Geom 24.5.2017

$\boxed{23}$ 1. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 3 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$

(a) Segno di autovalori di A

$d_1 = 1 > 0$

$d_2 = 1 > 0$

$d_3 = -8 < 0$

$d_4 = -25 < 0$

3 autov. > 0, 1 autov < 0

(b) forma bil. nel sottosp. $x_j = 0$ $j = 1, 2, 3, 4$
quando è pos. scalare? cioè quando la
restriz. è def. pos?

basta guardare i minori 3×3 ottenuti
togliendo riga e colonna j —

$j = 4$ <u>NO</u>: già visto che $d_3 < 0$
$\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ ristretto a $x_1 = 0$ non è
def pos.

$i = 2$ $\quad d_1 = 1 \quad d_2 = 1 \quad d_3 = 2 > 0$

<u>ok</u> è p. d scelere

$i = 3$ $\quad d_1 = 1 > 0 \quad d_2 = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 > 0$

$$d_3 = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 3 > 0$$ <u>ok!</u>

$i = 1$ $\quad \begin{pmatrix} 2 & 3 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \\ 0 & -1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad d_1 = 2 > 0$

$d_2 = -7 < 0$ $\quad \dfrac{\text{NO}}{\text{def. pos}}$

(C) Matrice B ottenuta da A eliminando riga/col 4 -

Base ortonormale di $\mathbb{R}^3$ con autovettori di B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\det(B - \lambda I) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} 1-\lambda & -1 & 0 \\ -1 & 2-\lambda & 3 \\ 0 & 3 & 1-\lambda \end{pmatrix} =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 7) - (1-\lambda) =$$

$$= (1-\lambda)(\lambda^2 - 3\lambda - 8)$$

$$\lambda_1 = 1 \qquad \lambda_{2,3} = \frac{3 \pm \sqrt{41}}{2}$$

$$\lambda_1 \qquad B - \lambda_1 I = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 3 \\ 0 & 3 & 0 \end{pmatrix} \qquad \mathrm{Ker} = \left\langle \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$

$$v_1 = \frac{1}{\sqrt{10}} \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = \frac{3 + \sqrt{41}}{2} \qquad B - \lambda_2 I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2} & 3 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{41}}{2} \end{pmatrix}$$

$$\ker(B - \lambda_2 I) = \begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{41} \\ 6 \end{pmatrix}$$

e rinormalizzo $\quad v_2 = \dfrac{1}{\sqrt{4+36+(1+\sqrt{41})^2}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1+\sqrt{41} \\ 6 \end{pmatrix}$

$$\lambda_3 = \frac{3-\sqrt{41}}{2} \qquad B - \lambda_3 I = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2} & -1 & 0 \\ -1 & \frac{1}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2} & 3 \\ 0 & 3 & -\frac{1}{2}+\frac{\sqrt{41}}{2} \end{pmatrix}$$

$$K_\alpha = \left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{41} \\ 6 \end{pmatrix} \right\rangle \qquad v_3 = \frac{1}{\sqrt{\cdots}} \begin{pmatrix} -2 \\ 1-\sqrt{41} \\ 6 \end{pmatrix}$$

Cerco

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in K_\alpha \qquad \text{I}^a \text{ comp.} \quad -\frac{1}{2}\left(1-\sqrt{41}\right)x_1 - x_2 = 0$$

$$\text{pongo} \quad x_2 = 1+\sqrt{41} \Rightarrow x_1 = -2$$

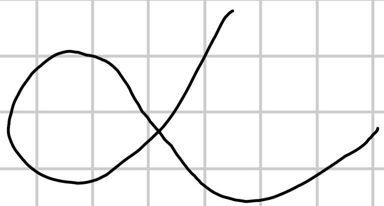
$$\text{III comp.} \quad \hookrightarrow 3x_2 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{41}}{2}\right)x_3 = 0$$

$$x_3 = 6$$

$\boxed{23}$ 2.

$$\alpha : \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3 \qquad \alpha(t) = \left(2t - \cos t,\, t + 2\sin t,\, t^2\right)$$

(A) α è semplice?
cioè: iniettiva?

