

Geometrie 20/4/17

10.1.9 (8)

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3/2 \\ -10 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t+1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & t & 0 & -3/2 \\ 10 & 0 & t-1 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & t \end{pmatrix}$$

↑

$$= (t+1) \det \begin{pmatrix} t & 0 & -3/2 \\ 0 & t-1 & 0 \\ 2 & 0 & t \end{pmatrix} + 10 \det \begin{pmatrix} 0 & -1 & 0 \\ t & 0 & -3/2 \\ 2 & 0 & t \end{pmatrix}$$

$$= (t+1)(t-1)(t^2+3) + 10(t^2+3)$$

$$= (t^2+3)(t^2-1+10) = (t^2+3)(t^2+9)$$

Non ha radici reali $\Rightarrow$ su $\mathbb{R}$ non diago.

Su $\mathbb{C}$: $\pm i\sqrt{3}, \pm 3i$ distinte

$\Rightarrow$ $\bar{c}$ diago.

$$(i) \begin{pmatrix} 2k-1 & 2-k \\ 2k+1 & -k \end{pmatrix}$$

Per una 2×2 , casi:

$\lambda_{1,2}$ non reali $\Rightarrow$ no diag su $\mathbb{R}$

$\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow$ è diagonalizzabile

$\lambda_1 = \lambda_2 \Rightarrow$ o è già diagonale o
non è diagonalizzabile

$$P_A(t) = t^2 - (k-1)t + (-2k^2 + k - 4k - 2 + 2k^2 + k)$$

$$= t^2 - (k-1)t - 2(k+1)$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \lambda_2 = -2(k+1) \\ \lambda_1 + \lambda_2 = k-1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = -2 \\ \lambda_2 = k+1 \end{cases}$$

Se $k \neq -3$ è diagonalizzabile.

Se $k = -3$ ho $A = \begin{pmatrix} -7 & 5 \\ -5 & 3 \end{pmatrix}$

non è diagonale $\Rightarrow$ non è diagonalizzabile.

$$(i) \quad A = \begin{pmatrix} 2-k & 3k-2 \\ 1 & 2k-1 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \lambda_1 \cdot \lambda_2 = 4k-2 - 2k^2 + k - 3k + 2 = -2k^2 + 2k \\ \lambda_1 + \lambda_2 = k+1 \end{cases} = 2k(-k+1)$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \lambda_1 = 2k \\ \lambda_2 = 1-k \end{cases}$$

[Se um von beiden:]

$$P_A(t) = t^2 - (k+1)t + 2k(1-k)$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(k+1 \pm \sqrt{k^2 + 2k + 1 - 8k + 8k^2} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(k+1 \pm \sqrt{9k^2 - 6k + 1} \right)$$

$$= \frac{1}{2} \left(k+1 \pm (3k-1) \right) = \left[\begin{array}{l} \frac{1}{2} (4k) = 2k \\ \frac{1}{2} (2-2k) = 1-k \end{array} \right]$$

Se $2k \neq 1-k$, cioè $k \neq 1/3$ è diagonalizzabile.

Se $k = 1/3$, $A = \begin{pmatrix} \cdot & \cdot \\ 1 & \cdot \end{pmatrix}$

non è diagonale $\Rightarrow$ non è diagonalizzabile.

$$(k) \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & k \\ -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-1 & 0 & -1 \\ 0 & t-1 & -k \\ 2 & -2 & t-1 \end{pmatrix}$$

$$= (t-1)^3 + 0 + 0 + 2(t-1) + 0 - 2k(t-1)$$

$$= (t-1) (t^2 - 2t + 1 + 2 - 2k)$$

$$= (t-1) (t^2 - 2t + 3 - 2k)$$

$$\lambda_1 = 1$$

$$\lambda_{2,3} = 1 \pm \sqrt{1 - 3 + 2k} = 1 \pm \sqrt{2(k-1)}$$

Se $k < 1$ autovel non tutti reali ma
 distinti $\Rightarrow$ non diago su $\mathbb{R}$,
 diago su $\mathbb{C}$

$$\text{Se } k = 1, \quad \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 1$$

A non è già^c diagonale $\Rightarrow$ non è diagonalizzabile.

