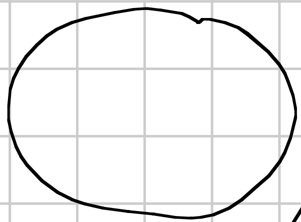
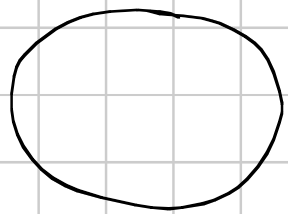
Geometria 26/4/17

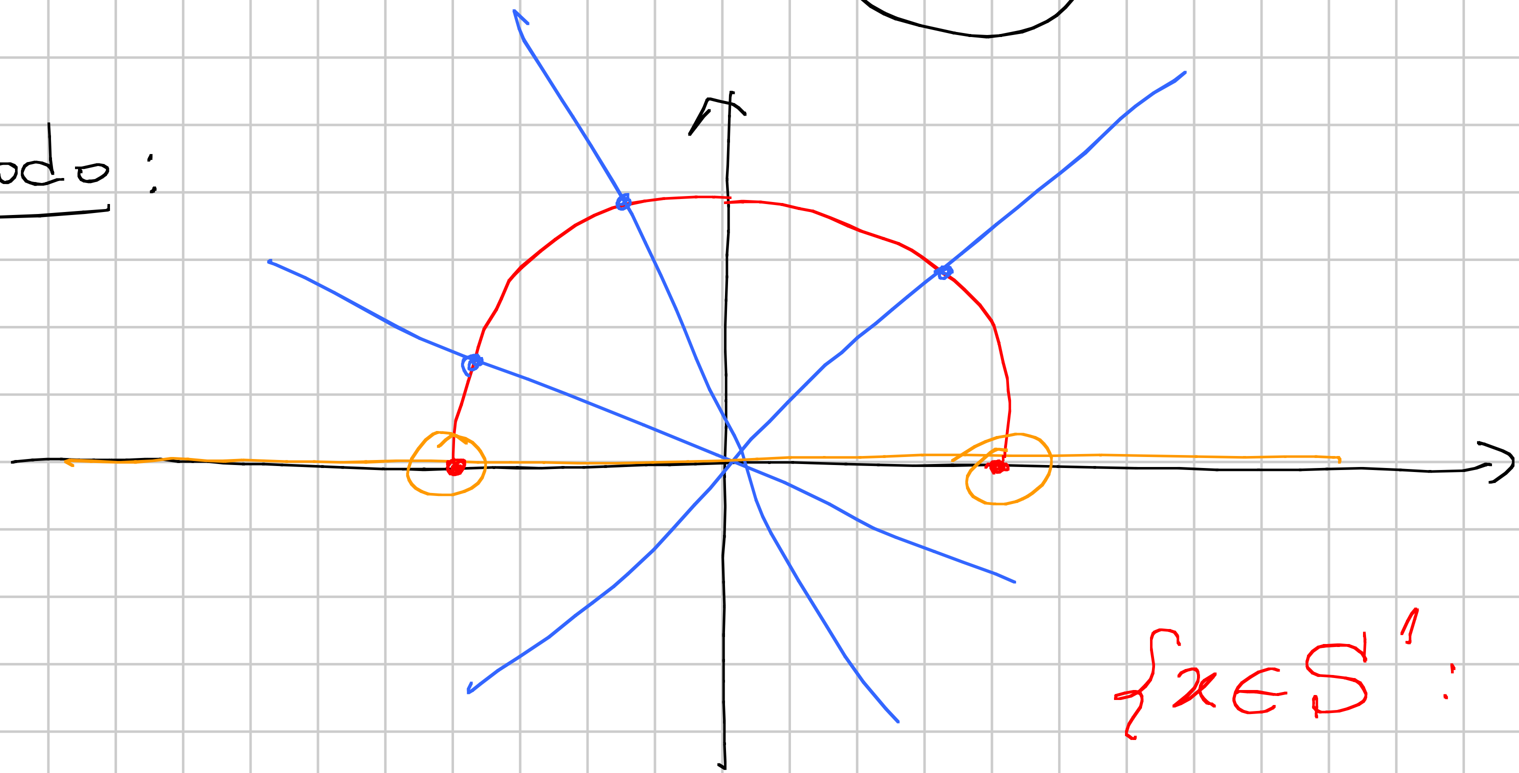
$$\mathbb{P}^n(\mathbb{K}) = \left(\mathbb{K}^{n+1} \setminus \{0\}\right) \Big/ {\scriptstyle x \sim y \text{ se } y = k \cdot x}$$

$= $ l'insieme delle rette in $\mathbb{K}^{n+1}$

Visto: $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) =$  $\Big/$ identificare pti antipodali

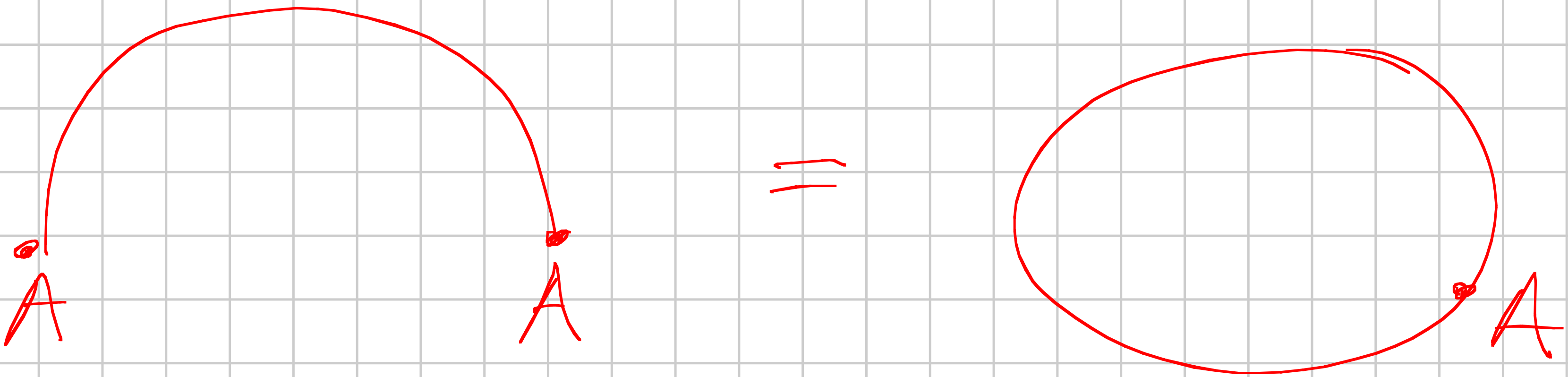
$=$ 

II modo:

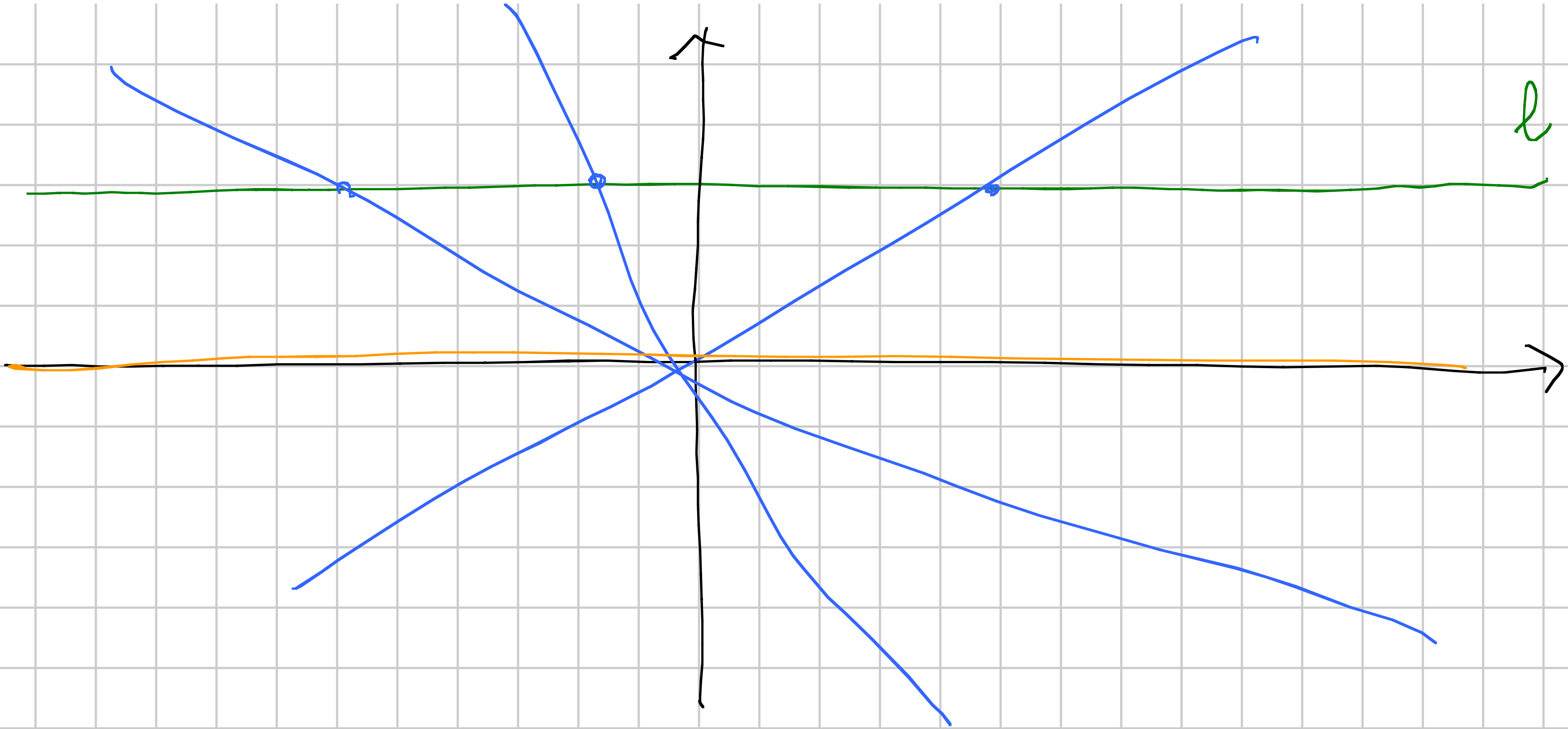


$$\{x \in S^1 : x_2 \geq 0\}$$

La semicirconf. è un insieme di rappresentanti sovrabbondante: tutte le classi tranne una sono rappresentate esattamente da un punto; una classe è rappresentata da due pti, gli estremi. Dunque $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si ottiene dalla semicirconf. identificandone gli estremi:



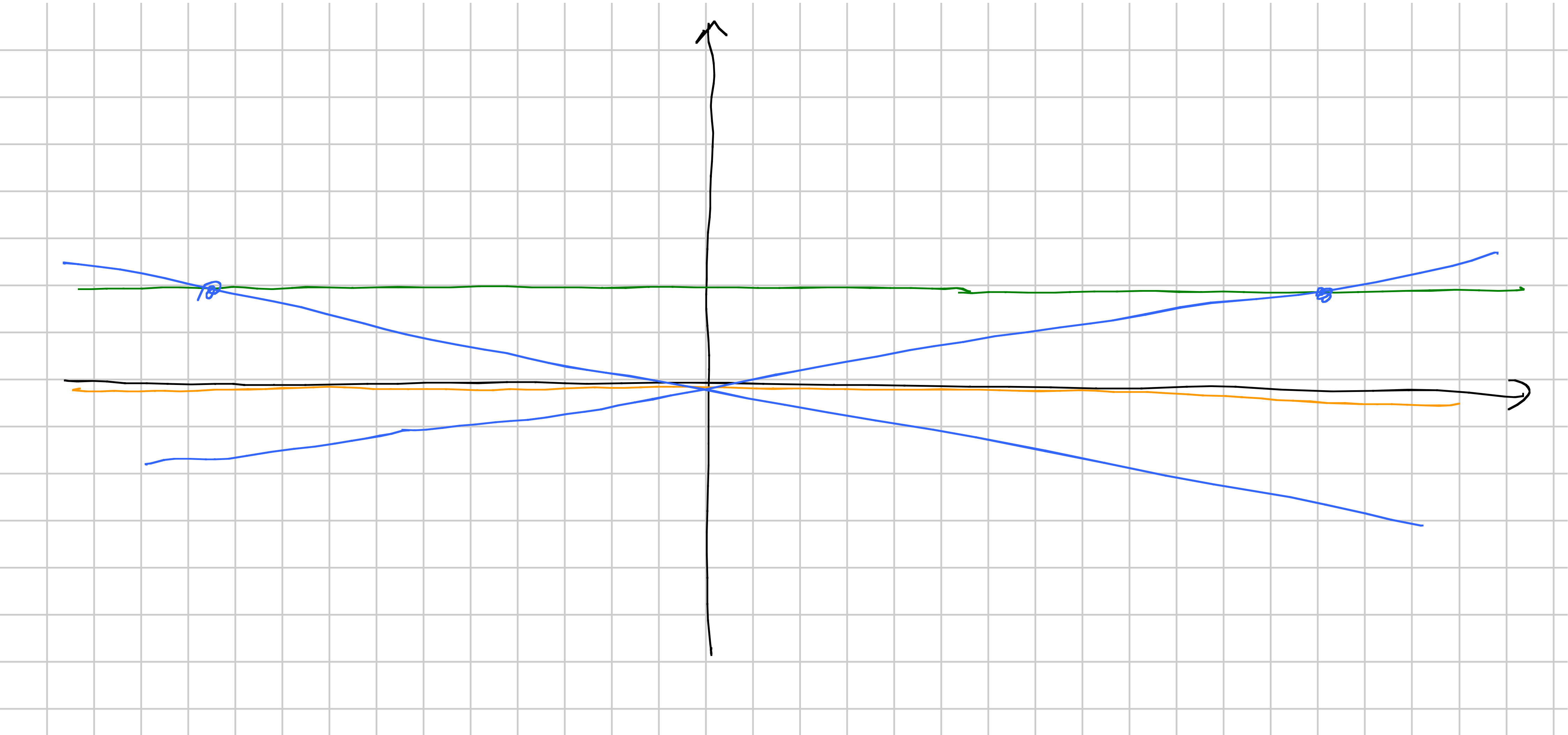
<u>III modo</u> : $\ell = \{x \in \mathbb{R}^2 : x_2 = 1\}$



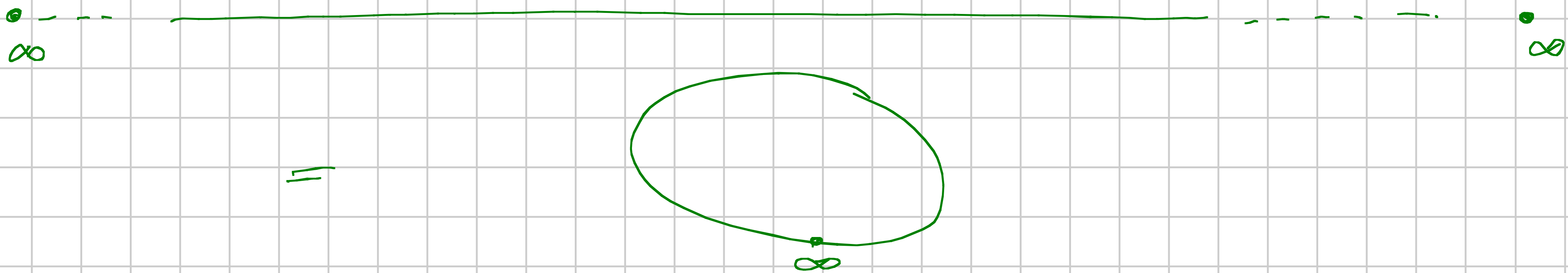
$\Rightarrow$ l rappresenta una sola volta tutte le classi di equivalenza tranne una.

$\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \setminus$ un pto $\longleftrightarrow \mathbb{R}$

cioè $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) \longleftrightarrow \mathbb{R} \cup$ (un pto)



il pto mancante viene raggiunto dai pti su l che tendono all'infinito in una delle due direzioni $\Longrightarrow$ $\mathbb{P}^1(\mathbb{R}) = l \cup \{\infty\}$



Le tre descrizioni di $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si estendono a $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$:

