

Cgeom 21.04.2017

Recupero Esercitazioni

Glo 4 MAGGIO 2017

13.30 - 14.30 C21

Le date degli appelli: estivi sono ONLINE

non fare affidamento finché non sono

confermate su PAGINA WEB PETRONIO

10.2.1 Trovare Ser ortog. di $\mathbb{R}^3$ che diagonalizza

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & -2 \\ -1 & 3 & 5 \\ -2 & 5 & 7 \end{pmatrix} \quad (\text{simmetrico})$$

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} t+5 & 1 & 2 \\ 1 & t-3 & -5 \\ 2 & -5 & t-7 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} t+5 & 1 & 0 \\ 1 & t-3 & -2t+13 \\ 2 & -5 & t+3 \end{vmatrix} =$$

$$= (t+5)(t^2 - 16t + 39) - (5t - 23) =$$
$$= t^3 - 11t^2 - 47t + 213$$

Cerco radici intere, che dividono 213

± 1 no, $\textcircled{3}$ OK

$$27 - 93 - 141 + 213 = 0$$

$\Rightarrow$ divide con
Ruffini per $t-3$

$$p_A(t) = (t-3)(t^2 - 8t - 71)$$

$$t_1 = 3$$

$$t_{2,3} = \begin{cases} 4 + \sqrt{87} \\ 4 - \sqrt{87} \end{cases}$$

Autovettori:

$$v_1 = \begin{cases} -8x - 7 - 2z = 0 \\ -x + 6y + 5z = 0 \end{cases} \Rightarrow x = 6y + 5z$$

$\nwarrow$ dipendente da $\underline{I}^o$ e $\underline{II}^o$

$$\Rightarrow \overset{7}{\cancel{48}}y + \overset{6}{\cancel{42}}z = 0$$

$$v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -7 \end{pmatrix}$$

$$v_{2,3} = \begin{cases} (9 \pm \sqrt{87})x + 7 + 2z = 0 \\ \underline{+x + (-5 \pm \sqrt{87}) - 5z = 0} \end{cases}$$

 $x = (5 \mp \sqrt{87})7 + 5z$

$$(-41 \mp 4\sqrt{87})7 + (47 \pm 5\sqrt{87})z = 0$$

$$7 = 47 \pm 5\sqrt{87}$$

$$z = 41 \pm 4\sqrt{87}$$

$$x = -200 \mp 22\sqrt{87}$$

e ottengo base ortog.

Potrei verificare (per controllo) che è base
ortogonale, ma so già (e i conti sono
facili) che lo è perché diagonalizza
matrice simmetrica con autovalori distinti.

10.2.2 Trovare autovalori e base ortogonale
di autovettori per:

$$A = \frac{1}{9} \begin{pmatrix} 12 & -6 & 6\sqrt{3} \\ -6 & -9 & -7\sqrt{3} \\ 6\sqrt{3} & -7\sqrt{3} & 5 \end{pmatrix}$$

(simmetrica)

$$P_A(t) = \begin{vmatrix} t - 3/2 & 3/4 & -3\frac{\sqrt{3}}{4} \\ 3/4 & t - 3/2 & 7\frac{\sqrt{3}}{8} \\ -3\frac{\sqrt{3}}{4} & 7\frac{\sqrt{3}}{8} & t - \frac{5}{8} \end{vmatrix} = \dots = 1$$

$$= t^3 - t^2 - 6t = t(t^2 - t - 6) =$$

$$= t(t+2)(t-3)$$

Autovalori . $\lambda_1 = 0$ $\lambda_2 = -2$, $\lambda_3 = 3$

Autovettori

$$v_1 : \begin{cases} 12x - 6y + 6\sqrt{3}z = 0 \\ -6x - 9y - 7\sqrt{3}z = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 1 \end{cases}$$

