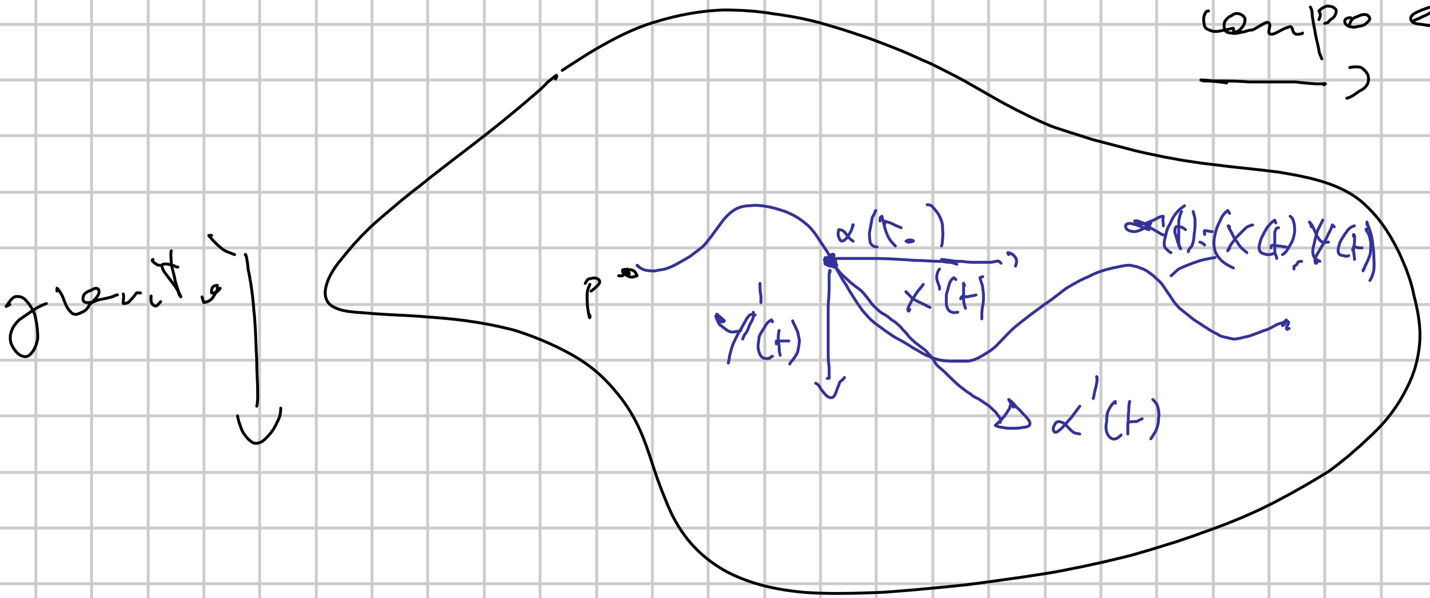
Geom 17/5/2017

Integrali su curve

campo elettrico ⟶

p. particella con massa e carica



calcoliamo il lavoro associato allo spostamento

Lavoro infinitesimo

$$f(\alpha(t)) \cdot \underbrace{x'(t)\,dt} + g(\alpha(t)) \cdot \underbrace{y'(t)\,dt}$$