 ?

$$\alpha'(t) = (2 + \sin t, \; \cdots\cdots)$$
$$\geq$$
$$2 - 1 > 0$$

α è iniettiva quando proietto sulla I^a componente $\Rightarrow$ α è iniettiva.

(B) β = restrizione di α a $[0, \pi]$

calcolare $\int_\beta x\,dy - y\,dx$

$$\alpha'(t) = (2 + \sin t,\ 1 + 2\cos t,\ 2t)$$

$$\int_0^{\pi} \Big[\underbrace{(2t - \cos t)}_{x} \underbrace{(1 + 2\cos t)}_{dy} - \underbrace{(t + 2\sin t)}_{y} \underbrace{(2 + \sin t)}_{dx} \Big] dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \cancel{2t} - 2\cos^2 t + 4t\cos t - \cos t - \cancel{2t} - 2\sin^2 t - 4\sin t + - t\sin t \quad dt =$$

$$= \int_0^{\pi} \left(-2 + t(4\cos t - \sin t) - \cos t - 4\sin t \right) dt =$$

$$= - \ldots = 20 + 6\pi - \pi^2$$

(c) curvatura e torsione per $t = 0$

$$\kappa(t) = \frac{\| \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \|}{\| \alpha'(t) \|^3} \qquad \alpha'(0) = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \mid \alpha'''(t) \rangle}{\| \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \|^2}$$

$$\alpha''(t) = (\cos t, -2 \sin t, 2) \qquad \alpha''(0) = \begin{pmatrix} +1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$\alpha'''(t) = (-\sin t, -2\cos t, 0) \qquad \alpha'''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha'(0) \wedge \alpha''(0) = \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ +1 \end{pmatrix}$$

$$k(0) = \frac{\sqrt{21}}{5\sqrt{5}}$$

$$\tau(0) = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} -2 \\ -4 \\ 1 \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix} \right\rangle}{21} = \frac{8}{21}$$

(D) $u : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ crescente, $u(0) = 0$

$\gamma(s) = \alpha(u(s))$ è in param. d'arco.

calcolare $u''(0)$.

$$\gamma'(0) = \alpha'(u(0))\, u'(0)$$

$$\|\gamma'(0)\| = 1 \implies \boxed{u'(0)} = 1/\|\alpha'(0)\| = \boxed{\frac{1}{\sqrt{5}}}$$

$$\langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle = 1$$

$$\boxed{\frac{d}{ds} \langle \gamma'(s), \gamma'(s) \rangle} = 2 \langle \gamma''(s), \gamma'(s) \rangle \boxed{= 0}$$

$$\gamma''(s) = \frac{d}{ds} \left(\alpha'(u(s))\, u'(s) \right) =$$

$$= \alpha''(u(s))\, u'(s)^2 + \alpha'(u(s))\, u''(s)$$

$$\left\langle \alpha''(0) \frac{1}{5} + \alpha'(0)\, u''(0) \,\middle|\, \alpha'(u(0)) \right\rangle = 0$$

$$\left\langle \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix}\frac{1}{5} + \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\cdot u''(0) \,\middle|\, \begin{pmatrix}2\\-1\\0\end{pmatrix}\right\rangle = 0$$

$$\left(\frac{1}{5} + 2\,u''(0)\right)\cdot 2 + u''(0) = 0$$

$$u''(0) = -\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{5} = -\frac{2}{25}$$

124 1. $A_k = \begin{pmatrix}1 & 1-k\\ k+1 & 2+ik\end{pmatrix} \qquad k \in \mathbb{C}$

(a) per quali k A_k è hermitiana?

ci sono k t.c. A_k non hermit. ma normale?

$$A = A^*$$

$(1,1)$ $\quad 1 = 1$

$(2,2)$ $\quad 2 + ik = \overline{2 + ik} = 2 - i\bar{k}$

$$k = -\bar{k} \implies \boxed{k \in i\mathbb{R}}$$

$$\boxed{k = it \qquad t \in \mathbb{R}}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 - it \\ 1 + it & 2 - t \end{pmatrix}$$ è hermitiana

A_k è hermitiana sse $k \in i\mathbb{R}$

A_k normale e non herm.?