Se $k > 1$, $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ distinti tra loro
 $\Rightarrow$ E diagonalizzabile.

$$(l) \quad A = \begin{pmatrix} 2 & 2(k-1) & 1-k \\ -k-4 & 2k-9 & 4-k \\ -2(k+4) & 2(k-7) & 6-k \end{pmatrix}$$

$$P_A(t) = \det(t \cdot I_3 - A).$$

ATTENZIONE: posso usare operazioni

sulle righe e sulle colonne di A per calcolare $\det(A)$; posso anche usare su $t \cdot I_3 - A$ per calcolare $\det(t \cdot I_3 - A)$; INVECE

è sbagliato fare con:

$A \xrightarrow{\text{operaz su righe e col}} A'$

$$\cancel{P_A(t) = \det(t \cdot I_3 - A')}$$

No

$$p_A(t) = \det \begin{pmatrix} t-2 & 2(1-k) & k-1 \\ k+4 & t-2k+9 & k-4 \\ 2(k+4) & -2k+14 & t+k-6 \end{pmatrix}$$

Con Sarrus $2 \times 3 \times 3 + 2^3 + 2 \times 2 \times 3 \dots$
 $=$ un sacco di addendi

Guvea:

$$C_{II} \sim P C_{II} + 2 \cdot C_{III}$$

$$= \det \begin{pmatrix} t-2 & 0 & k-1 \\ k+4 & t+1 & k-4 \\ 2(k+4) & 2t+2 & t+k-6 \end{pmatrix}$$

$$= (t+1) \det \begin{pmatrix} t-2 & 0 & k-1 \\ k+4 & 1 & k-4 \\ 2(k+4) & 2 & t+k-6 \end{pmatrix}$$

$$R_{III} \rightsquigarrow R_{III} - 2R_{II}$$

$$= (t+1) \det \begin{pmatrix} t-2 & 0 & k-1 \\ k+4 & 1 & k-4 \\ 0 & 0 & t-k+2 \end{pmatrix}$$

$$= (t+1)(t-k+2)(t-2)$$

$$\lambda_1 = -1$$

$$\lambda_2 = 2$$

$$\lambda_3 = k-2$$

$$\lambda_1 \neq \lambda_2 \quad \text{Scaryne}$$

$$\lambda_1 = \lambda_3 \quad \text{per} \quad k = 1$$

$$\lambda_2 = \lambda_3 \quad \text{per} \quad k = 4$$

Se $k \neq 1, k \neq 4$ autoval. distinti

$\Rightarrow$ è diagonalizzabile

Per $k = 1$ ho autoval. $-1, 2$ con

$$\text{m.a.}(-1) = 2$$

$$\text{m.e.}(2) = 1 \Rightarrow \text{m.g.}(2) = 1$$

Deriv. stabilizării $\approx$ 1 (A nondiagonal)

m.g. (-1) $\begin{cases} 1 \\ 2 \end{cases}$ (A $\bar{e}$ diagonal)

$$A|_{k=1} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -5 & -7 & 2 \\ -10 & -12 & 15 \end{pmatrix}$$

$$m.g(-1) = \dim \text{Ker}(-1 \cdot I_3 - A|_{K=1})$$

$$= 3 - \text{rank}(-1 \cdot I_3 - A|_{K=1})$$

$$= 3 - \text{rank}(I_3 + A|_{k=1})$$

$$= 3 - \text{rank} \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ -5 & -6 & 3 \\ -10 & -12 & 6 \end{pmatrix}$$

qui devo avere $\det = 0$
(altrimenti -1 non sarebbe autovel.)

$$= 3 - 2 = 1 \Rightarrow A \text{ non diagon}_-$$

Per $k=4$ ho autovel $-1, 2$ con

$$\mu.q.(-1) = 1 \Rightarrow \mu.p.(-1) = 1 \quad \checkmark$$

$$\mu.q.(2) = 2$$

$$A|_{k=4} = \begin{pmatrix} 2 & 6 & -3 \\ -8 & -1 & 0 \\ -16 & -6 & 2 \end{pmatrix}$$

$$\mu.q.(2) = \dim \operatorname{Ker} (2 \cdot I_3 - A|_{k=4})$$

$$= 3 - \operatorname{rank} (A|_{k=4} - 2I_3)$$

$$= 3 - \operatorname{rank} \begin{pmatrix} 0 & 6 & -3 \\ -8 & -3 & 0 \\ -16 & -6 & 0 \end{pmatrix}$$

deve avere $\text{def} = 0$ ✓

$= 3 - 2 = 1 \Rightarrow A$ non diagonalizzabile.

