Esercitazione 24/3/2017

9.5.4 Base in $\mathbb{C}^2$ $= \left\{ w_1 = \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}, w_2 = \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix} \right\}$

$$v_1 = \frac{\begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} \right\|} = \frac{1}{\sqrt{2+4}} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{v}_2 = \begin{pmatrix} 3-i \\ 2i \end{pmatrix} - \frac{(3-i)(1-i) + 2i(-2)}{6} \begin{pmatrix} 1+i \\ -2 \end{pmatrix} =$$

$$= \dots = \frac{2}{3} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix} \qquad v_2 = \frac{\tilde{v}_2}{\|\tilde{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1-i \end{pmatrix}$$

Controlliamo che $v_1 \perp v_2$

$$(1-i)\,2 + (-2)(1-i) = 0$$

9.5.5 In $\mathbb{C}^3$ proiez. ortog. di $\begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} = u$ su

W generato da $w_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}$, $w_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix}$

Potrei ortonormalizzare $(w_1, w_2) \rightsquigarrow (v_1, v_2)$

e calcolare $p(u) = \langle u, v_1 \rangle v_1 + \langle u, v_2 \rangle v_2$

Altro modo:

$$\text{Span}\left(\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix}\right)^{\perp} =$$

$$= \text{Span}\left(\overline{\begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 1+i \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1-i \end{pmatrix}}\right) =$$

genera $W^{\perp}$

$$= \text{Span}\left(\overline{\begin{pmatrix} -1-i \\ -1-i \\ i \end{pmatrix}}\right) = \text{Span}\left(\begin{pmatrix} -1+i \\ -1+i \\ -i \end{pmatrix}\right) =$$

moltiplico tutti per $(-1-i)$

$$= \text{Span}\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ i-1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{array}{c} \shortparallel \\ Z \end{array}$$

$$p(u) = u - \frac{\langle u | z \rangle}{\| z \|^2} z =$$

$$= \begin{pmatrix} 2 \\ i \\ -1 \end{pmatrix} - \frac{2\cdot 2 + 2\cdot i + (-i)(-1-i)}{4+4+2} \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ i-1 \end{pmatrix} = \dots$$

9.5.6 $\quad K \in \mathbb{C} \qquad A_K = \begin{pmatrix} \boxed{2} & i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} & \boxed{K} \end{pmatrix}$

f_K è la forma sesquilin. associata ad A_K

sono coniugati

(a) quando f_K è hermitiana?

è reale

condizione $K \in \mathbb{R}$

(b) per quali k f_k è hermit., def > 0
(verifica che vale per $K = 3$) —

$2 > 0$, $\det \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} & K \end{pmatrix} > 0$

$\det = 2K - 3 > 0$ $\quad 2k > 3 \quad K > 3/2$ —

In particolare $2 \cdot 3 - 3 = 3 > 0$
quindi f_3 è def > 0 —

(c) Trovare $v \in \mathbb{C}^2$, con 1^a comp. immag. pura, ortog. e $\begin{pmatrix} 1-i \\ 1+i \end{pmatrix}$ risp. a f_3, unitario.

$\overset{\shortparallel}{w}$

Cerco $v_1 \quad \frac{1}{f_3} w \qquad w^* A_3 v_1 = 0$

$$(1+i, \; 1-i) \begin{pmatrix} 2 & i\sqrt{3} \\ -i\sqrt{3} & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

$\overset{\shortparallel}{v_1}$

$$\left(2+\sqrt{3}+i(2-\sqrt{3}), \; 3-\sqrt{3}+i(\sqrt{3}-3)\right) \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 0$$

Posso scegliere $v_1 = \begin{pmatrix} x \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3-\sqrt{3} + i(\sqrt{3}-3) \\ -(2+\sqrt{3}+i(2-\sqrt{3})) \end{pmatrix}$

Trasformo v_1 per avere 1^a comp. immaginaria pura

$$v_1 \rightsquigarrow v_2 = i\left(3-\sqrt{3} - i(\sqrt{3}-3)\right) v_1$$

1^a comp. coniugata

Il vettore cercato v lo ottengo dividendo v_2 per la sua norma.

$$v = \frac{v_2}{\|v_2\|_{F_3}}$$

9.5.7 (a) $V = \mathbb{C}^2$ $\langle \cdot | \cdot \rangle$ standard

v unitario, $\perp$ a $\begin{pmatrix} 3-i \\ 2+5i \end{pmatrix} = w$, 1^a coord. $\in \mathbb{R}$

, ortogonale a w $\begin{pmatrix} 2-5i \\ -3-i \end{pmatrix} = v_1$

, 1^a coord. $\in \mathbb{R}$ $(2+5i)\begin{pmatrix} 2-5i \\ -3-i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 29 \\ -1-17i \end{pmatrix} = v_2$

, unitario $v = \dfrac{v_2}{\|v_2\|} = \dfrac{v_2}{\sqrt{29^2+1+17^2}}$

$$v = \frac{1}{\sqrt{29^2+1+17^2}} \cdot \begin{pmatrix} 29 \\ -1-17i \end{pmatrix}$$

(b) $V = \mathbb{C}^2 \quad \langle \cdot | \cdot \rangle$ standard.

v unitario, ortog. a $\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2+i \end{pmatrix}$

somma delle coord immaginaria pura —

- ortog a $\begin{pmatrix} 1-3i \\ 2+i \end{pmatrix}$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 2-i \\ -(1+3i) \end{pmatrix}$

- somma delle coord. immag. pura

somma coord. $v_1 = 2-i-(1+3i) = 1-4i$

$v_2 = i(1+4i)\begin{pmatrix} 2-i \\ -1-3i \end{pmatrix} =$

$$= \begin{pmatrix} -4 & +i \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2-i \\ -1-3i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -7+6i \\ +7+11i \end{pmatrix}$$

$\sum$ coord $= 17i$ immag pure.

. unitario $\|v_2\| = \sqrt{49 + 36 + 49 + 121}$

$$v = \frac{v_2}{\sqrt{\dots}}$$

(C) $V = \mathbb{C}^2$ $\quad \langle \cdot | \cdot \rangle_A \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 1+2i \\ 1-2i & 5 \end{pmatrix}$

v unitario, $\perp_A \begin{pmatrix} 3-i \\ 2+5i \end{pmatrix} = w$, prima coord $\in \mathbb{R}$.

$$(3+i\ ,\ 2-5i)\begin{pmatrix}3 & 1+2i\\ 1-2i & 5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$$

$$(9+3i+2-10-4i-5i\ ,\ 11-18i)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$$

$$(1-6i\ ,\ 11-18i)\begin{pmatrix}x\\ y\end{pmatrix}=0$$

$$v_1=\begin{pmatrix}11-18i\\ -1+6i\end{pmatrix}$$

$$v_2=(11+18i)\,v_1=\dots$$

$$v = \left| (11+18i)\, v_1 \right|^{-1} v_2 =$$

$$= \frac{v_1 \cdot (11+18i)}{|11+18i| \sqrt{11^2+18^2+1+36}} =$$