→ autovettori

Pourgo $\gamma = 1$ e risolviamo le prime
2 eq (poi normalizziamo)

$$\begin{cases} 12x + 6\sqrt{3}z = 6 \\ -6x - 7\sqrt{3}z = 9 \end{cases}$$

$$x = \frac{\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{3} \\ 9 & -7\sqrt{3} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 2 & \sqrt{3} \\ -6 & -7\sqrt{3} \end{vmatrix}} = 2$$

$$z = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -6 & 9 \end{vmatrix}}{-8\sqrt{3}} = -\sqrt{3}$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$ e 0-ovettore Normalizziamo

$$\sqrt{2^2 + 1^2 + 3} = 2\sqrt{2}$$

$$v_1 = \frac{1}{2\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ -\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$\lambda_2 = -2$$

$$-2I - A = \begin{pmatrix} -7/2 & 3/4 & -3\sqrt{3}/4 \\ 3/4 & -7/8 & 7\sqrt{3}/8 \\ -3\sqrt{3}/4 & 7\sqrt{3}/8 & -21/8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} -7/2 & 3/4 \\ 3/4 & -7/8 \end{vmatrix} = 5/2 \neq 0$$

Use 1^e & 2^e eq.

Poniamo $z=1$ e risolviamo il sistema

$$\Rightarrow (0, \sqrt{3}, 1) \Rightarrow \text{Normalizzato}$$

$$v_2 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 0 \\ \sqrt{3} \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\underline{OSS} \quad \langle v_1, v_2 \rangle = 0 \quad (A \text{ è simmetrica,}$$

con autovalori distinti $\Rightarrow$ la base che
diagonalizza A è ortogonale) —

Per trovare v_3 : ortogonale a v_1 e v_2 ,

(e unitario)

$$v_3 := v_1 \wedge v_2 = \frac{1}{4\sqrt{2}} \begin{pmatrix} 4 \\ -2 \\ 2\sqrt{3} \end{pmatrix}$$

$$|v_1 \wedge v_2| = \frac{1}{4\sqrt{2}} \sqrt{16 + 4 + 12} = \frac{\sqrt{32}}{4\sqrt{2}} = 1$$

10.2.3 Determinare i segni degli autovalori

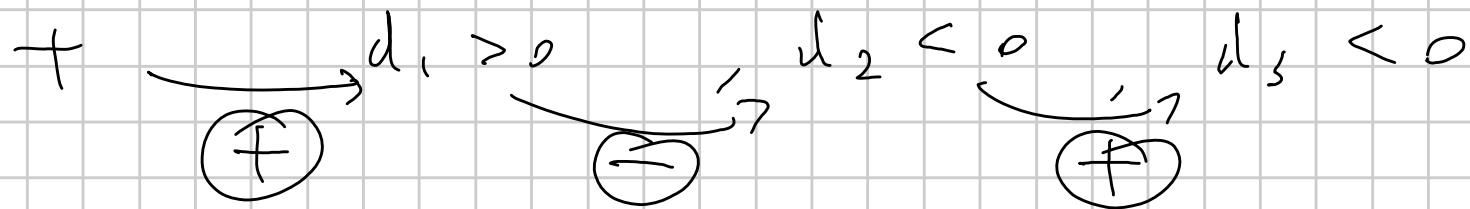
(a)
$$\begin{pmatrix} 3 & -2 & 2 \\ -2 & 1 & 5 \\ 2 & 5 & -3 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 3 > 0$$

$$d_2 = 3 - 4 = -1 < 0$$

$$d_3 = \det A = -116 < 0$$

contando i cambi di segno



2 entar. > 0

1 entar. < 0

(6)
$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 7 \\ 2 & -5 & 3 \\ 7 & 3 & -2 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = -1 < 0$$

$$d_2 = 1 > 0$$

$$d_3 = 236 > 0$$

Sequitur = — , — , +

10.2.4

$$(a) f(x, y) = x^2 \cdot \cos(xy) + 2y^2 - 3xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 \cos(xy) - 4xy \sin(xy) - x^2 y^2 \cos(xy)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -3x^2 \sin(xy) - x^3 y \cos(xy) - 3 = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -x^4 \cos(xy) + 4$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -3 \\ -3 & 4 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 2 > 0$$

$$d_2 = -1 < 0$$

non entro > 0 , non entro < 0

$\Rightarrow$ ne' massimo, ne' minimo (selle)

(10.2.5) $f(x, y) = x \log(1+y) + 3 \sin^2 y + x^2$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{1}{1+y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{-x}{(1+y)^2} - 6 \sin^2 y + 6 (-)^2 y$$

$$H_f(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$d_1 = 2 > 0$$

$$d_2 = 10 > 0$$

2 entries $> 0 \Rightarrow (0,0)$ minima relative