Geometria 23/3/17

$f: V \to V$ lin. (V sp. vett. di dim n su $\mathbb{K}$)

<u>Fatto 1</u>: $p_f(t) = \det\left(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$

non dipende da $\mathcal{B}$.

Infatti se $\mathcal{B}'$ è altra base e M è la

matrice di cambio da $\mathcal{B}$ a $\mathcal{B}'$ so che:

$$[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M$$

$$\Longrightarrow \det\left(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}\right)$$

$$= \det\left(M^{-1} \cdot t \cdot I_n \cdot M - M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M\right)$$

$$= \det\left(M^{-1}\left(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) \cdot M\right)$$

$$= \cancel{\det(M^{-1})} \cdot \det\left(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) \cdot \cancel{\det(M)}$$

<u>Fatto 2</u> : $p_f(t)$ è un polinomio monico di grado n. ✓

Se $[f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}$ ho

$$p_f(t) = \det \begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots & - \\ -a_{21} & t-a_{22} & -a_{23} & \cdots \\ -a_{31} & -a_{32} & t-a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

ogni coeff della matrice è polinomi in t

di grado 0 o 1 $\Longrightarrow$ $p_f(t)$ è un polinomio; grado più alto viene da $(t-a_{11})(t-a_{22})\cdots$

$= t^n + \ldots$

<u>Fatto 3</u>: λ è autoval. di $f \Longleftrightarrow p_f(\lambda) = 0$

Infatti: λ autoval $\Longleftrightarrow \exists\, v \neq 0$ t.c. $f(v) = \lambda \cdot v$

$\Longleftrightarrow \exists\, v \neq 0$ t.c. $\lambda \cdot v - f(v) = 0$

$$\iff \exists v \neq 0 \text{ t.c. } \lambda \cdot id_V(v) - f(v) = 0$$

$$\iff \exists v \neq 0 \text{ t.c. } (\lambda \cdot id_V - f)(v) = 0$$

$$\iff \operatorname{Ker}(\lambda \cdot id_V - f) \neq \{0\}$$

$$\iff \operatorname{Ker}\left([\lambda \cdot id_V - f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right) \neq \{0\}$$

$$\iff \operatorname{Ker}\left(\lambda \cdot [id_V]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right) \neq \{0\}$$

$$\iff \operatorname{Ker}\left(\lambda \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \right) \neq \{0\}$$

$$\Longleftrightarrow \quad \det\left(\lambda \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad p_f(\lambda) = 0 .$$

Prop ▨

<u>Fatto 4</u> : per ogni $f : V \to V$ è ben def. $\det(f)$ come $\det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$ e si ha che il termine noto di $p_f(t)$ è

$(-1)^n \cdot \det(f)$.

Infatti: se uso $\mathcal{B}'$ ho $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M$

$$[f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'} = M^{-1} \cdot [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} \cdot M$$

$$\Rightarrow \det\left([f]_{\mathcal{B}'}^{\mathcal{B}'}\right) = \cancel{\det(M^{-1})} \cdot \det\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) \cdot \cancel{\det(M)}$$

Termine noto di $p_f(t)$ è

$$p_f(0) = \det\left(0 \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$$

$$= \det\left(-[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right) = (-1)^n \cdot \det(f)$$

<u>Fatto 5</u>: per ogni $f: V \to V$ lin.
è ben def la traccia di f come $\mathrm{tr}\left([f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}\right)$,
inoltre il coeff. di t^{n-1} in $p_f(t)$ è
$-\mathrm{tr}(f)$.

(Probabilmente) più visto: $A, B \in M_{n \times n}$

$\Rightarrow tr(A \cdot B) = tr(B \cdot A)$

(att: in generale $tr(A \cdot B \cdot C) \neq tr(A \cdot C \cdot B)$)

$$tr(A \cdot B) = \sum_{i=1}^{n} (A \cdot B)_{ii} = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (A)_{ij} \cdot (B)_{ji}$$

$$tr(B \cdot A) = \quad \ldots \quad = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} (B)_{ij} (A)_{ji}$$

stessa espressione scambiando i ruoli degli indici.