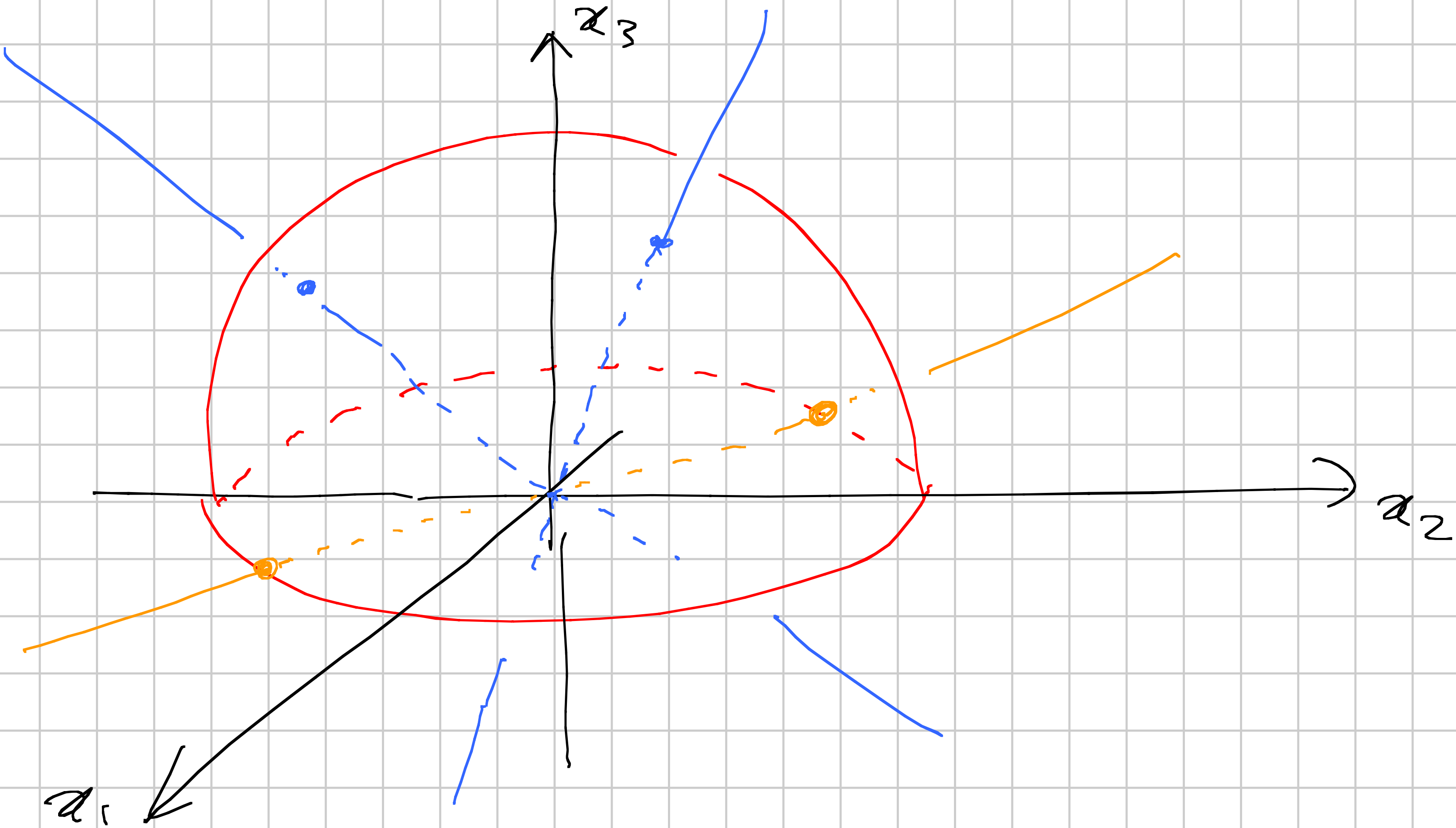
1) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = S^n \big/ x \sim -x$

$$S^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} : \|x\| = 1\}$$

2) $\mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = D^n_+ \,/\, x \sim -x$ solo per $x \in S^{n-1}$

