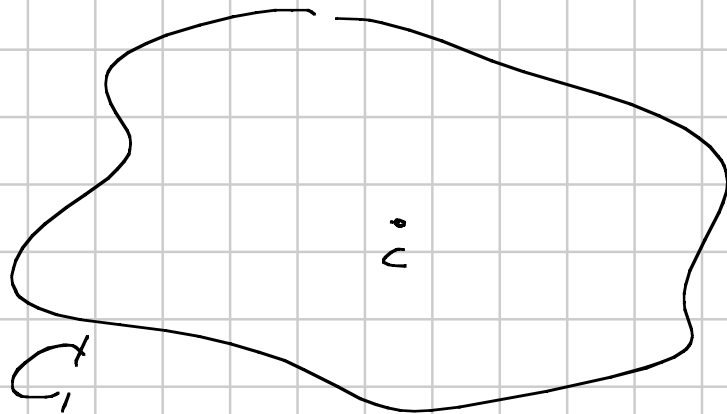
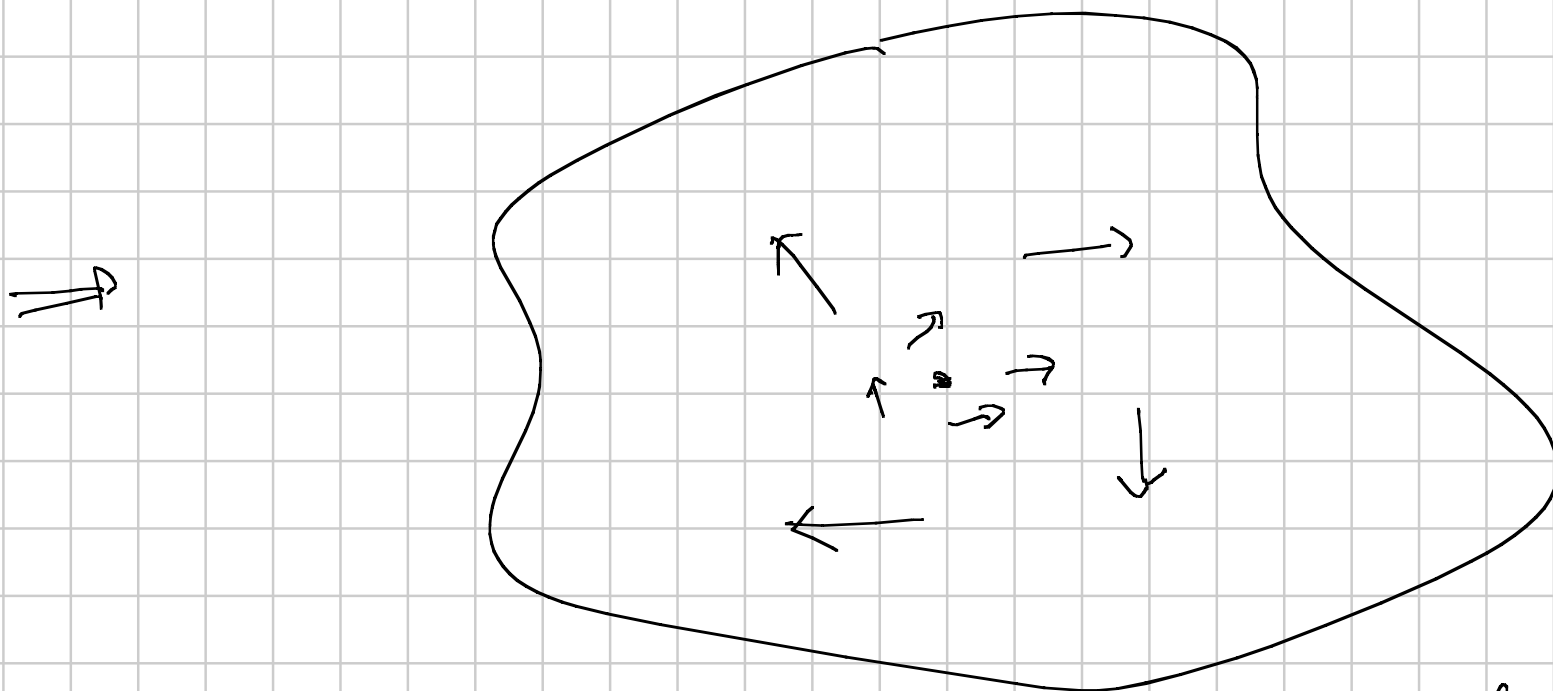