intensità campo elettrico in $\alpha(t)$

spostamento infinitesimo orizzontale

intensità di gravità in $\alpha(t)$

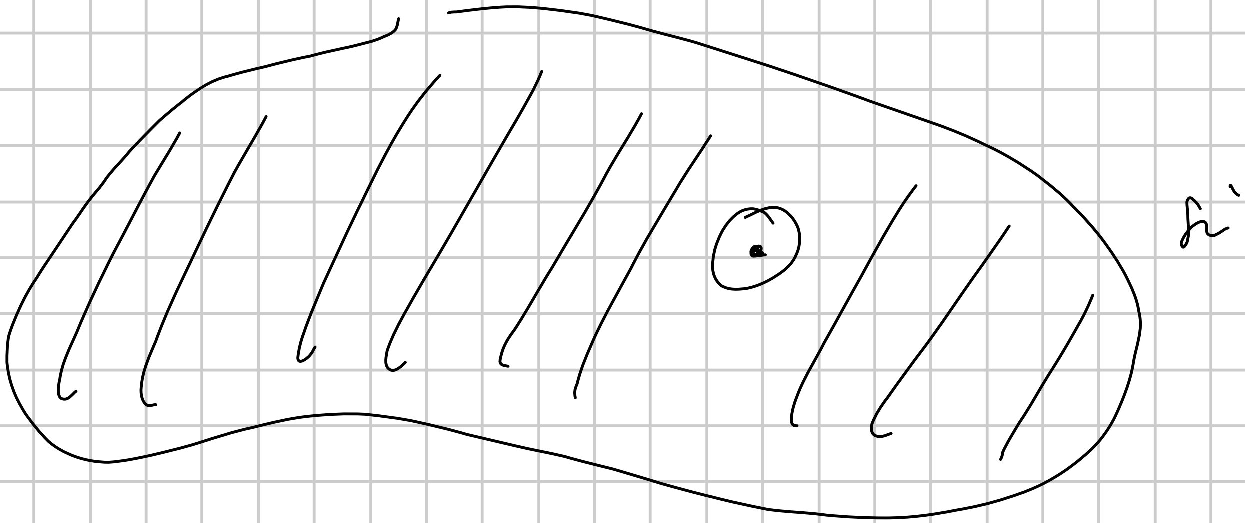
spostamento infinitesimo verticale

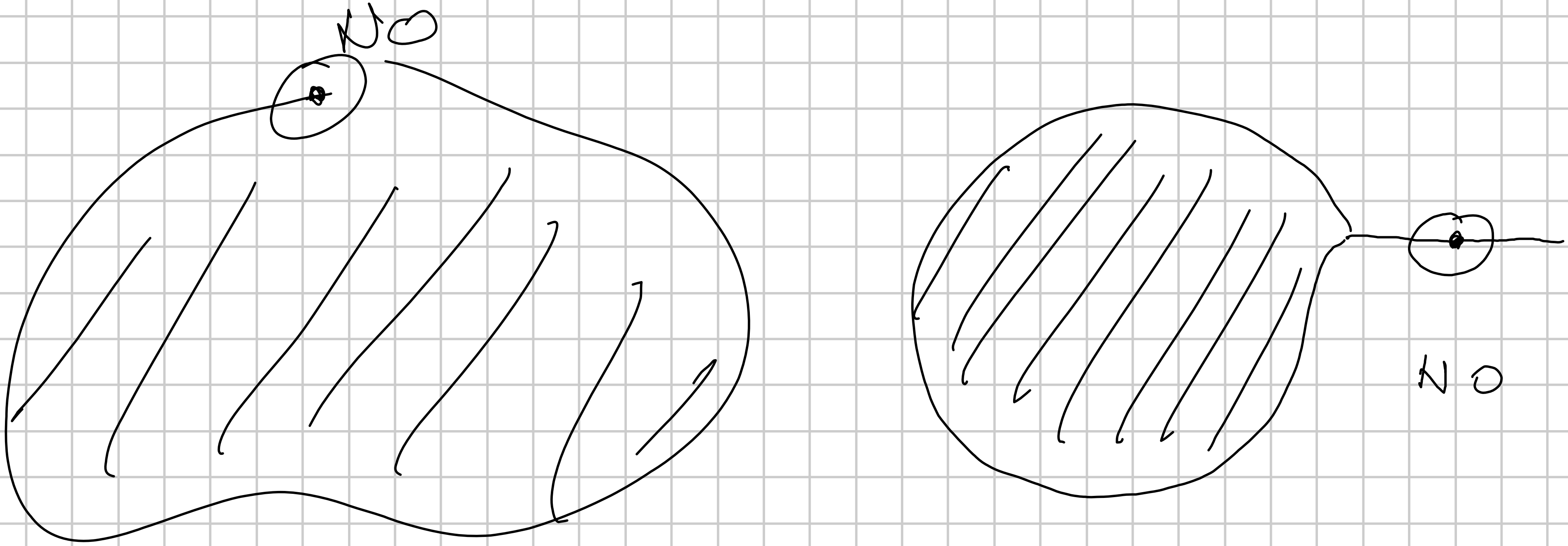
$\Rightarrow$ Lavoro totale $\displaystyle\int_a^b \Big(f(\alpha(t)) \cdot x'(t) + g(\alpha(t)) \cdot y'(t) \Big)\, dt$