R relaz. su X è di equivalenza se :

R riflessiva : $x R x \quad \forall x$

R simmetrica : $x R y \Rightarrow y R x$

R transitiva : $x R y, y R z \Rightarrow x R z$

Def: chiamo classe di equivalenza di $x \in X$
 $[x] = \{y : y R x\}$.

Es: $X = \text{uoi}$
 $x R y$ se y ha le stesse iniziali
del nome di x .

Prop: le classi di equivalenze sono una
partizione di X cioè ogni elemento di X

appartiene a qualche classe e due classi
o coincidono o sono disgiunte.

Dim: $x \in [x]$ poiché xRx (rifl). ✓

Supponiamo $[x] \cap [y] \neq \emptyset$; cioè

$\exists z \in [x] \cap [y]$, cioè

$\exists z$ t.c. zRx e zRy

$\Rightarrow$ per la simm ha xRz e zRy

$\Rightarrow$ per la trans. ho $x R y$

(e anche, per la simm., $y R x$).

Facile ora vedere che $[x] = [y]$. 

Def: se $\sim$ è una relazione di equiv.
su X chiamo insieme quoziente $X/\sim$
l'insieme delle classi di equivalenza.

Es: X = mazzo di carte da 52
 $\sim \equiv$ "avere lo stesso repes"

$X/\sim$ ha 4 elementi; ciascuno
è un mazzo di 13 carte

Es: X = mazzo da 52
 $\sim \equiv$ "avere lo stesso numero"

$X/\sim$ ha 13 elementi, ognuno un
mazzo da 4.

Q : come descrivere un insieme quoziente?

A1) Scegliere un insieme di rappresentanti
(un elemento per ogni classe di equiv).

Es : $X =$ gli stud. di iur. di Pisa
 $\sim$ = essere iscritti allo stesso CdL

$X/\sim$ posso descriverlo scegliendo uno
studente per ogni CdL

(da mandare come rappresentante
nel Consiglio della Scuola)