Geom 22/3/17

$G \subset \mathbb{R}^3$ corpo soggetto a forze us in equil. m'o



$\Rightarrow$ risultante su
centro di massa
 c $\bar{c}$ nulla



$F(x)$ = forza nel pto x (vettore 0 nel centro d'inerzia)

Approssimazione lineare:

suppongo che $F(x) = M \cdot x$ -

Decompongo $M = \underbrace{S}_{\frac{1}{2}(M^t + M)} + \underbrace{A}_{\frac{1}{2}(M - M^t)}$

(proiezioni rispetto $M_{n \times n} = \mathcal{I}_n \oplus \mathcal{Q}_n$).

Es:
$$S = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3\sqrt{3} & 2 \\ 3\sqrt{3} & 5 & 2\sqrt{3} \\ 2 & 2\sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}$$

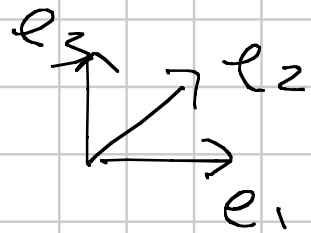
$$v_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} \quad v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} \sqrt{3} \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad v_3 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ -2 \end{pmatrix}$$

Fatto: sono una base ortogonale di $\mathbb{R}^3$

Tuotte: $Av_1 = 3 \cdot v_1 \quad Av_2 = -v_2 \quad Av_3 = v_3$

$$\frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3\sqrt{3} & 2 \\ 3\sqrt{3} & 5 & 2\sqrt{3} \\ 2 & 2\sqrt{3} & 8 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3\sqrt{3} \\ 6 \end{pmatrix} = 3 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \sqrt{3} \\ 2 \end{pmatrix}$$

altro analoghe.



$$B = (v_1 \ v_2 \ v_3)$$

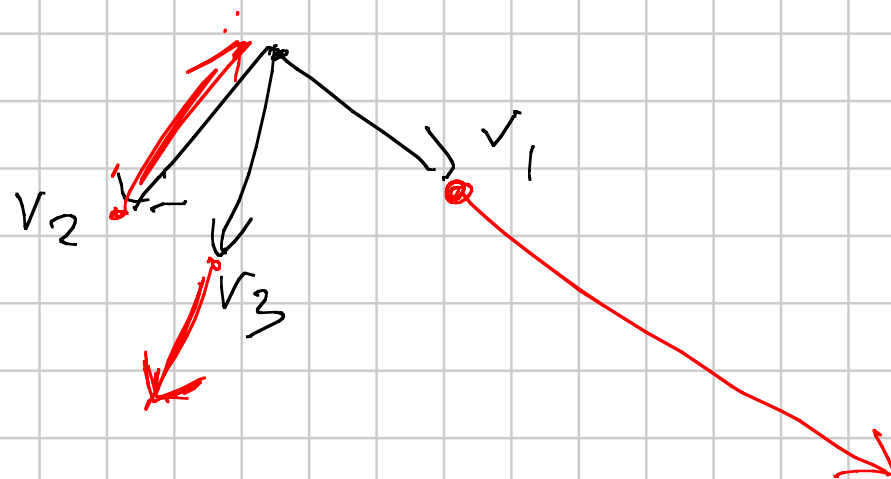


nuovo riferimento

$$[S]_B^B = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$S = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} -1 & 3\sqrt{3} & 2 \\ 3\sqrt{3} & 5 & 2\sqrt{3} \\ 2 & 2\sqrt{3} & 8 \end{pmatrix}$$