(cioè $A A^* = A^* A$)

$$\begin{pmatrix} 1 & 1-k \\ 1+k & 2+ik \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1+\bar{k} \\ 1-\bar{k} & 2-i\bar{k} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1+\bar{k} \\ 1-\bar{k} & 2-i\bar{k} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1-k \\ 1+k & 2+ik \end{pmatrix}$$

$(1,1)$
$$1 + (1-k)(1-\bar{k}) = 1 + (1+k)(1+\bar{k})$$
$$1 + 1 - k - \bar{k} + |k|^2 = 1 + 1 + k + \bar{k} + |k|^2$$
$$-k - \bar{k} = k + \bar{k} = 0 \implies k \in i\mathbb{R}$$

quindi se A_k è NORMALE $\implies$ A_k è herm.

Risposta: NO (Q: dire se $\exists k$: A_k NORM. e non herm) –

(b) Sia $|k| = 1$, t.c. A_k herm ($k = \pm i$)

e trovare base ortonorm di $\mathbb{C}^2$ fatta di autovet. di A_k

Scelgo $k = i$

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1-i \\ 1+i & 1 \end{pmatrix} \qquad p(t) = \det(A_k - tI) =$$

$$= t^2 - 2t - 1$$

autoval. $t_{1,2} = 1 \pm \sqrt{2}$

$t_1 = 1+\sqrt{2}$ autovett. $\in \ker\left(A_R - (1+\sqrt{2})I\right) = \begin{pmatrix} -\sqrt{2} & 1-i \\ 1+i & -\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\ker = \left\langle \begin{pmatrix} 1-i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle$$ rinormalizzo

$$v_1 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i \\ \sqrt{2} \end{pmatrix}$$

$t_2 = 1-\sqrt{2}$ $\ker\begin{pmatrix} \sqrt{2} & 1-i \\ 1+i & +\sqrt{2} \end{pmatrix}$

$$\mathrm{Ker} = \left\langle \begin{pmatrix} 1-i \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix} \right\rangle \qquad v_2 = \frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1-i \\ -\sqrt{2} \end{pmatrix}$$

(C) Per quali k A_k è def. pos

Segno di autoval.

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1-k \\ 1+k & 2+ik \end{pmatrix} \qquad d_1 = 1 > 0$$

$$k = it \qquad t \in \mathbb{R} \qquad A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1-it \\ 1+it & 2-t \end{pmatrix}$$

$$\det A_k = -t^2 - t + 1 = -(t^2 + t - 1)$$

$$\det A_k = 0 \quad \text{per} \quad t_{1,2} = \frac{-1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

$$\det A_k > 0 \quad \text{per} \quad t \in \left(\frac{-1-\sqrt{5}}{2}, \frac{-1+\sqrt{5}}{2} \right)$$

(d) k : A_k def > 0, $|k| = 1$ ortonormalizzare la base canonica di $\mathbb{C}^2$.

$$\frac{-1-\sqrt{5}}{2} < -1 < \frac{-1+\sqrt{2}}{2} < 1$$

$$k = -i$$

$$A_k = \begin{pmatrix} 1 & 1+i \\ 1-i & 3 \end{pmatrix}$$

ortonormaliamo $\quad e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad e_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

$$f_1 = e_1$$

$$f_2 = \frac{e_2 - \langle e_2, f_1 \rangle f_1}{\| \quad \|_{A_{-i}}} = \begin{pmatrix} -1-i \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\boxed{24}$ 2. $\quad \alpha : \left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} \right] \to \mathbb{R}^3 \quad \alpha(t) = (\cos(t), t^2, \sin(2t))$

α semplice, chiusa, liscia

<u>chiusa</u>: $\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, \frac{\pi^2}{4}, 0\right)$

$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \left(0, \frac{\pi^2}{4}, 0\right)$ <u>OK</u>

<u>semplice</u> cerco t_1, t_2 distinti t.c.