Def $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ aperto se $p \in \Omega$

$\exists\, r > 0$ t.c. disco di centro p e

raggio r sta in Ω





Def se $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ è aperto chiamo 1-forma su Ω l'oggetto

$$\omega = f \cdot dx + g \cdot dy$$

$$\left(\omega(x,y) = f(x,y) \cdot dx + g(x,y) \cdot dy \right)$$

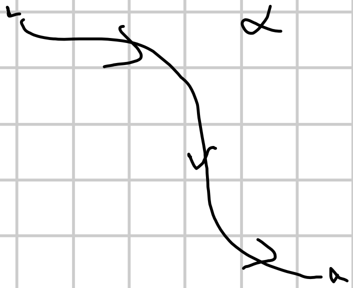
Se $\alpha : [a,b] \longrightarrow \Omega$ è curva $\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}$

definisco integrale ω su α

$$\int_\alpha \omega = \int_a^b \Big(f(\alpha(t)) \cdot X'(t) + g(\alpha(t)) Y'(t) \Big) dt$$

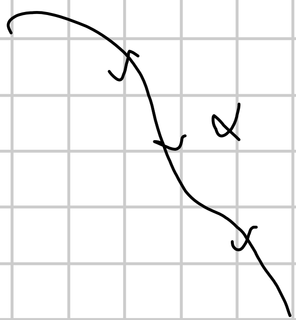
Prop $\int_\alpha \omega$ non cambia se riparametrizzo α mantenendo l'orientazione, cambia segno se cambio orientaz. di α.