(cambio d.
coord. invariante)



$$A = \begin{pmatrix} 0 & 3 & -1 \\ -3 & 0 & \sqrt{6} \\ 1 & -\sqrt{6} & 0 \end{pmatrix}$$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{112}} \begin{pmatrix} 3\sqrt{6} \\ 3 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$w_2 = \frac{1}{\sqrt{7}} \begin{pmatrix} 1 \\ -\sqrt{6} \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$w_3 = \frac{1}{4} \begin{pmatrix} \sqrt{6} \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$$

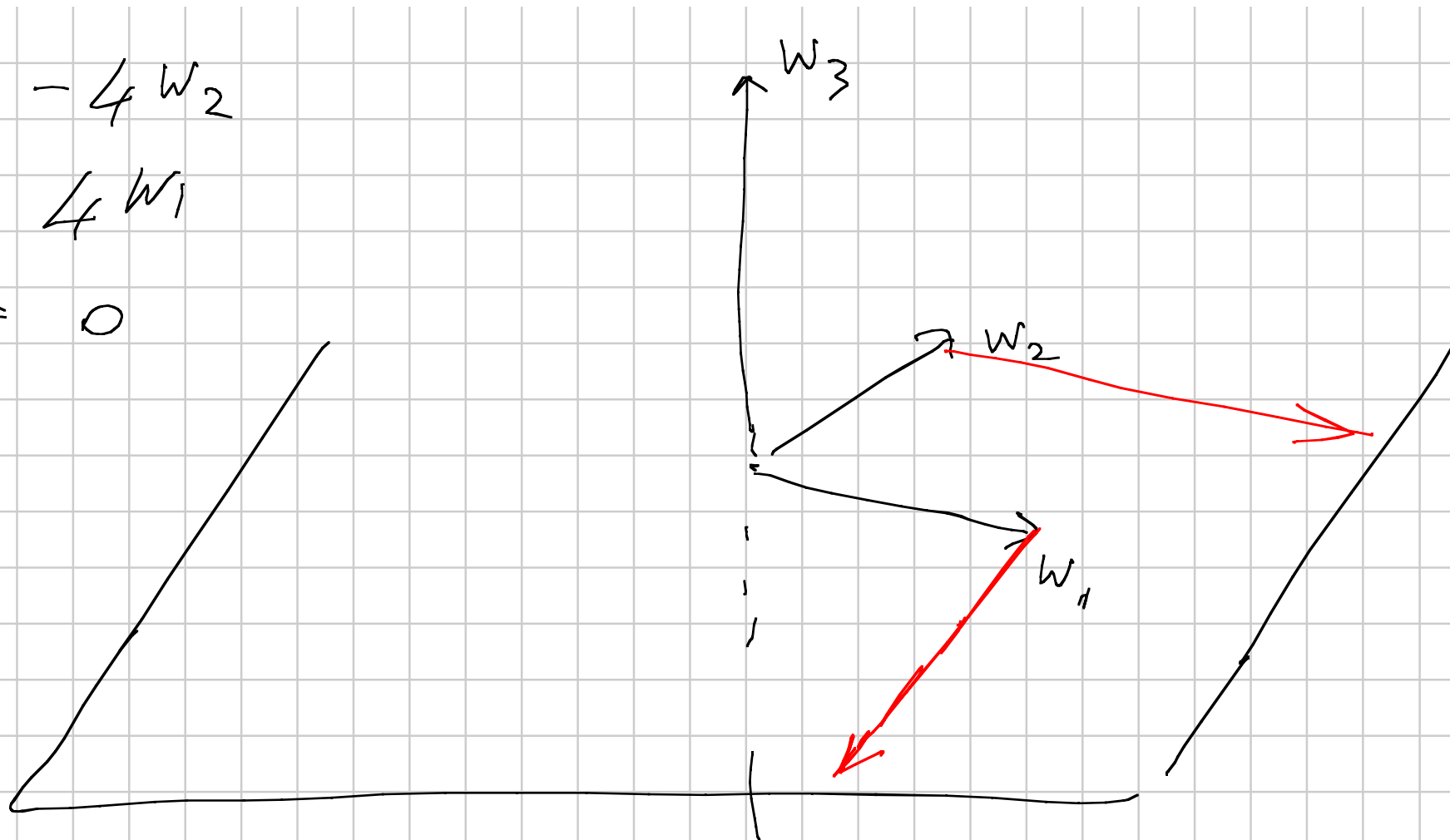
Fatto: sono base ortonormale (nuovo riferimento
isometrico)