$\alpha(t_1) = \alpha(t_2)$ (gli estremi vanno bene)

$$\begin{pmatrix} \cos t_1 \\ t_1^2 \\ \sin 2t_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos t_2 \\ t_2^2 \\ \sin 2t_2 \end{pmatrix}$$

$t_1^2 = t_2^2 \Rightarrow t_1 = -t_2$

$\sin(2t_1) = \sin(2t_2) = \sin(-2t_1) =$

$= -\sin(2t_1)$

$\Rightarrow \sin(2t_1) = 0 \qquad t \in k\frac{\pi}{2} \quad k \in \mathbb{Z}$

guardando il dominio $\left(\left[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right]\right)$ vedo

che l'unica soluzione è data dagli <u>estremi</u>.

(b) α è liscia in ogni punto?

α è con derivata continua -

$\alpha' = (-\sin t, 2t, 2\cos(2t))$

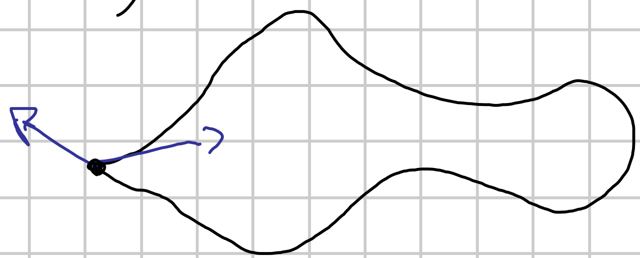
$\alpha' = 0$ MAI $\quad \left(\alpha' = 0 \Rightarrow t = 0 \text{ ma } 2 \cdot \cos(2 \cdot 0) \neq 0 \right)$

agli estremi:

$\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = (-1, \pi, -2)$

$\alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right) = (+1, -\pi, -2)$

$\Big\}$ non proporz.



$\Rightarrow$ α non è liscia

nel punto $\alpha\left(\frac{\pi}{2}\right) = \alpha\left(-\frac{\pi}{2}\right)$

c) curvatura e torsione - come prima -

d) $\int_{\gamma} \left(z\, dx + x\, dy \right)$ come prima

$$\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left[(\sin 2t)(-\sin t) + \cos t \cdot 2t \right] dt = \dots$$

$\boxed{25}$. 1) $A = \begin{pmatrix} -1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix}$

(a) trovare gli autov. di A provando che uno è nullo.

$$\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in \operatorname{Ker} A \quad \Rightarrow \det A = 0$$

$$P_A(t) = \det(A - tI) = at^3 + bt^2 + ct$$

con forma $\det \begin{pmatrix} -1-t & -1 & 1 \\ -1 & 2-t & 4 \\ 1 & 4 & 2-t \end{pmatrix} =$ termine noto nullo.

mi fermo. termine noto $= 0$

$$= -t^3 + (-1+2+2)t^2 + (2-4+2+16+1+1)t =$$

$$= -t\,(t^2 - 3t - 18) = -t(t+3)(t-6)$$

(b) base ortonormale che diagonalizza

trovo gli autovettori (e rinormalizzo)

$$\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix} \qquad \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}$$

$t=0 \qquad t=-3 \qquad t=6$

(c) P.O. di $\mathbb{R}^3$ su $\mathrm{Img}\,A$

basta sottrarre a $v \in \mathbb{R}$ la sua proiezione su $\frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$

$$v \longmapsto v - \left\langle v \,\middle|\, \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}\right\rangle \cdot \frac{1}{\sqrt{6}}\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$$