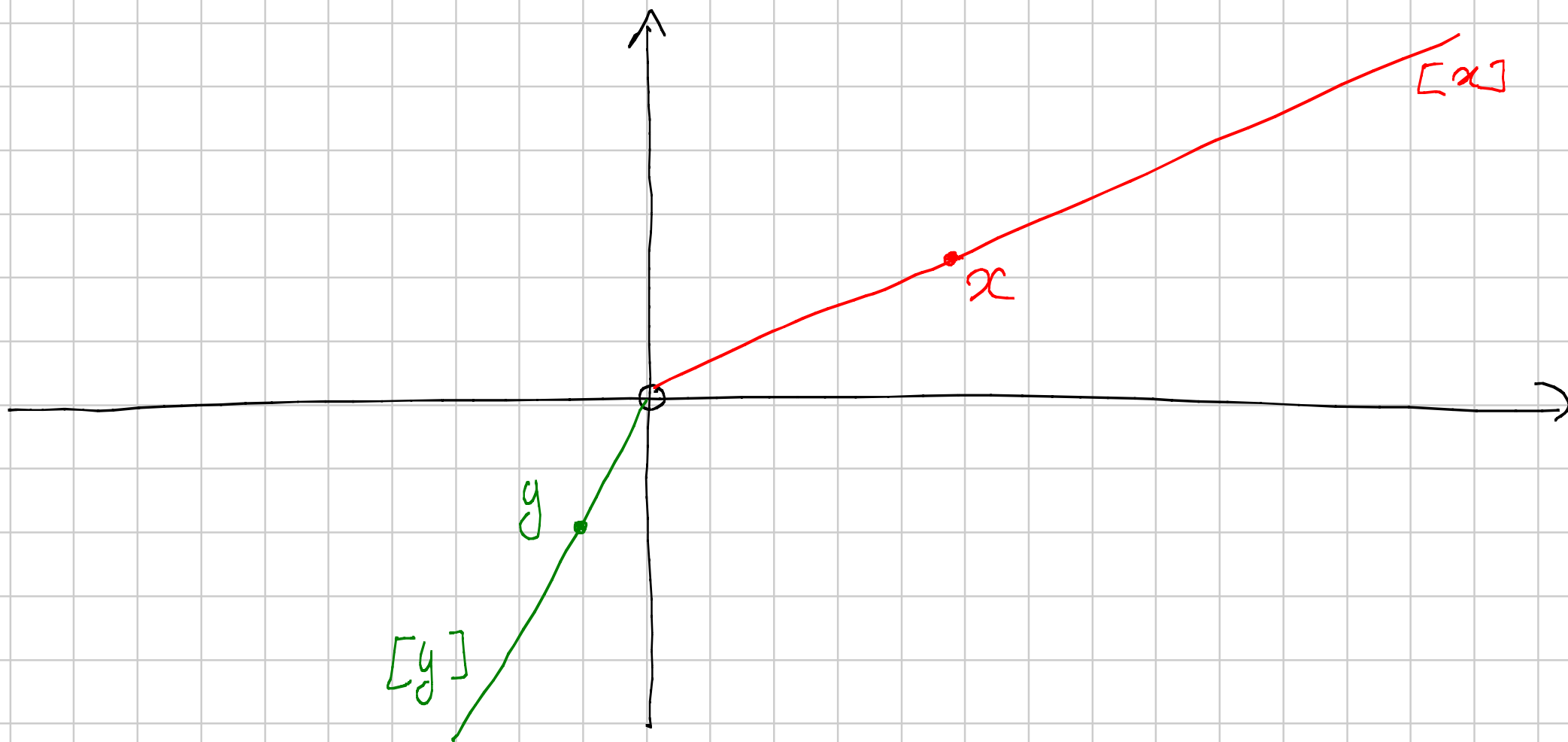
A2) Es: $X = \text{noi}$ $N = \text{stima iniz. nome}$.