Indice:

$$AW_1 = -4W_2$$

$$AW_2 = 4W_1$$

$$AW_3 = 0$$



Nel nuovo riferimento A ha l'effetto di
una rotazione —

Q: Data $f: V \rightarrow V$ lineare è
possibile trovare una base $\mathcal{B}$ di V
rispetto a cui $[f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$ sia "facile"?

Ad es.

diagonale

$$\begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$$

oppure

$$\begin{pmatrix} 0 & -t & 0 \\ t & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

(per le 3×3
antisimmetriche)

Oss: se prendo $f: V \rightarrow W$ e mi conviene
di scegliere B per V e C per W di f
facciamo solo il rango:

scego base $v_1, \dots, v_k$ di $\text{Ker}(f)$

completo a base $(v_1, \dots, v_k, v_{k+1}, \dots, v_m) = \mathcal{B} \downarrow V$

So che $f(v_{k+1}), \dots, f(v_m)$ sono base di $\text{Im} f$

li completo a base $f(v_{k+1}), \dots, f(v_m), w_1, \dots, w_{m-k} = \mathcal{C}$
di W

$$\Rightarrow [f]_{\mathcal{C}}^{\mathcal{B}} =$$

$$\left(\begin{array}{cc|cc} & & 1 & 0 \\ & & 0 & 1 \\ & & \vdots & \vdots \\ & & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & & 1 \\ & & 0 & \\ & & & \ddots \\ & & & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} \left. \vphantom{\begin{matrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} m-k \\ \left. \vphantom{\begin{matrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{matrix}} \right\} m-m+k \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{10em}}_k \quad \underbrace{\hspace{10em}}_{m-k}$

$$= \begin{pmatrix} 0 & I_n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$n = n - k = \text{rank}(f) -$$

Prop: sia $f: V \rightarrow V$ lineare, B_0 una base
 di V , $A_0 = [f]_{B_0}^{B_0}$. Allora
 le matrici di f rispetto ad altre

basì di V sono tutte e sole quelle
del tipo $M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$ con
 $M \in M_{n \times n}(K)$ invertibile.

(Prendiamo V sp. vett. su $K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$.)

Def: chiameremo similitudine del tipo
 $M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$ similitudine di A_0 .

Versione per notfici della $\mathcal{Q}$ precedente:

$\mathcal{Q}$: Data $A_0 \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$

cercare $M \in \mathcal{M}_{n \times n}(\mathbb{K})$ $\det(M) \neq 0$

t.c. $M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$ sia "facile".

Dim: Se $\mathcal{B}$ è altra base di V e $A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}$
devo vedere che

$$A = M^{-1} \cdot A_0 \cdot M \quad A_0 = [f]_{\mathcal{B}_0}^{\mathcal{B}_0}$$

già visto: $M =$ matrice di cambio da $\mathcal{B}_0$ a $\mathcal{B}$.

Viceversa se $A = M^{-1} \cdot A_0 \cdot M$ allora

$$A = [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}}, \quad \mathcal{B} = M \cdot \mathcal{B}_0. \quad \square$$

Def: diciamo che f è diagonalizzabile
se esiste B t.c. $[f]_B = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$

(A è diagonalizzabile se esiste $M \in M_{n \times n}$
invert. t.c. $M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & \lambda_n \end{pmatrix}$).