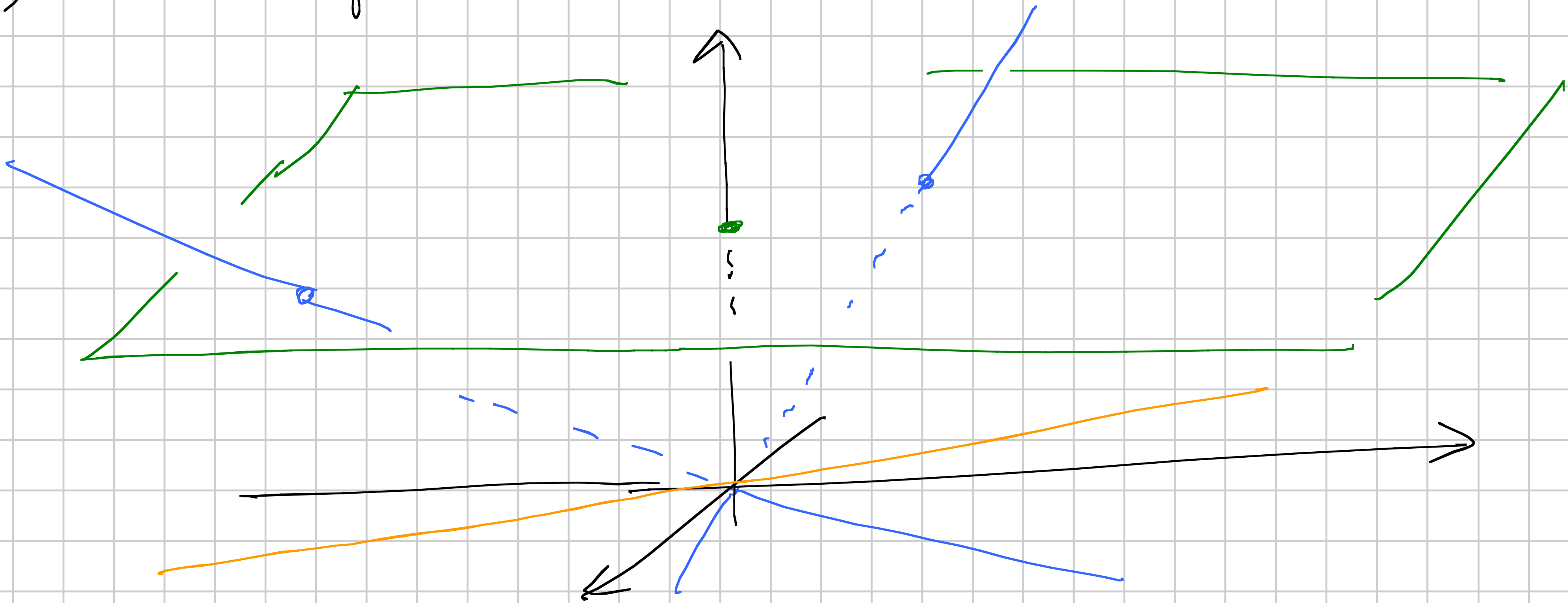
$\{x \in S^n : x_{n+1} \geq 0\}$

$S^{n-1} = \{x \in S^n : x_{n+1} = 0\}$



x_3
x_2
x_1

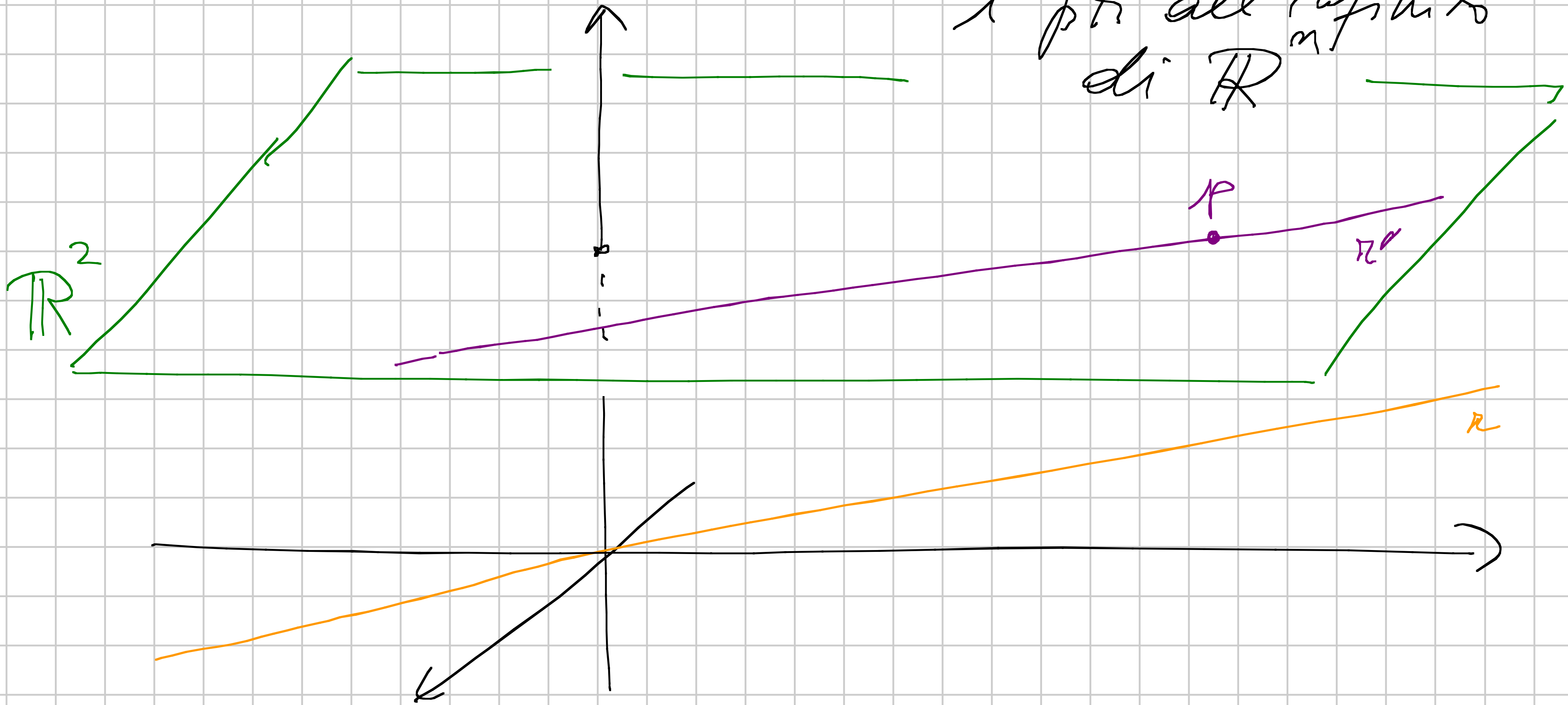
3) Identifico $\mathbb{R}^n \times \{1\}$ con $\mathbb{R}^n$



$$\Rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) \setminus \underbrace{\text{le classi di equiv. delle rette in } \mathbb{R}^n \times \{0\}}_{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})} = \mathbb{R}^n$$

$$\Rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \underbrace{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})}$$

i pti all'infinito di $\mathbb{R}^n$



Se prendo una retta r' ad altezza 1 parallela a quella r ad altezza 0, e p su r', le rette per O e p, quando p tende a una delle estremità di r' tende a r.

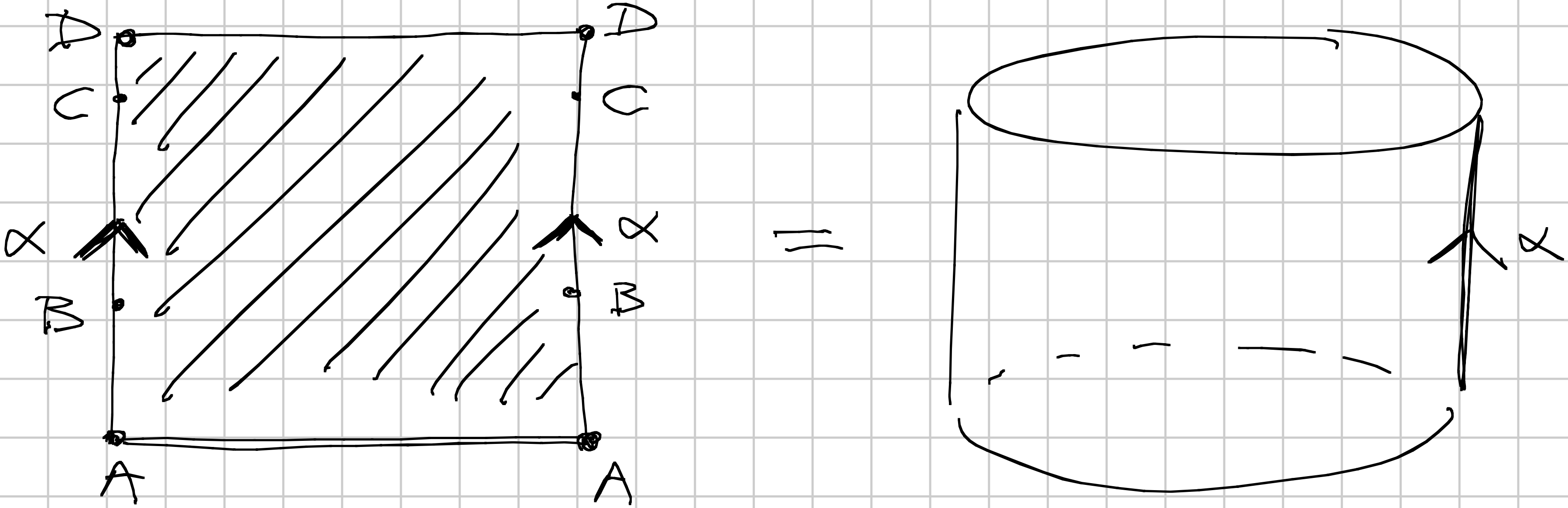
Dunque il pto $r \in \mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R}) \subset \mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ rappresenta la direzione di r'.