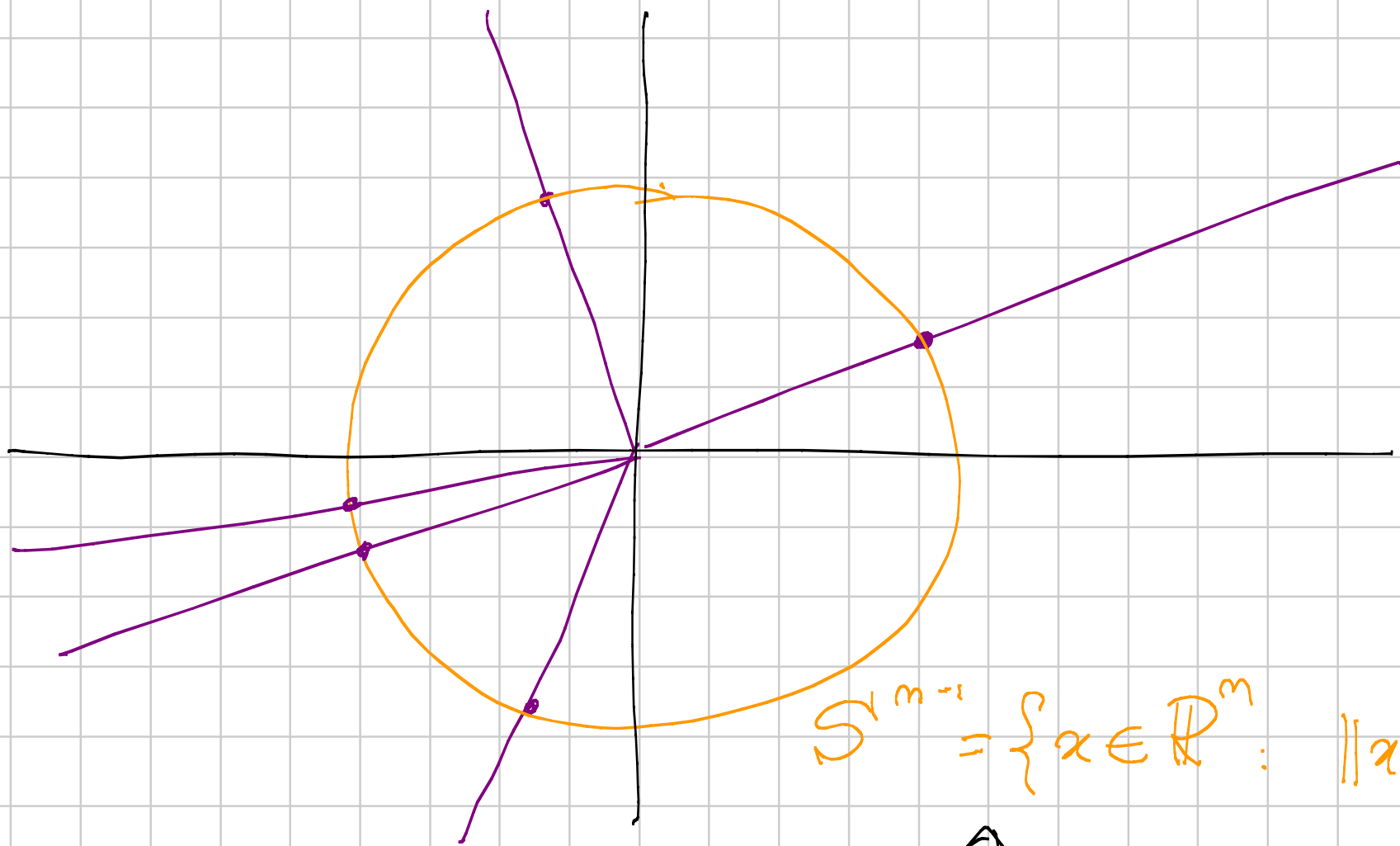
Dare un nome (diverso) a ogni classe di equiv.:

$$X/n \leftrightarrow \{A, B, C, F, \dots\}$$

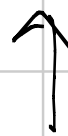
$$\text{Es: } X = \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$$

$$\sim : x \sim y \text{ se } \exists \lambda > 0 \text{ t.c. } y = \lambda \cdot x$$





$$S^{m-1} = \{x \in \mathbb{R}^m : \|x\| = 1\}$$

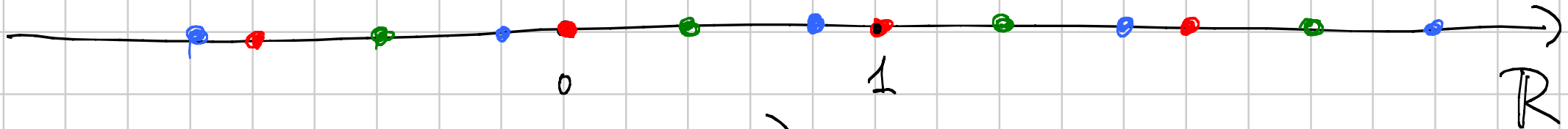


è un insieme di rappresentanti
 per X/n = l'insieme delle

seminario.

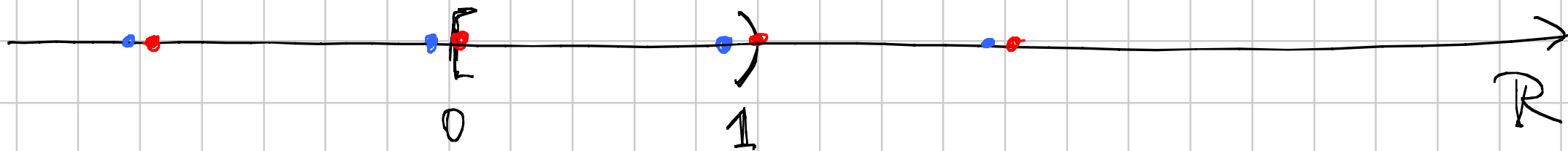
Es: $X = \mathbb{R}$, $x \sim y$ se $y - x \in \mathbb{Z}$.