Def: f è diagonalizzabile se e solo se
esiste una base $\mathcal{B} = (v_1, \dots, v_n)$ di V t.c.
 $f(v_j) = \lambda_j \cdot v_j \quad j = 1, \dots, n$

Def: data $f: V \rightarrow V$ lin. chiamo $\lambda \in \mathbb{K}$
autovalore di f se esiste $v \neq 0$ t.c.
 $f(v) = \lambda \cdot v$. Ogni tale v lo chiamo

autovettore di f rispetto a λ .

Oss Se assunto $v = 0$ h.

$$f(0) = 0 = \lambda \cdot 0 \quad \forall \lambda \in K$$

(la def. di autovettore sarebbe insensibile).

Oss: f è diagonalizzabile $\Leftrightarrow$ ammette una base di autovettori.

Prop: data $f: V \rightarrow V$ lineare,
 $\det(t \cdot I_n - [f]_{\mathcal{B}}^{\mathcal{B}})$ è indipendente da $\mathcal{B}$
ed è un polinomio di grado n nella
indeterminata t , monico (coeff di t^n è 1);
lo indico con $p_f(t)$ e lo chiamo
polinomio caratteristico di f ;

inoltre λ è autovettore di f se e solo se
 $p_f(\lambda) = 0$ (λ è radice del pol. caratter.) -

Con: per cercare gli autovetori di f
(e poi gli autovettori) si calcola
 $p_f(t)$ e se ne cercano le radici -

$$\text{Ex: } A = \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} ; A = \begin{bmatrix} \lambda \\ \lambda \end{bmatrix}_{\mathbb{C}_2}^{\mathbb{C}_2}$$

$$P_A(t) = \det(t \cdot I_2 - A)$$

$$= \det \left(t \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \right)$$

$$= \det \begin{pmatrix} t-1 & -4 \\ -6 & t-3 \end{pmatrix}$$

$$= t^2 - 4t + 3 - 24 = t^2 - 4t - 21$$

$$= (t - 7)(t + 3)$$

$\Rightarrow$ ha radici $\lambda_1 = 7$ e $\lambda_2 = -3$ -

Verifichiamo che sono autovalori, cioè che

esiste $v_1 \neq 0$ t.c. $A \cdot v_1 = 7 v_1$,

$v_2 \neq 0$ t.c. $A \cdot v_2 = -3 v_2$:

cercio $V_1 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$: voglio $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = 7 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 4y = 7x \\ 6x + 3y = 7y \end{cases}$$

$$\begin{cases} -6x + 4y = 0 \\ 6x - 4y = 0 \quad \checkmark \end{cases}$$

$\Rightarrow$ scelgo $V_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$.

cerco $v_2 = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$; voglio $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ 6 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = -3 \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$\begin{cases} x + 4y = -3x \\ 6x + 3y = -3y \end{cases} \quad \begin{cases} 4x + 4y = 0 \\ 6x + 6y = 0 \checkmark \end{cases}$$

scelgo $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Ho trovato $B = (v_1, v_2)$ base di autovettori.
 $\Rightarrow A$ è diagonalizzabile, anzi:

$$M^{-1} \cdot A \cdot M = \begin{pmatrix} 7 & 0 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$$

$$M = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}.$$

_____ 0 _____

9.4.1 Trovare un'base propria. $\text{Aut } \mathbb{R}^2$.

$$(c) \quad W = \text{Span} \left(\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -5 \\ 7 \end{pmatrix} \right) = \text{Span} \begin{pmatrix} 26 \\ -26 \\ -26 \end{pmatrix} = \text{Span} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$P_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - \frac{-x+y+z}{3} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{3} \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}}_A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$${}^t A = A \quad \checkmark$$

$$A^2 = A \quad \checkmark$$

$$(f) \quad W = \text{span} \left(\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \right)$$

noto che sono l.p.e. l.o.