$\downarrow \gamma$

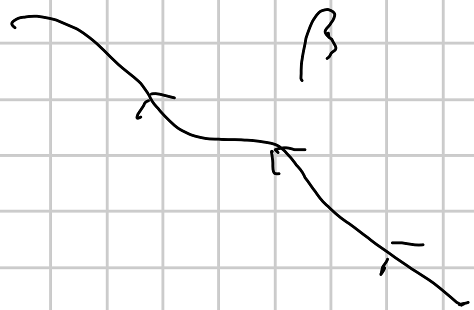


$\int_\alpha g\,dx$ non dipende dalla legge di percorrenza

$\gamma \downarrow$

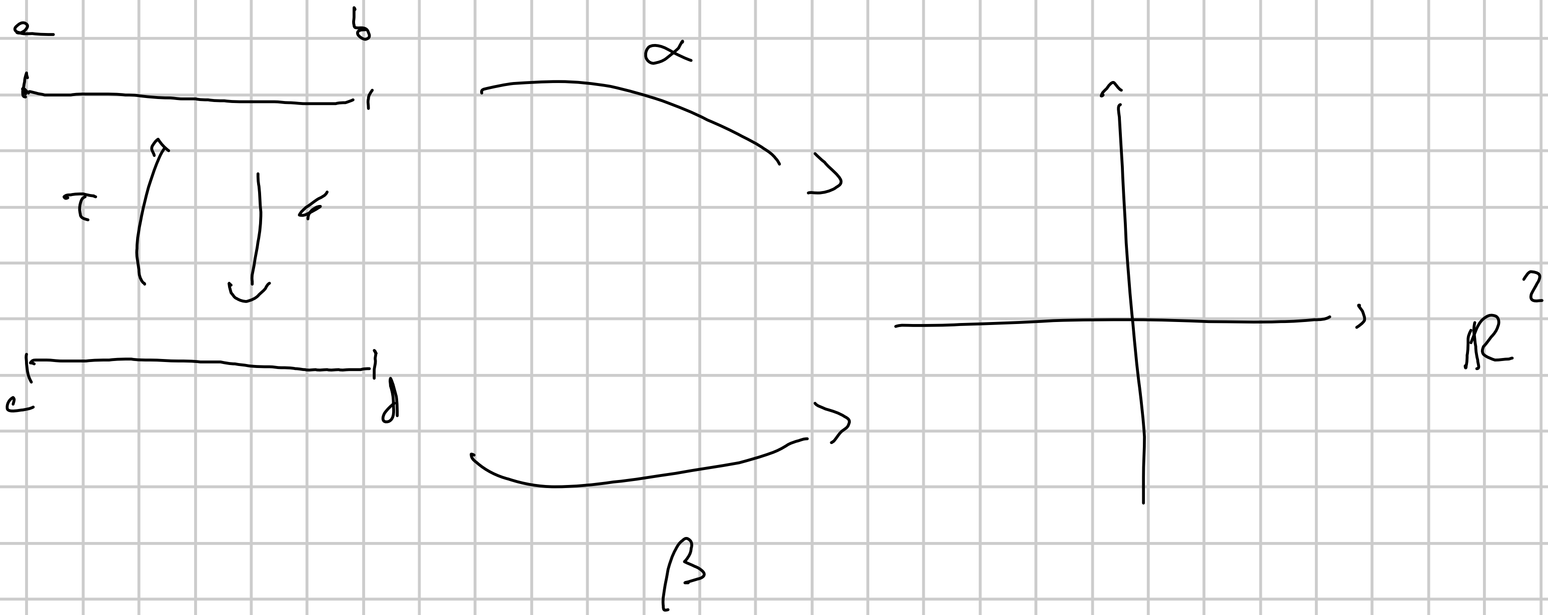


$\gamma \downarrow$



$$\int_\alpha \omega = - \int_\beta \omega$$

__Dim__



$$\beta(s) = \alpha(\tau(s))$$

ovvero $\alpha(t) = \beta(\sigma(t))$ $\qquad \sigma = \tau^{-1}$

$$\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \beta = \begin{pmatrix} z \\ u \end{pmatrix}$$

$$\int_\beta \omega = \int_c^d \left(f(\beta(s)) \cdot z'(s) + g(\beta(s)) \, u'(s) \right) ds$$

$$\beta(s) = \alpha(\tau(s)) \qquad z(s) = x(\tau(s))$$

$$z'(s) = x'(\tau(s)) \, \tau'(s)$$

$$u(s) = y(\tau(s)) \qquad u'(s) = y'(\tau(s)) \, \tau'(s)$$

$$\Rightarrow \int_\beta \omega = \int_c^d \left(f(\alpha(\tau(s))) \cdot x'(\tau(s)) + g(\alpha(\tau(s))) \cdot y'(\tau(s)) \right) \tau'(s) \, ds$$

posso fare un cambio di variabili $t = \tau(s)$

$[c,d]$ si trasforma in $[a,b]$

$$\Rightarrow \underbrace{\operatorname{sgn}(\tau'(s))}_{\text{(costante)}} \cdot \underbrace{\int_a^b \left(f(\alpha(t))\cdot x'(t) + g(\alpha(t))\,y'(t)\cdot\right) dt}_{\int_\alpha \omega}$$

± 1

a seconda se τ

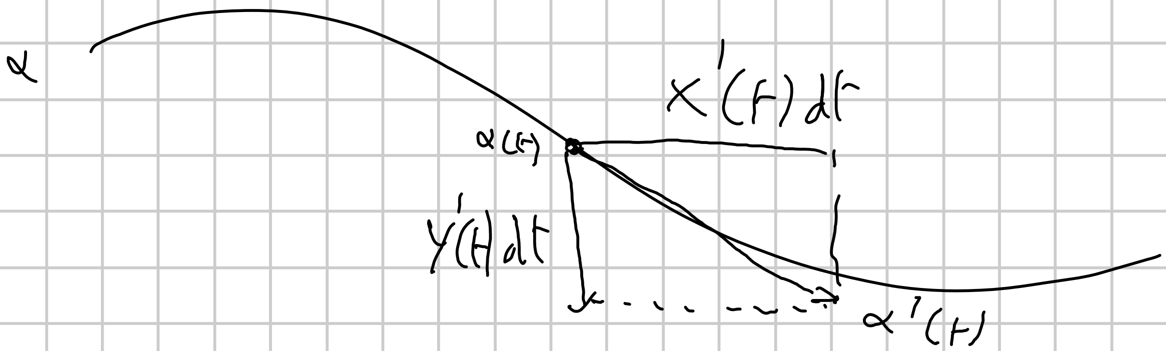
mantiene o inverte orientazione _

In fisica una forza è <u>conservativa</u> è una forza t.c il lavoro dipende solo dagli estremi dello spostamento. Sono conservative quelle forze che hanno un <u>potenziale</u>