$X/\sim$ ha come insieme di rappresentanti...



$[0, 1)$

P_{eq}^c :



Usando $[0, 1)$ como representação de um
 número $1 - \varepsilon$ com $\varepsilon \ll 1$ se encontra
 bastante perto de 0, invece $[1 - \varepsilon]$ é
 muito próximo a $[0]$.

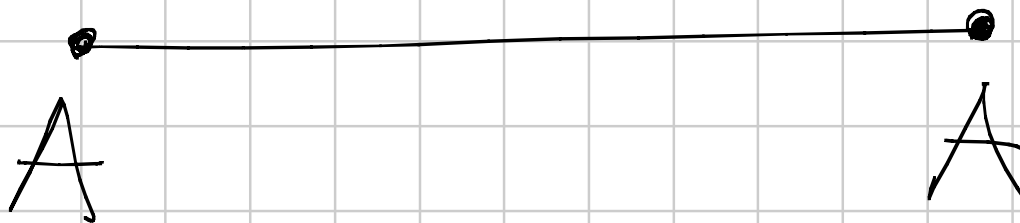
A3)

Prendere un insieme quoziente
sufficientemente abbondante e ricordarsi
delle ident. & proiezioni -

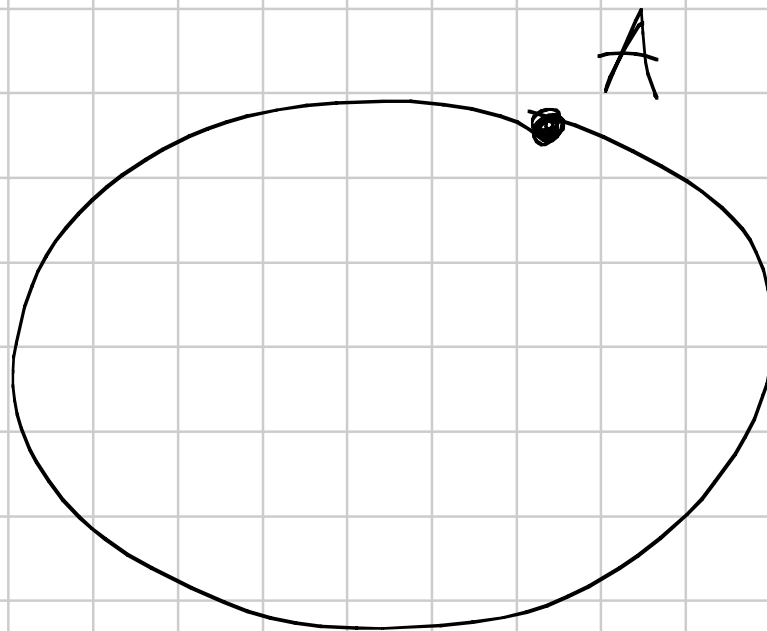
Per noi: come rappresentante di $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