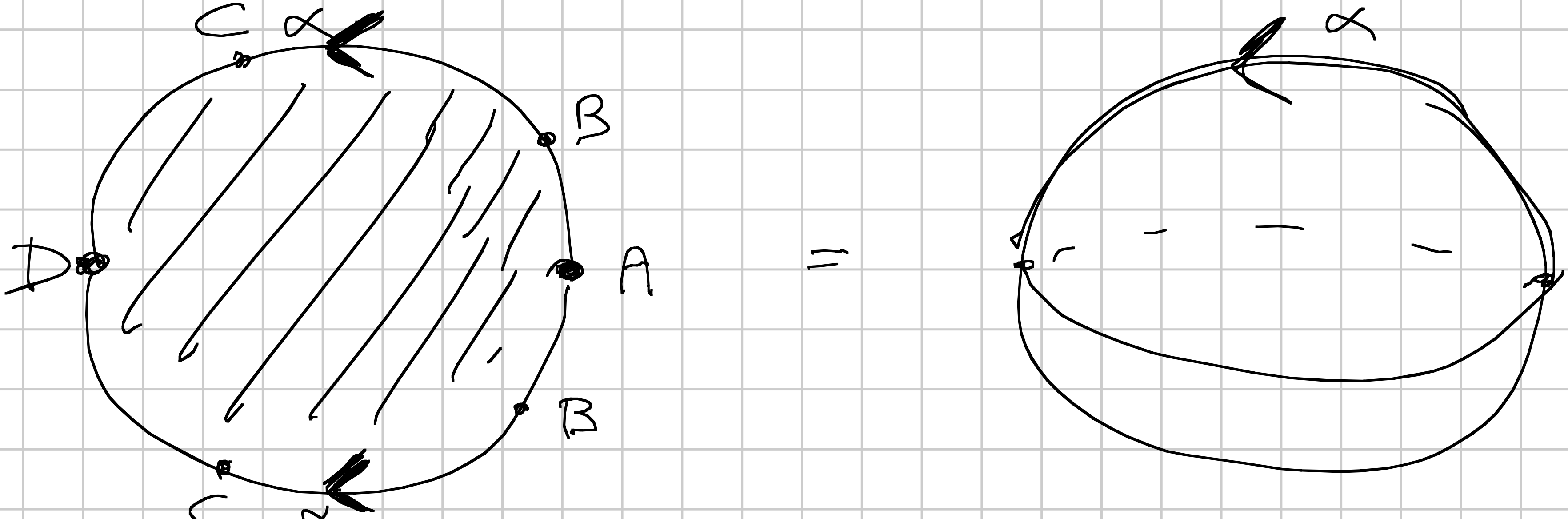
$$\Rightarrow \mathbb{P}^n(\mathbb{R}) = \mathbb{R}^n \cup \underbrace{\mathbb{P}^{n-1}(\mathbb{R})}$$

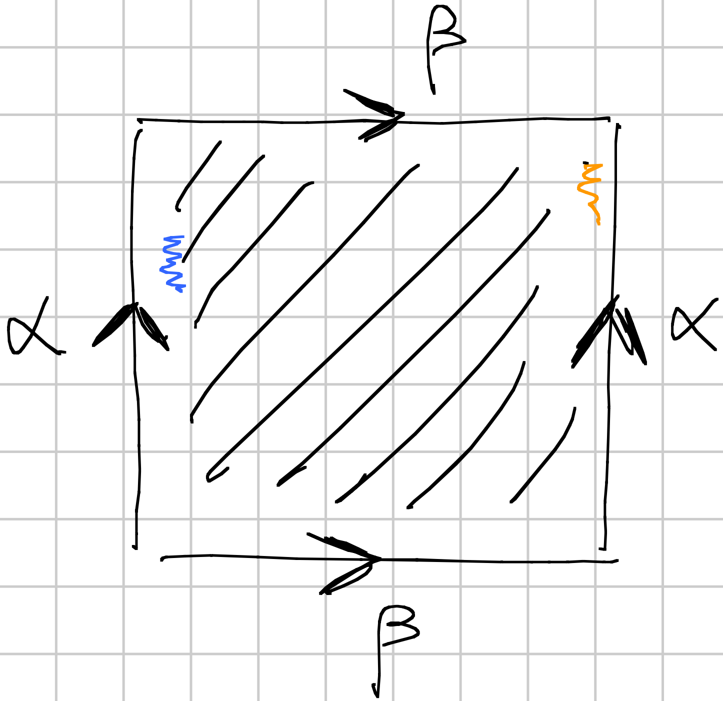
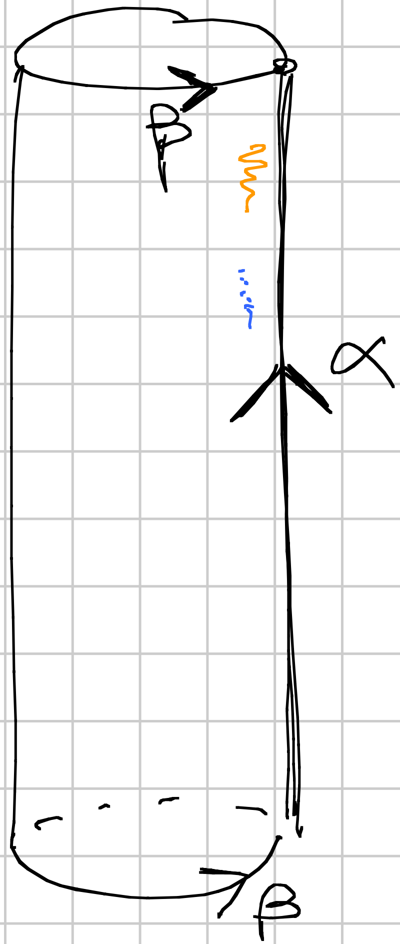
i pti all'∞ di $\mathbb{R}^n$
cioè le direzioni
delle rette affini in $\mathbb{R}^n$.