Ora se ho $\mathcal{B}' = \mathcal{B} \cdot M$

$$tr\left([f]^{\mathcal{B}'}_{\mathcal{B}'}\right) = tr\left(M^{-1}\left([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot M\right)\right)$$

$$= tr\left(\left([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cdot M\right) \cdot M^{-1}\right)$$

$$= tr\left([f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} \cancel{\cdot M \cdot M^{-1}}\right) \Rightarrow \text{indip. da } \mathcal{B}.$$

$$A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$$

$$p_f(t) = \det \begin{pmatrix} t-a_{11} & -a_{12} & -a_{13} & \cdots \\ -a_{21} & t-a_{22} & -a_{23} & \cdots \\ -a_{31} & -a_{32} & t-a_{33} & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

$$= (t-a_{11})(t-a_{22}) \cdots (t-a_{nn}) +$$

$$+ \begin{pmatrix} \times & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \boxed{\cdot} & \cdot & \times & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{pmatrix} \leftarrow (\text{gradi} \leq n-2)$$

$$= t^n - \underbrace{(a_{11} + a_{22} + \cdots + a_{nn})}_{tr(A) = tr(f)} t^{n-1} + (\text{gradi} \leq n-2)$$

$\boxtimes$

Morale :

$$p_f(t) = t^n - tr(f) \cdot t^{n-1} + \cdots + (-1)^n \det(f) .$$

Oss : per $n = 2$ $\det(f)$ e $tr(f)$ bastano per trovare $p_f(t)$.

Es: $A = \begin{pmatrix} 7 & 1 \\ -9 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad tr(A) = 11$

$det(A) = 37$

$\Longrightarrow p_A(t) = t^2 - 11t + 37$

Oss: per $n = 3$ conoscendo

$tr(f)$, $det(f)$ e $p_f(t_0)$ con $t_0 \neq 0$

posso determinare $p_f(t)$.

Es: Se $A \in M_{3\times 3}(\mathbb{R})$ e so che
$tr(A) = -5$, $det(A) = 7$, $p_A(2) = 3$ ho:

$$p_A(t) = t^3 + 5t^2 + c \cdot t - 7$$

inoltre $8 + 20 + 2c - 7 = 3 \Rightarrow c = -9$.

Es: $V = \{x \in \mathbb{R}^3 : x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$

$$f : V \to V \qquad f(x) = \begin{pmatrix} 5x_1 - x_2 + 4x_3 \\ -2x_1 + 7x_2 - x_3 \\ -x_1 - 4x_2 - x_3 \end{pmatrix}$$

Att: $f = f\begin{pmatrix} 5 & -1 & 4 \\ -2 & 7 & -1 \\ -1 & -4 & -1 \end{pmatrix}$

Per trovare $P_f(t)$ serve $\mathcal{B}$ e $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$:

Scelgo $\mathcal{B} = \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ -9 \\ 3 \end{pmatrix}$

$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow [f]^{\mathcal{B}}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow P_f(t) = t^2 - 9t + 3$

$\lambda_{1,2} = \dfrac{9 \pm \sqrt{81-12}}{2}$ autovalori.

Se volessi i relativi autovettori v_1, v_2:

cerco $w_j \in \mathbb{R}^2$, $w_j = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \neq 0$ t.c.

$$\begin{pmatrix} 9 & 1 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \lambda_j \cdot \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$$

e allora $v_j = a \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Oss: se $f: V \to V$ è diagonalizzabile allora $p_f(t)$ ha n radici contate con le loro molteplicità. $(n = \dim V)$

Infatti $\exists\, \mathcal{B}$ t.c. $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow p_f(t) = \det\left(t \cdot I_n - \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}\right) =$$

$$= \det \begin{pmatrix} t-\lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & t-\lambda_n \end{pmatrix} = (t-\lambda_1) \cdots (t-\lambda_n).$$

Dunque $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sono radici di $p_f(t)$
(possono ripetersi $\Rightarrow$ sono n con molt.).

<u>Oss</u>: il fatto precedente è automatico su $\mathbb{C}$.

