè} \quad \sin(\pi a) = 0$$

$$\text{cioè} \quad a = k, \quad k \in \mathbb{Z}$$

Quindi gli intervalli possibili sono $I = [-k, k]$

Se considero $k > 1$ $\alpha|_I$ non è simple, $k \in \mathbb{Z} > 0$

Se $k = 1$ $\alpha|_{[-1, 1]}$ è simple

$$I_0 = [-1, 1]$$

d) $\gamma = \alpha|_{I_0}$

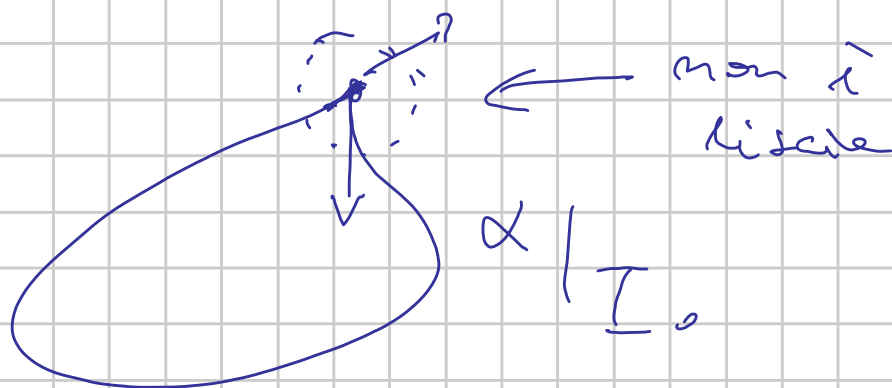
supp. γ ha tangente ovunque?

fuori dagli estremi di $\alpha|_{\mathbb{I}_0}$ OK

? $\alpha'(-1) = \alpha'(1)$

?
$$\begin{pmatrix} \pi \cos(\pi) \\ -\pi \end{pmatrix}, \quad \zeta(-1) \neq \begin{pmatrix} \pi \cos(\pi) \\ -\pi \end{pmatrix}, \quad \zeta(1)$$

supp di γ non ha tangente in $\alpha(1)$ —

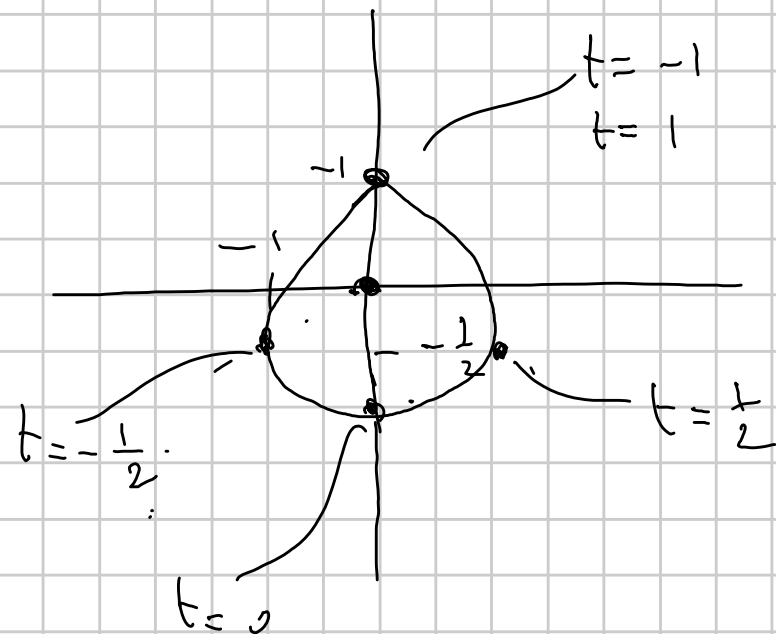


$$\int \frac{x dy - y dx}{x^2 + y^2}$$

||

$d\vartheta$

$$\int d\vartheta = 2\pi$$



1 überlagern des Kreises
in $(0,0)$

28

1. $K \in \mathbb{C}$ $A_K = \begin{pmatrix} 2+K & 1+K-2i \\ i(1-K) & i-2 \end{pmatrix}$

i) pour $K=i$ $\exists! c \in \mathbb{R} \quad c > 0 \quad A_c$.

$c \cdot A_K$ est unitaire -

$$A_i = \begin{pmatrix} 2+i & 1-i \\ 1+i & i-2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & -\bar{a} \end{pmatrix}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 2+i \\ 1+i \end{pmatrix} \right\| = \sqrt{8} = 2\sqrt{2}$$

$$\left\| \begin{pmatrix} 1-i \\ i-2 \end{pmatrix} \right\| = 2\sqrt{2}$$

$$\left\langle \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} b \\ -\bar{a} \end{pmatrix} \right\rangle = 0$$

$\Rightarrow$ se moltiplico A_i per $\frac{1}{2\sqrt{2}}$

otengo che colonne sono due ortogonali -
e questo è l'unico valore (reale > 0)
che mi dà una base unitaria.

B) Autovalori di A_i

$$p_{A_i}(\lambda) = \lambda^2 - 2i\lambda + (-5-2) = \lambda^2 - 2i\lambda - 7$$

$$\lambda_{1,2} = i \pm \sqrt{-1 \pm 7} = i \pm \sqrt{6}$$

c) Mostrare che esiste valori K t.c. A_K

ha un solo autovettore (di molt. alg. 2)
(non è chiesto di trovare K e....)

$$p(\lambda) = \lambda^2 - \lambda(K+i) + (\underbrace{iK^2 + (\dots)K}_{\text{questa è la parte che mi interessa}} + \text{cost})$$

questa è la parte
che mi interessa

Calcolo Δ e $p(\lambda)$

$$\begin{aligned}\Delta &= (K+i)^2 - 4(\underline{iK^2} + (\dots)K + \cos t) = \\ &= K^2 + 2Ki - 1 - 4iK^2 - 4(\dots)K - 4\cos t \\ &= (1-4i)K^2 + (\dots)K + \cos t\end{aligned}$$

$\neq 0$ $\underbrace{\hspace{10em}}$ è polinomio di grado 2

$\Rightarrow \exists$ dei valori di K per cui $\Delta = 0$

$\Rightarrow \exists$ dei valori di x per cui

$p(\lambda)$ ha una radice doppia
(ovvero matrice autoadjoina con
 $m. e. = 2$)

D) Mostrare che l'unico K A.c. $\frac{A_K}{A_K}$
ha base ortonormale di autovet. $\bar{e}$ $K = i$

$\Updownarrow$
 A_K è NORMALE

cioè

$$A_K \cdot A_K^* = A_K^* \cdot A_K$$

↙ 4 eq. (essenzialmente
2 eq.)

$$A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$A^* A = A A^*$$

$$A^* = \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix}$$

$$A A^* = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix}$$

$$\text{I}^e \quad |a|^2 + |b|^2 = |a|^2 + |c|^2 \Rightarrow |b|^2 = |c|^2$$

$$\text{II} \quad c\bar{a} + d\bar{b} = \bar{b}a + \bar{d}c \Rightarrow c(\bar{a} - \bar{d}) = \bar{b}(a - d)$$

$$\text{e. substituendo } K = i \quad \underline{\quad}$$