lavoro lungo una curva α = differenza di potenziale tra estremi di α

Consideriamo $U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ (potenziale)

Lavoro infinitesimo fatto dalla forza associata al potenziale U lungo una curva $\alpha = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ è :



lavoro infinitesimo

$$\underbrace{\frac{\partial U}{\partial x}(\alpha(t)) \cdot X'(t)\,dt}_{\text{lavoro infinitesimo nella dir. orizz.}} + \underbrace{\frac{\partial U}{y}(\alpha(t)) \cdot Y'(t)\,dt}_{\text{lavoro inf. nella dir. verticale}}$$

lavoro totale

$$\int_a^b \left(\frac{\partial U}{\partial x}(\alpha(t)) \cdot X'(t) + \frac{\partial U}{\partial y}(\alpha(t)) \cdot Y'(t) \right) dt$$

Def $\quad dU = \frac{\partial U}{\partial x} dx + \frac{\partial U}{\partial y} \cdot dy$

Questo è il lavoro fatto $\to \int_{\alpha} dU$

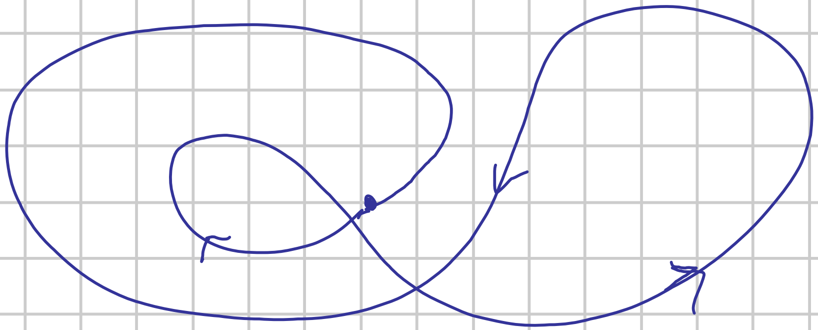
e mostriamo che è uguale alla diff. di potenziale;

Dim $\quad \int_{\alpha} dU = \int_a^b \underbrace{\left(\frac{\partial U}{\partial x} (x(t), y(t)) \cdot x'(t) + \frac{\partial U}{\partial y} (x(t), y(t)) \cdot y'(t) \right)}_{\frac{d}{dt} \left(U(x(t), y(t)) \right)} dt =$

$= \int_a^b \frac{d}{dt} U(x(t), y(t))\, dt =$

$$= U(\alpha(t))\Big|_{t=a}^{t=b} = U(\underbrace{\alpha(b)}_{\text{p.to finale}}) - U(\underbrace{\alpha(a)}_{\text{p.to iniziale}})$$

Così se α è curva chiusa, cioè $\alpha(a) = \alpha(b)$



allora

$$\int_\alpha dU = 0$$

Def chiamo $\omega = f\,dx + g\,dy$ su $\Omega \subset \mathbb{R}^2$
esatta se $\exists\ U : \Omega \to \mathbb{R}$ t.c. $\omega = dU$

cioè se $f = \frac{\partial U}{\partial x}$ e $g = \frac{\partial U}{\partial y}$

OSS se ω è esatta $\omega = f\,dx + g\,dy$ allora

$$\left.\begin{aligned} \frac{\partial g}{\partial x} &= \frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial U}{\partial y} = \frac{\partial^2 U}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial U}{\partial x} = \frac{\partial^2 U}{\partial y \partial x} \end{aligned}\right\} \text{sono uguali}$$