$$p_W \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \frac{x - y + z + 2w}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \frac{x + y + 2z - w}{7} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{7} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 1 & 5 & 0 \\ 1 & -3 & 0 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 \\ 4 \\ 2 \\ 5 \end{pmatrix}$$

9.4.2. Trovare X autovalore rispetto
 a $\langle \cdot, \cdot \rangle_A$ + altre condizioni.

Qss: X orthogonal $\Leftrightarrow$ exists $\mathbb{R}^n \times \langle \cdot | \cdot \rangle_A$

$$\Leftrightarrow \langle Xu | v \rangle_A = \langle u | Xv \rangle_A \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow {}^t(Xu) \cdot A \cdot v = {}^tu \cdot A \cdot (Xv) \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow {}^tu \cdot {}^tX \cdot A \cdot v = {}^tu \cdot A \cdot X \cdot v \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow {}^tu \cdot ({}^tX \cdot A - A \cdot X) v = 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow \langle u \mid ({}^tX \cdot A - A \cdot X) \cdot v \rangle_{\mathbb{R}^n} = 0 \quad \forall u, v \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow ({}^tX \cdot A - A \cdot X) v = 0 \quad \forall v \in \mathbb{R}^n$$

$$\Leftrightarrow {}^tX \cdot A = A \cdot X.$$

$$(a) \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \quad X = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 3a = 3a & \checkmark \\ 2c = 3b \\ 3b = 2c & \checkmark \\ 2d = 2d & \checkmark \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow X = \begin{pmatrix} a & 2t \\ 3t & d \end{pmatrix}$$

$$a, d, t \in \mathbb{R}$$

$$(b) A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$X \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 2a - c = 2a - c \checkmark \\ -a + 3c = 2b - d \\ 2b - d = -a + 3c \checkmark \\ -b + 3d = -b + 3d \checkmark \\ 2a - b = 5 \\ 2c - d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} b = 2a - 5 \\ d = 2c \\ -a + 3c = 4a - 10 - 2c \end{cases}$$

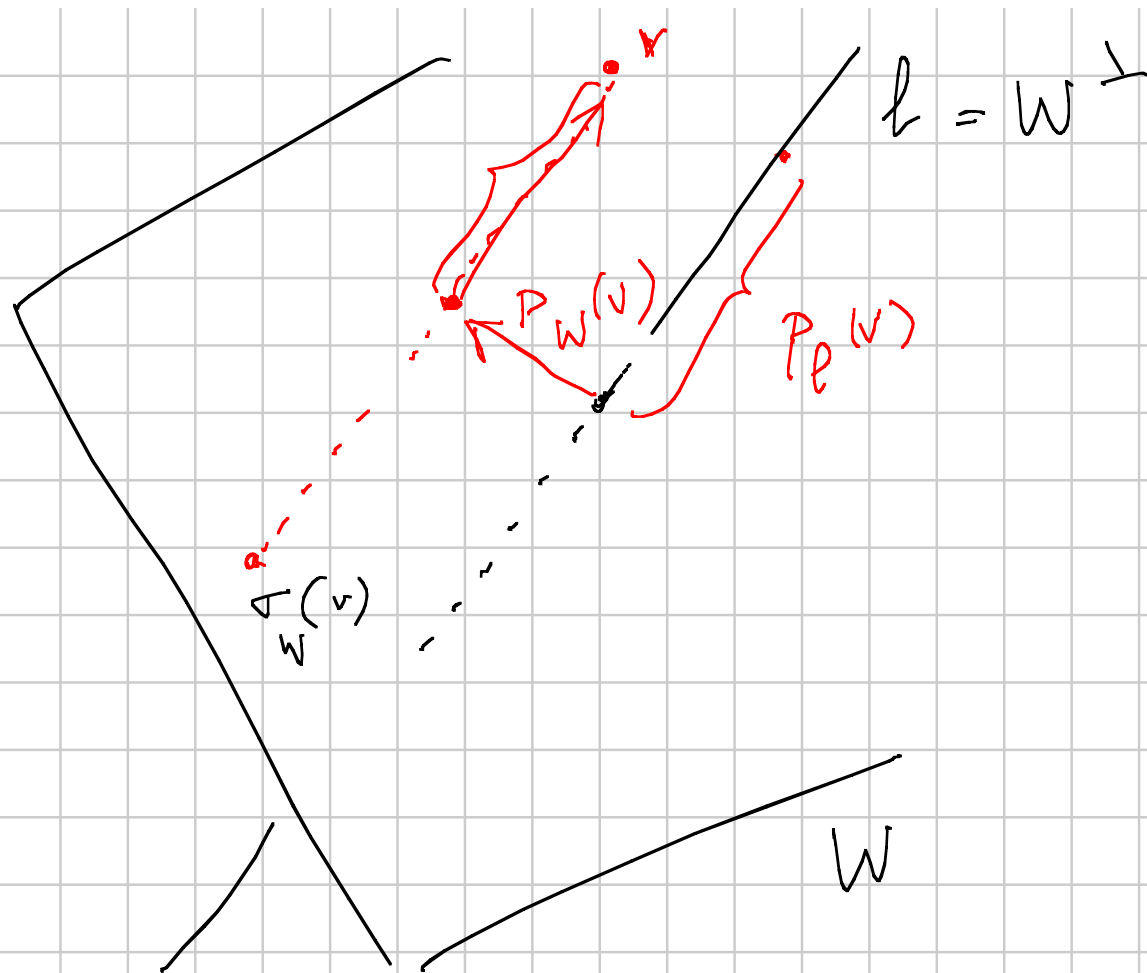
$$\begin{cases} 5a - 5c = 10 \\ b = 2a - 5 \\ d = 2c \end{cases}$$