Descrizione di $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$.

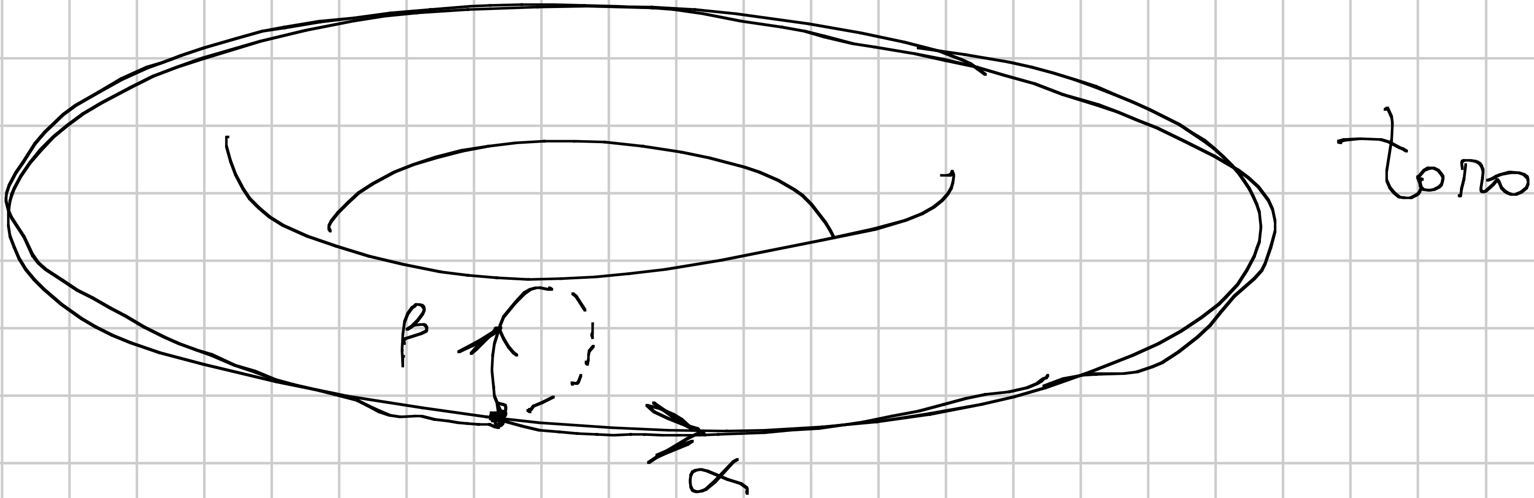
Superfici ottenute incollando lati di poligoni.

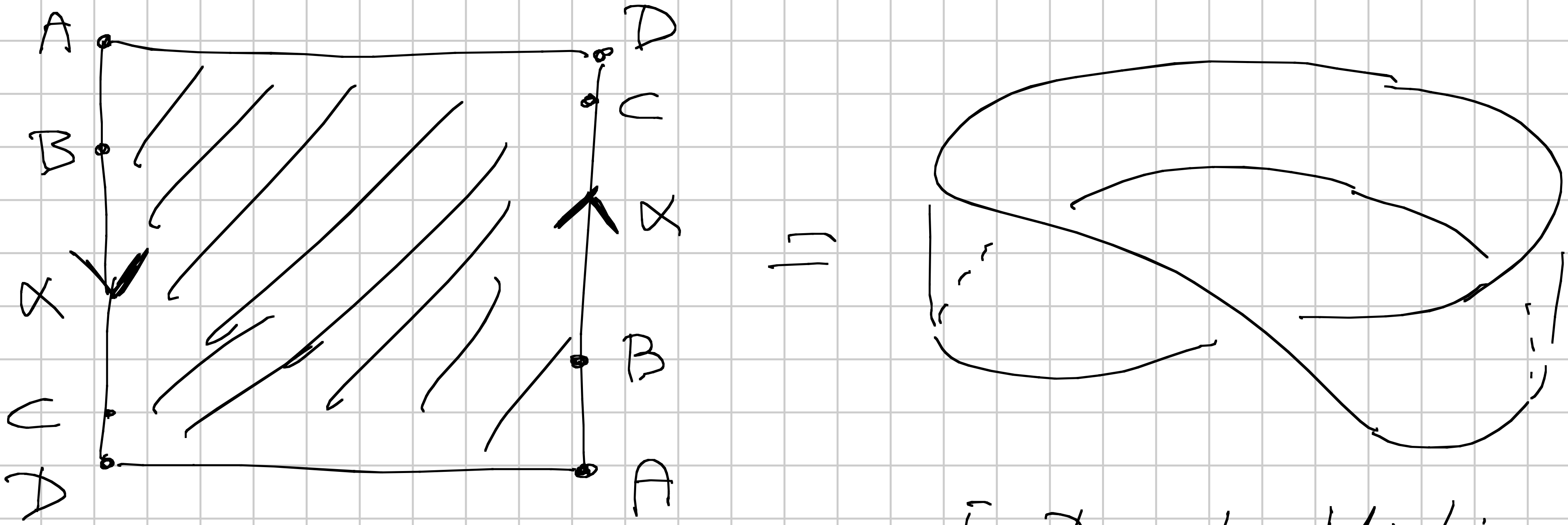



C
α
B
D
A
B
C
α
=
α


β
α
α
β

β
α
β

$\simeq$





Nastro di Möbius

o) Dipingere una faccia del nastro di

Möbius di rosso e l'altra di blu

Esercizio

1) Cosa ottengo se taglio a metà per il lungo un nastro di Möbius?