Quindi ω può essere esatta solo a questa condizione (NECESSARIA, in generale NON SUFFICIENTE):

$$\boxed{\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}}$$

Se ciò accade dico che ω è chiusa

Riassumiamo $\omega = f\,dx + g\,dy$

- esatta se $\omega = dU$, cioè $f = \frac{\partial U}{\partial x}$, $g = \frac{\partial U}{\partial y}$
- chiusa se $\frac{\partial g}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial y}$

Fatto esatta $\Longrightarrow$ chiusa

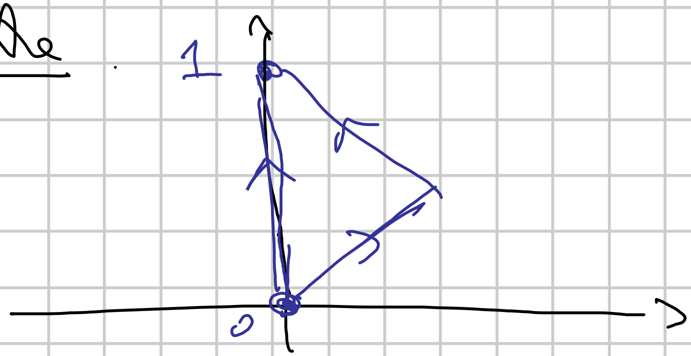
Esempio $\omega = x\,dy = \underset{f(x,y)}{\underset{\shortparallel}{0}} \cdot dx + \underset{g(x,y)}{\underset{\shortparallel}{x}} \cdot dy$

$\frac{\partial g}{\partial x} = 1 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 0$

$\Rightarrow$ questa ω non è chiusa

$\Rightarrow$ non è esatta.

Potevo vedere anche in un altro modo che non è esatta.



$$\alpha(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ t \end{pmatrix} \qquad t \in [0,1]$$

$$\beta(t) = \begin{cases} \begin{pmatrix} t \\ t \end{pmatrix} & t \in [0, \frac{1}{2}] \\ \begin{pmatrix} 1-t \\ t \end{pmatrix} & t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

$$\int_\alpha x\,dy = \int_0^1 0 \cdot 1 \cdot dt = 0$$

$$\int_\beta x\,dy = \int_0^{1/2} t \cdot dt + \int_{1/2}^1 (1-t)\,dt =$$

$$= \frac{t^2}{2}\Big|_0^{1/2} - \left(t - \frac{t^2}{2}\right)\Big|_{1/2}^1 =$$

$$= 1/8 + 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4} \neq 0$$

Q : come capisco se una certa ω è <u>esatta</u>?

Il fatto che ω sia <u>chiusa</u> non basta a garantire che sia esatta.

<u>Teorema</u> ω su Ω è esatta

$$\Updownarrow$$

data $\alpha : [a,b] \to \Omega$

$\int_\alpha \omega$ dipende <u>solo</u> da $\alpha(a)$, $\alpha(b)$

Dim $\Downarrow$ visto prima

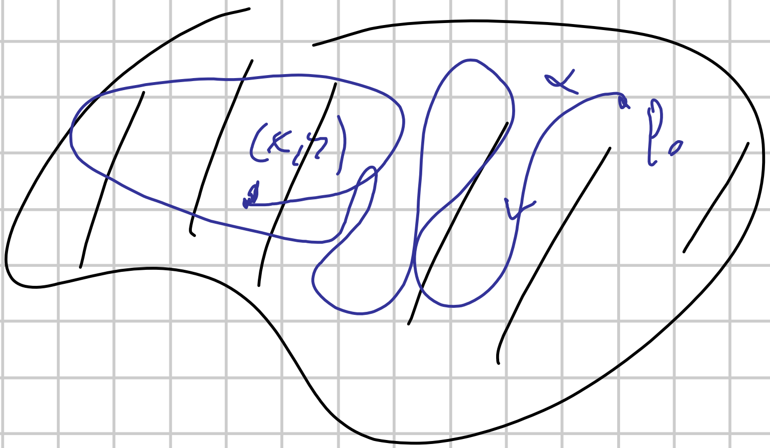
$\Uparrow$ Devo "trovare" il potenziale U ;