$$\begin{cases} c = a - 2 \\ b = 2a - 5 \\ d = 2a - 4 \end{cases}$$

$$X = \begin{pmatrix} a & 2a - 5 \\ a - 2 & 2a - 4 \end{pmatrix} \\ a \in \mathbb{R}$$

9.4.3 Trovare la matrice della isometria descritta -

(a) riflessione rispetto al piano $W: 2x - 3y + 4z = 0$
Nota: $W = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}^\perp$ $L = W^\perp$



$$\begin{aligned}
 \sigma_W(v) &= P_W(v) - P_l(v) \\
 &= (v - P_l(v)) - P_l(v) \\
 &= v - 2P_l(v)
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \vec{v}_N \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} - 2 \cdot \frac{2x - 3y + 4z}{4 + 9 + 16} \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 4 \end{pmatrix}$$

$$= \frac{1}{29} \begin{pmatrix} 21 & 12 & -16 \\ 12 & 11 & 24 \\ -16 & 24 & -3 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

Vérifier que $\vec{e}$ est orthogonal: colonne base orthogonale;
 norme 1: $441 + 144 + 256 \neq 841$ ✓

altri due simili.

discriminante: $252 + 132 - 384 \neq 0$

✓

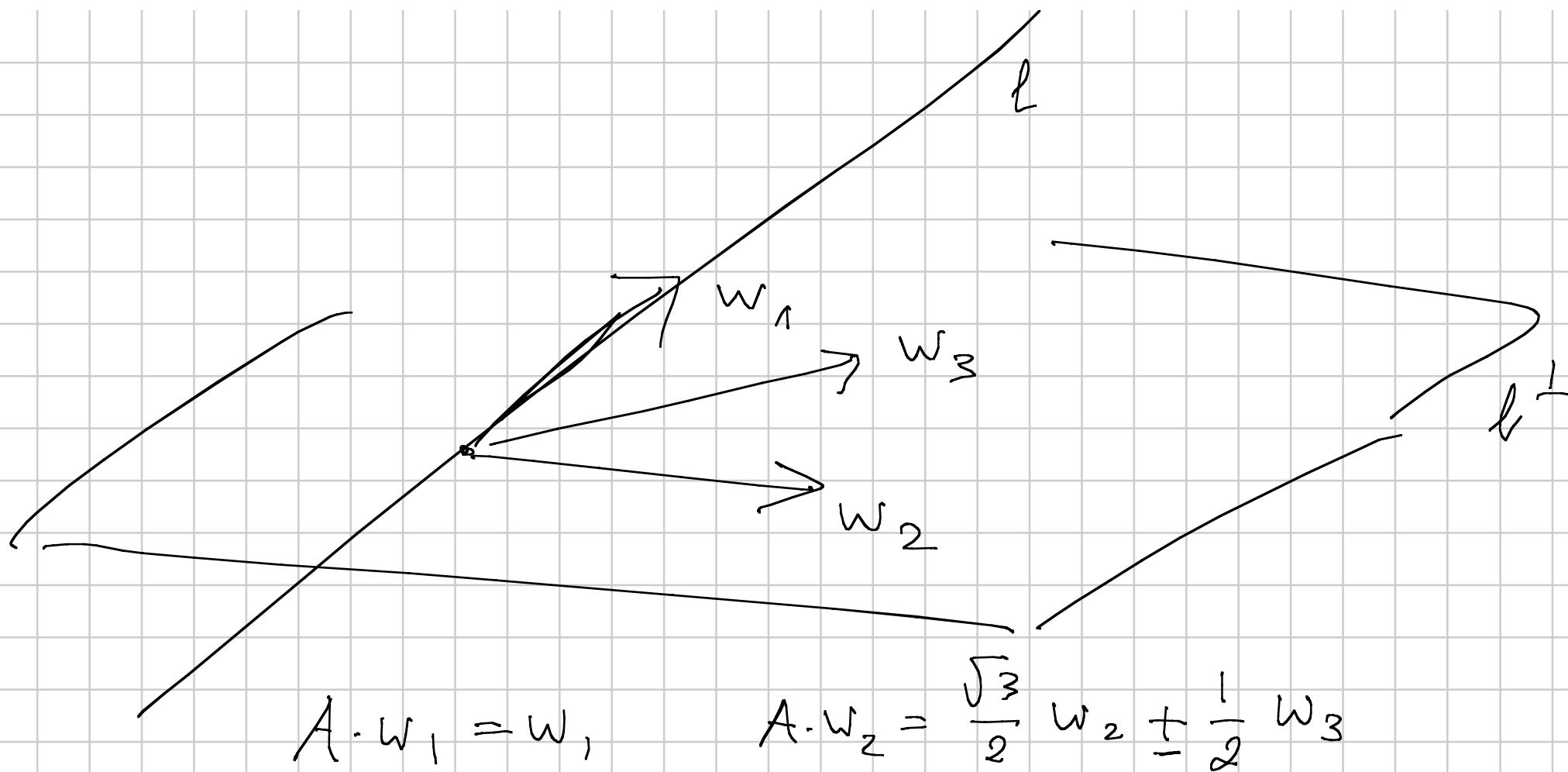
altri due simili.

(b) una delle due rotaz. di $\pi/6$ lungo e $\text{span}\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$

$$W_1 = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$W_2 = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$W_3 = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \end{pmatrix}$$



$$A \cdot w_3 = \pm \frac{1}{2} w_2 + \frac{\sqrt{3}}{2} w_3$$

$$A \cdot (w_1, w_2, w_3) = (w_1, w_2, w_3) \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3}/2 & \pm 1/2 \\ 0 & \pm 1/2 & \sqrt{3}/2 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow A = (w_1 \ w_2 \ w_3) \cdot \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & \sqrt{3} & \pm 1 \\ 0 & \pm 1 & \sqrt{3} \end{pmatrix} (w_1 \ w_2 \ w_3)^{-1}$$

$$(w_1 \ w_2 \ w_3) = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} \sqrt{2} & \sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & -\sqrt{3} & 1 \\ \sqrt{2} & 0 & -2 \end{pmatrix}.$$