prendo $[0, 1]$ in cui mi ricordo
però che $0 \sim 1$; dunque

$\mathbb{R}/\mathbb{Z} =$



$=$



Def

Chiamo proiezione nel quoziente la mappa

$$\pi: X \longrightarrow X/\sim$$

$$x \longmapsto [x]$$

Es: $X = \text{noi}$ $\sim = \text{stesse iniziali}$

$$\pi(\text{Carlo}) = C$$

(se decido di descrivere

$$X/\sim = \{A, B, C, F, \dots\})$$

Def: se $K = \mathbb{R} \text{ o } \mathbb{C}$ chiamo

$\mathbb{P}^n(K)$

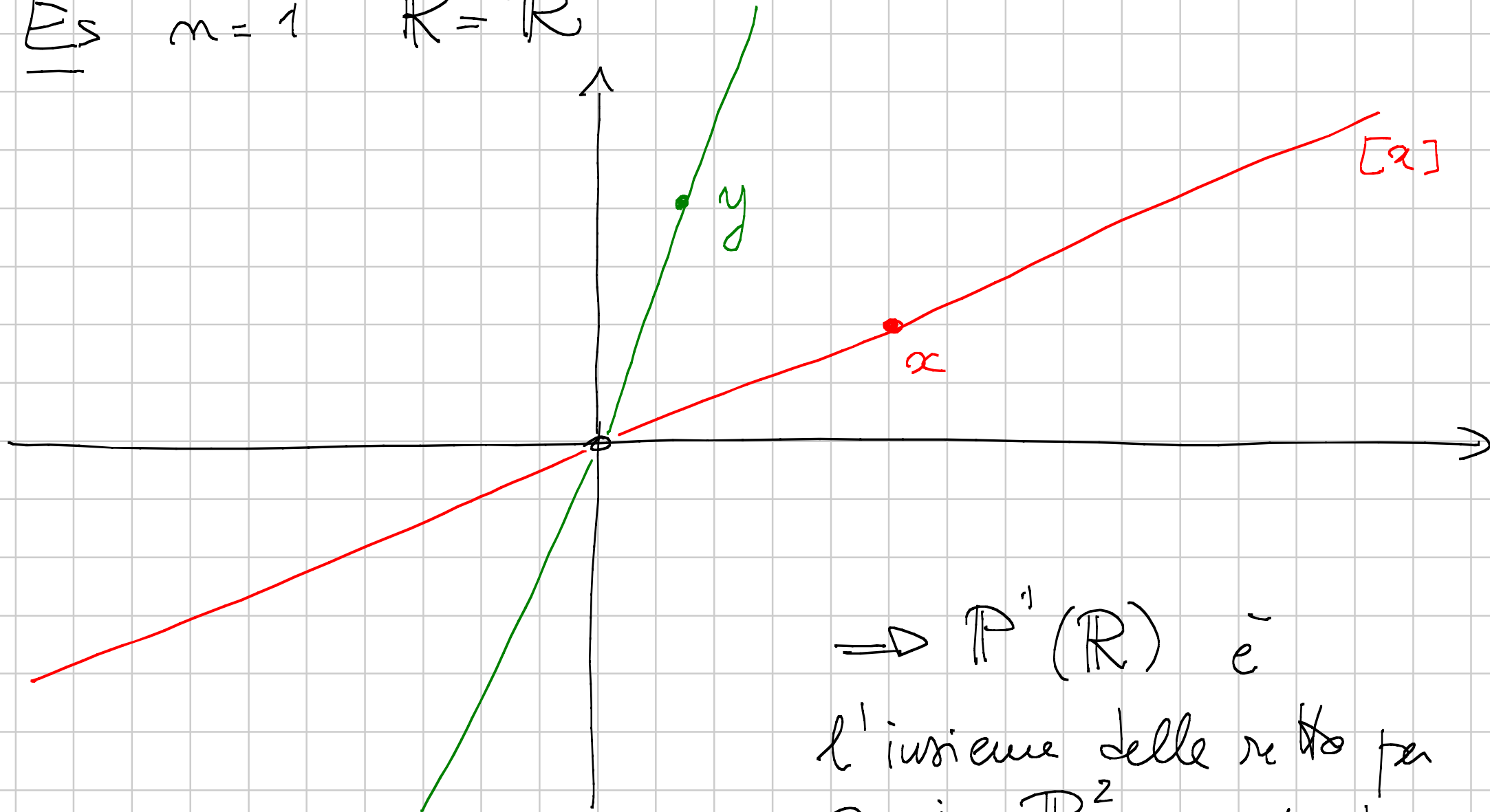
spazio proiettivo n -dim.
sul campo K

il quoziente di $K^{n+1} \setminus \{0\}$

rispetto alla $\sim$ data da

$x \sim y$ se esiste $\lambda \neq 0$ t.c. $y = \lambda \cdot x$.