<u>Es</u>: $A = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ -3 & 0 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{R})$

$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t & -3 \\ 3 & t \end{pmatrix} = t^2 + 9$

su $\mathbb{R}$ non ha radici $\Rightarrow$ A non è diago
come matrice reale

$$\left(\nexists M \in M_{2\times 2}(\mathbb{R}) \text{ t.c. } M^{-1}\cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} * & 0 \\ 0 & * \end{pmatrix} \right)$$

Invece su $\mathbb{C}$ ho le radici $\pm 3i$
(vedremo a breve: ciò implica che A è
diago su $\mathbb{C}$: $\exists M \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ t.c.

$$M^{-1}\cdot A\cdot M = \left(\begin{pmatrix} 3i & 0 \\ 0 & -3i \end{pmatrix}\right).$$

Es: $A = \begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & 5 \\ 1 & -5 & 0 \end{pmatrix}$

$$P_A(t) = \det\begin{pmatrix} t & -2 & 1 \\ 2 & t & -5 \\ -1 & 5 & t \end{pmatrix}$$

$$= t^3 - 10 + 10 + t + 4t + 25t = t^3 + 30t = t(t^2+30).$$

Su $\mathbb{R}$ ha la sola radice $t=0$

$\Longrightarrow$ non è diag$_0$ su $\mathbb{R}$.

Su $\mathbb{C}$ ha le radici $0, \pm i\sqrt{30}$

ciò implica (vedremo) che è diag$_0$ su $\mathbb{C}$:

$$\exists M \in M_{3\times3}(\mathbb{C}) \quad t.c. \quad M^{-1}\cdot A\cdot M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & i\sqrt{30} & 0 \\ 0 & 0 & -i\sqrt{30} \end{pmatrix}.$$

Teorema: se f ha n autovalori distinti allora è diagonalizzabile.

Dim: siano $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ gli autoval e $v_1, \dots, v_n$ autovett. ad essi relativi (cioè $f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j$ con $v_j \neq 0$).

Dimostro per induzione su $k = 1, \dots, n$

che $v_1, \dots, v_k$ sono lin. indip.

(per $k = n$ ho che $v_1, \dots, v_n$ sono base

$\Rightarrow$ base autovett. $\Rightarrow$ ok).

$k = 1$ $\quad v_1 \neq 0$ ✓

Supponiamo $v_1, \dots, v_k$ lin. indip. per $k < n$

e per assurdo che $v_1, \dots, v_k, v_{k+1}$ siano lin dip.

cioè che $v_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$.

So che $f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j$ e applico f all'identità $v_{k+1} = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k$:

$$\begin{aligned} f(v_{k+1}) &= f(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_k v_k) \\ &= \alpha_1 f(v_1) + \cdots + \alpha_k f(v_k) \\ &= \alpha_1 \lambda_1 v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_k v_k \end{aligned}$$

$||$

$$\parallel$$

$$\lambda_{k+1} v_{k+1} = \alpha_1 \lambda_{k+1} v_1 + \cdots + \alpha_k \lambda_{k+1} v_k$$

$$\Longrightarrow \alpha_1 \underbrace{(\lambda_1 - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} v_1 + \cdots + \alpha_k \underbrace{(\lambda_k - \lambda_{k+1})}_{\neq 0} v_k = 0$$

Avevo supposto $v_1, \dots, v_k$ lin. indip.

$$\Longrightarrow \alpha_i (\lambda_i - \lambda_{k+1}) = 0 \quad \forall i$$

$$\underbrace{\qquad\qquad}_{\neq 0}$$

$\Rightarrow \alpha_j = 0 \ \forall j \Rightarrow v_{k+1} = 0$: No. $\blacksquare$

9.4.4 $\quad {}^tM \cdot M$ diago inv.

quante sono le D diago t.c. $M \cdot D$ sia ortog.

$${}^tM \cdot M = \begin{pmatrix} \alpha_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \end{pmatrix} \qquad \alpha_j \neq 0.$$

$$D = \begin{pmatrix} \beta_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \beta_n \end{pmatrix}$$

$M \cdot D$ ortop. $\Longleftrightarrow \; {}^t(M \cdot D) \cdot (M \cdot D) = I_n$

$\Longleftrightarrow \; {}^tD \cdot {}^tM \cdot M \cdot D = I_n$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \alpha_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \beta_1 & & \\ & \ddots & \\ & & \beta_n \end{pmatrix} = I_n$$

$$\Longleftrightarrow \begin{pmatrix} \alpha_1 \beta_1^2 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \alpha_n \beta_n^2 \end{pmatrix} = I_n$$

$$\Longrightarrow \alpha_j \beta_j^2 = 1 \quad j = 1 \dots n$$

$$\Longrightarrow \beta_j^2 = 1/\alpha_j \quad j = 1 \dots n$$

$\Longrightarrow$ nessuna tale D se qualche α_j è < 0, altrimenti 2^n, quelle con

$$\beta_j = \pm \sqrt{1/\alpha_j} .$$

Però $M = (u_1, \dots, u_n)$

$$^tM \cdot M = \begin{pmatrix} ^tu_1 \cdot u_1 & & \\ & \ddots & \\ & & ^tu_n \cdot u_n \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \alpha_j = {}^tu_j \cdot u_j = \|u_j\|^2 \geq 0 \quad \text{anzi} > 0$$

$\Rightarrow$ sono sempre 2^n.