2) E se lo taglio in tre?

3) Cercare su Google Moebius + Escher _

$\boxed{10.2.7}$ Dire se A è normale; se sì trovare base ortonorm. di autovett.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 3i & 1-i \end{pmatrix}$; normale? $AA^* \overset{?}{=} A^*A$

$$\begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 3i & 1-i \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2-i & -3i \\ 1 & 1+i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-i & -3i \\ 1 & 1-i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2+i & 1 \\ 3i & 1-i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 6 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & \cdot \\ \cdot & \cdot \end{pmatrix} \quad \underline{\text{No}}$$

(b) $A = \begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7+7i & 1-i \\ 1-i & 7+7i \end{pmatrix} \overset{?}{=} \begin{pmatrix} 7+7i & 1-i \\ 1-i & 7+7i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 100 & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix} \stackrel{?}{=} \begin{pmatrix} 100 & \cdots \\ \cdots & \cdots \end{pmatrix}_{S_{\bar{v}}}$$

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-7(1-i) & -(1+i) \\ -(1+i) & t-7(1-i) \end{pmatrix}$$

$$= t^2 - 14(1-i)t - 100i$$

$$\Delta/4 = \left(7(1-i)\right)^2 + 100i = 2i = (1+i)^2$$

$$\lambda_{1,2} = 7(1-i) \pm (1+i) \begin{cases} \nearrow \; 8-6i \\ \searrow \; 6-8i \end{cases}$$

<u>Att</u>: siccome ho già verificato che A è normale gli autovettori v_1, v_2

rispetto a λ_1, λ_2 vengono automaticamente $\perp$ fra loro (dovrò solo normalizzare, non ortonormalizzare).

$$v_1 : A \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda_1 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 7-7i & 1+i \\ 1+i & 7-7i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (8-6i) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} (7-7i)x+(1+i)y=(8-6i)x \\ \left(\quad\rule{4cm}{0.4pt}\quad\right) \end{cases}$$

$$(-1-i)x+(1+i)y = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_2: \quad (7-7i)x+(1+i)y=(6-8i)x$$

$$(1+i)x + (1+i)y = 0$$

$$v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$v_1 \perp v_2$ <u>OK</u>

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

(c) $\begin{pmatrix} a & 0 \end{pmatrix}$

(d) $$\begin{pmatrix} & 1 & 1 \\ -1 & & 1 \end{pmatrix} = \sqrt{2} \cdot \underbrace{\frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} & 1 & 1 \\ -1 & & 1 \end{pmatrix}}_{\text{ortog}}$$

Si, normale.

$$p_A(t) = \det\begin{pmatrix} t-1 & -1 \\ 1 & t-1 \end{pmatrix} = t^2 - 2t + 1 + 1 = t^2 - 2t + 2$$

$$\lambda_{1,2} = 1 \pm \sqrt{1-2} = 1 \pm i$$

$$v_1: \quad \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = (1+i)\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} x + y = (1+i)x \\ -x + y = (1+i)y \end{cases} \qquad \begin{cases} -ix + y = 0 \\ +x + iy = 0 \end{cases} \quad \checkmark$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$$

v_2 : $x + y = (1 - i)\, x$ $\qquad ix + y = 0$

$$v_2 = \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 \perp v_2 : \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2} = 0$$

$$\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}, \quad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix} i \\ 1 \end{pmatrix}$$

(e) $A = \begin{pmatrix} 5+5i & 1+7i \\ -7-i & 5+5i \end{pmatrix}$

$$\begin{pmatrix} 5+5i & 1+7i \\ -7-i & 5+5i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5-5i & -7+i \\ 1-7i & 5-5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & +50+50 \\ \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 5-5i & -7+i \\ 1-7i & 5-5i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 5+5i & 1+7i \\ -7-i & 5+5i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 60 & 50+50 \\ \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$5i$

$v_1, v_2 \dots$

$\boxed{(10.2.8)}$ Provare che A è unitaria:

$$A = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & -i\sqrt{2} & -i \\ -i\sqrt{2} & 0 & \sqrt{2} \\ i & -\sqrt{2} & 1 \end{pmatrix}$$

$$\langle v_1 | v_2 \rangle_{\mathbb{C}^3} = \frac{1}{4}\left(1\cdot(+i\sqrt{2}) + (-i\sqrt{2})\cdot 0 + i\cdot(-\sqrt{2}) \right) = 0$$

$$\langle v_1 | v_3 \rangle = \frac{1}{4}\left(1\cdot i + (-i\sqrt{2})\sqrt{2} + i\cdot 1 \right) = 0$$

$\langle v_2 | v_3 \rangle = \dots 0$

$\|v_1\|^2 = \frac{1}{4}(1+2+1) = 1$ $\|v_2\|^2 = \frac{1}{4}(2+0+2) = 1$

$\|v_3\|^2 = \frac{1}{4}(1+2+1) = 1$

$\boxed{10.2.9}$ Trovare segni degli autoval della matrice hermitiana A in

(a) $A = \begin{pmatrix} -3 & 1+4i \\ 1-4i & -1 \end{pmatrix}$

$d_1 = -3 < 0, \quad d_2 = 3 - (1+16) < 0$

Segni $-, +$

(b) $A = \begin{pmatrix} 2 & i & -1 \\ -i & 0 & 1+i \\ -1 & 1-i & 2 \end{pmatrix}$

$d_1 = 2 > 0 \qquad d_2 = i^2 < 0$

$d_3 = -i(1+i) + i(1-i) - 2 - 2(1+i)(1-i)$

$= \cancel{-i} + 1 \cancel{+i} + 1 - 2 - 4 < 0$

Segui +, −, +.