$\mathbb{P}^1$ $n=1$ $\mathbb{K}=\mathbb{R}$

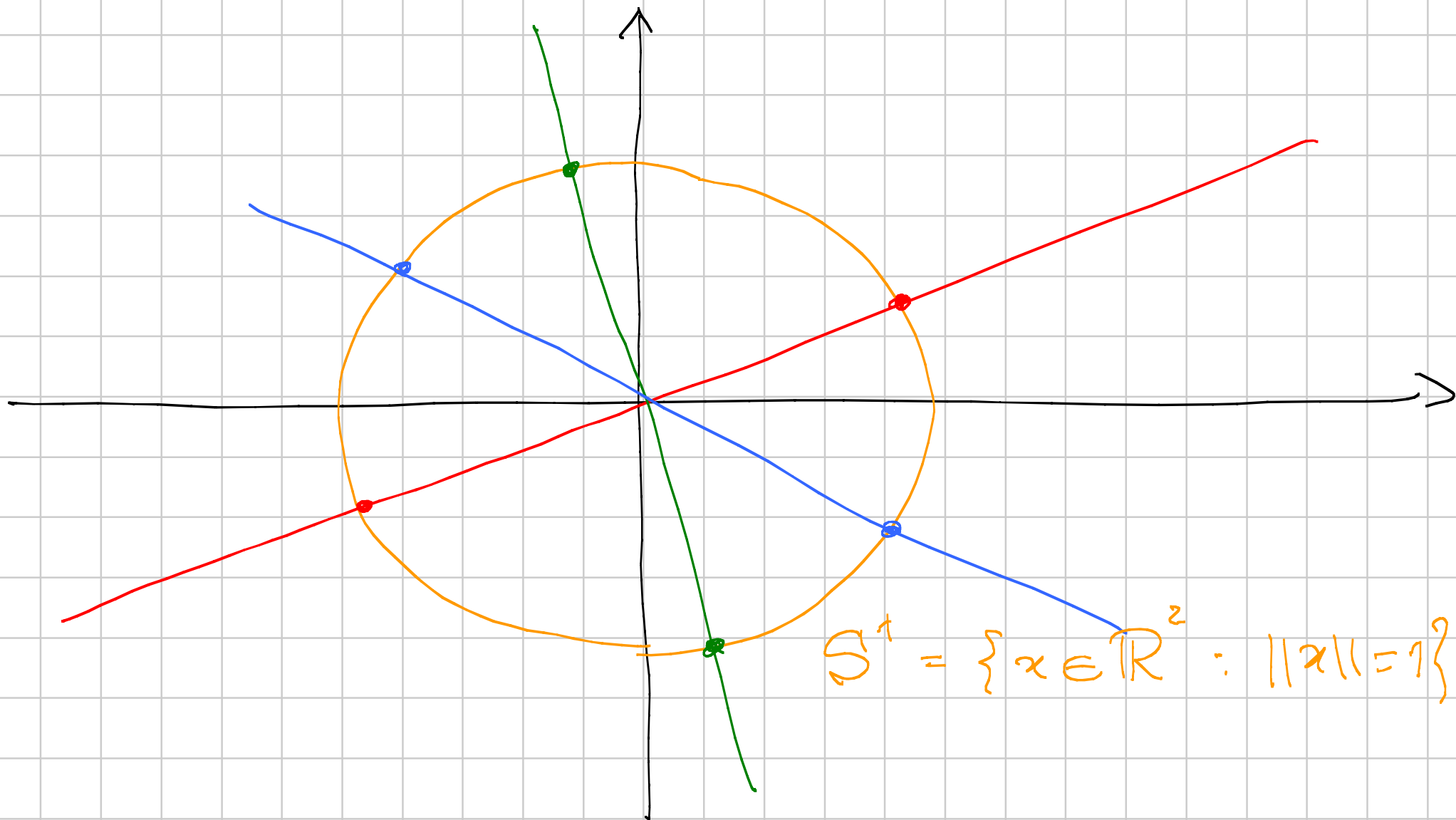


$\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ è
l'insieme delle rette per
0 in $\mathbb{R}^2$ privato di 0

$\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si identifica all'insieme
delle rette in $\mathbb{R}^2$

(segue vero: $\mathbb{P}^n(\mathbb{R})$ "e" l'insieme
delle rette in $\mathbb{R}^{n+1}$) _

Come descrivere $\mathbb{P}^1(\mathbb{R})$?



S^1 in $\mathbb{R}^2$ consists of the points x such that $\|x\| = 1$ in two parts

antipodali $\Rightarrow \mathbb{P}^1(\mathbb{R})$ si ottiene da $\mathbb{S}^1$
 identificando i due loro punti antipodali