voglio che $\int_\alpha \omega = U(\alpha(b)) - U(\alpha(a))$

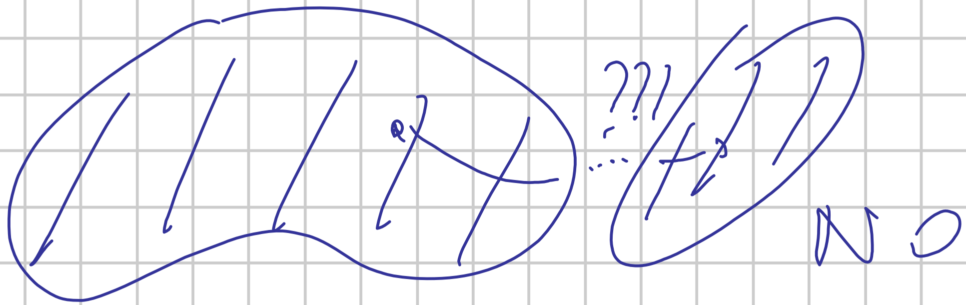
Fisso $p_0 \in \Omega$ e definisco

$U : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ come segue :

$U(x,y) = \int_\alpha \omega$ α è qualsiasi curva che unisce p_0 a (x,y)



NOTA non vanno bene aperti non connessi

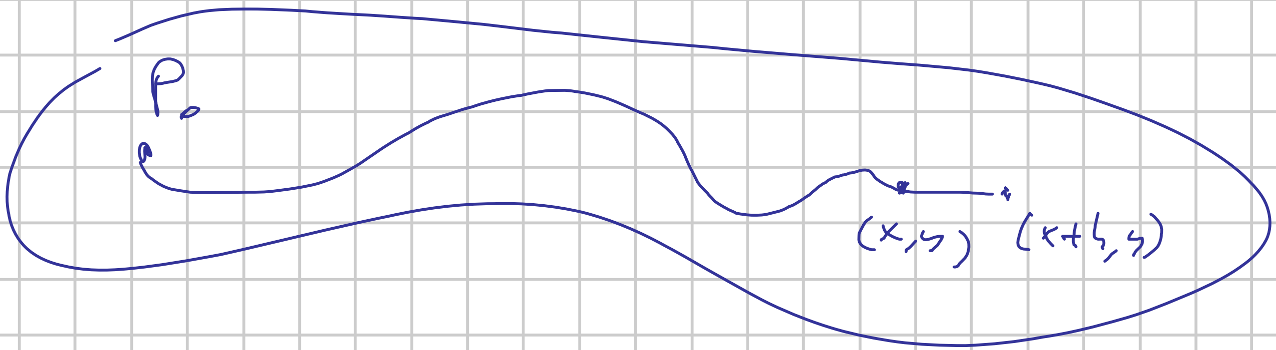


Per semplicità assumo che ω è sempre connesso

So che $\int_\alpha \omega$ dipende solo dagli estremi $\Rightarrow$ la def ha senso -

Devo provare $\frac{\partial U}{\partial x} = f$, $\frac{\partial U}{\partial y} = g$

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = \lim_{h \to 0} \frac{U(x+h,y) - U(x,y)}{h}$$



Come β tra P_0 e $(x+h, y)$ scelgo α del segmento $[x, x+h] \times \{y\}$ parametrizzato da $\sigma = (x+t, y)$ $t \in [0,h]$

$$\Rightarrow \frac{U(x+h,y) - U(x,y)}{h} = \frac{\cancel{\int_\alpha \omega} + \int_\sigma \omega - \cancel{\int_\alpha \omega}}{h} =$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^h \Big(f(x+t,y) \cdot 1 + g(x+t,y) \cdot 0 \Big) \, dt =$$

$$= \frac{1}{h} \int_0^h f(x+h,y) \, dt \xrightarrow[h \to 0]{} \frac{d}{dh} \int_0^h f(x+t,y) \, dt \Big|_{h=0} =$$

$= f(x,y)$ quindi

$$\frac{\partial U}{\partial x}(x,y) = f(x,y)$$

analogamente

$$\frac{\partial U}{\partial y}(x,y) = g(x,y)$$