— o —

9.5.1 In $\mathbb{C}^2$ trovare tutti i v unitari, seconda comp. imm. pura, ortog. a $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$.

Come non farlo: cerco

$v = \begin{pmatrix} a+ib \\ ic \end{pmatrix}$ e impongo

$$\begin{cases} a^2+b^2+c^2=1 \\ \left\langle \begin{pmatrix} a+ib \\ ic \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2} = 0 \end{cases}$$

$a,b,c \in \mathbb{R}$

Invece: cerco dapprima v che soddisfi seconda e terza condizione e poi normalizzo: quelli che vanno bene sono $\underline{\pm}$ il vettore trovato!

la prima condiz. si preserva moltiplicando per λ con $|\lambda|=1$

la seconda — — — — — — — — $\lambda \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ vanno bene solo ± 1

Cerco $v = \begin{pmatrix} z \\ i \end{pmatrix}$ che sia $\perp$ $\begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix}$, cioè

$$z \cdot (2+i) + i\,(1-3i) = 0$$

$$z = -\frac{3+i}{2+i} = -\frac{(3+i)(2-i)}{5}$$

$$= -\frac{7-i}{5} = \frac{i-7}{5}$$

$$\Rightarrow \quad \pm \frac{1}{5\sqrt{3}} \begin{pmatrix} i-7 \\ 5i \end{pmatrix}$$

9.5.2 Trovare tutti i vett. di $\mathbb{C}^3$ unitari, seconda compo reale, somme compo nulle, ortog a $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$.

Cerco $v = \begin{pmatrix} z \\ 1 \\ -1-z \end{pmatrix}$

I vettori che soddisfano II + III condizioni sono tutti e soli i mult. reali di questi che sia $\perp$ $\begin{pmatrix} 1+i \\ 2-i \\ 1+2i \end{pmatrix}$ e poi $\pm$ normalizzo.

$$z(1-i)+1\cdot(2+i)-(1+z)(1-2i)=0$$

$$z(1-i-1+2i)=-2-i+1-2i$$

$$iz=-1-3i \qquad z=i-3$$

$\Rightarrow$ vanno bene :

$$\pm \frac{1}{4} \begin{pmatrix} i-3 \\ 1 \\ 2-i \end{pmatrix}.$$

<u>Esercizio</u>: trovare tutti i vettori di $\mathbb{C}^2$ unitari e ortogonali a $\begin{pmatrix} 2+i \\ -3-i \end{pmatrix}$.

(su $\mathbb{R}$: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{\perp} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$

su $\mathbb{C}$: $\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{\perp} = \operatorname{Span}\begin{pmatrix} -\overline{b} \\ \overline{a} \end{pmatrix}$)

$\Rightarrow$ vanno bene: $\dfrac{e^{i\vartheta}}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 3-i \\ 2-i \end{pmatrix} \quad \vartheta \in \mathbb{R}$.

Proprietà delle matrice di proiez. ortogonale:

su $\mathbb{R}$: $A = A^2 = {}^tA$

su $\mathbb{C}$: $A = A^2 = A^* \_$

9.5.3 Trovare matrice proiez. ortog su

$W = \text{Span}\begin{pmatrix} 2+i \\ 1-3i \end{pmatrix}$ verificando le proprietà!

$$p_W \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \frac{\left\langle \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-3i \end{pmatrix} \right\rangle}{\left\| \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-3i \end{pmatrix} \right\|^2} \cdot \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-3i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{u \cdot (2-i) + v(1+3i)}{4+1+1+9} \begin{pmatrix} 2+i \\ 1-3i \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{15} \begin{pmatrix} 5 & -1+7i \\ -1-7i & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$$

$$\underbrace{\qquad\qquad\qquad\qquad}_{A}$$

$A^* = A$ ✓ $\qquad$ $A^2 = A$ . . . . ✓