Geometria 16/3/17

Prop.: $p : V \to V$ $\quad (\dim V < +\infty)$

p è proiez. ortog. $\iff$ $p \circ p = p$, p autoaggiunto.

Dim: $\underline{\Longrightarrow}$ $\quad p \circ p = p$.

$v_1, v_2 \in V \qquad \langle p(v_1) \mid v_2 \rangle \overset{?}{=} \langle v_1 \mid p(v_2) \rangle$

$v_1 = w_1 + u_1 \qquad v_2 = w_2 + u_2 \qquad w_j = p(v_j) \in W$

$u_j = p_{W^\perp}(v_j) \in W^\perp$

$\langle p(v_1) | v_2 \rangle = \langle w_1 | v_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 + u_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 \rangle$

$\langle v_1 | p(v_2) \rangle = \langle w_1 + u_1 | w_2 \rangle = \langle w_1 | w_2 \rangle$

$\underline{\Leftarrow}$ Sappiamo da $p \circ p = p$ che p è proiez. su $\mathrm{Im}(p)$ rispetto a $V = \mathrm{Im}(p) \oplus \mathrm{Ker}(p)$.

Devo provare che tale deco è $\perp$ cioè che

$\mathrm{Ker}(p) = \mathrm{Im}(p)^{\perp}$. Poiché

$$\dim \mathrm{Ker}(p) = \dim V - \dim \mathrm{Im}(p)$$
$$\dim \mathrm{Im}(p)^{\perp} = \dim V - \dim \mathrm{Im}(p)$$

hanno stessa dim, basta vedere che

$\mathrm{Ker}(p) \subset \mathrm{Im}(p)^{\perp}$: dato $u \in \mathrm{Ker}(p)$

bisogna provare che $\langle w | u \rangle = 0$ $\forall w \in \mathrm{Im}(p)$:

infatti: $\langle w | u \rangle = \langle p(w) | u \rangle \underset{\substack{\uparrow \\ p \text{ autoaggiunta}}}{=} \langle w | p(u) \rangle$

$= \langle w | 0 \rangle = 0.$ ▨

<u>Oss</u>: dato V con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ su $\mathbb{R}$, conoscendo $\| \cdot \|$ associata a V si ricava $\langle \cdot | \cdot \rangle$;

infatti

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + 2\langle x|y\rangle + \|y\|^2$$

$$\Rightarrow \langle x|y\rangle = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right).$$

Def: chiamo $f: V \to V$ isometria se

$$\langle f(v)|f(w)\rangle = \langle v|w\rangle \quad \forall v, w \in V$$

oppure equivalentemente se

$$\|f(v)\| = \|v\| \quad \forall v \in W$$

oppure equivalentemente se

$$d(f(v), f(w)) = d(v, w) \qquad \forall v, w \in V.$$

<u>Oss</u>: $A \in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ rappresenta una isometria $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ se e solo se

$${}^tA \cdot A = I_n$$

(cioè A invertibile e $A^{-1} = {}^tA$). Infatti

A isométrie $\Longleftrightarrow \langle Ax | Ay \rangle = \langle x | y \rangle \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow {}^t(A\cdot x)(A\cdot y) = {}^t x \cdot y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow {}^t x \; {}^t A \cdot A \cdot y = {}^t x \, I_n \cdot y \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow {}^t x \cdot ({}^t A \cdot A - I_n) \cdot y = 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow \langle x | ({}^t A \cdot A - I_n) y \rangle = 0 \quad \forall x,y \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow ({}^t A \cdot A - I_n) y = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}^n$

$\Longleftrightarrow {}^t A \cdot A - I_n = 0 .$

Diremo $A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ t.c. ${}^tA \cdot A = I_n$

matrice ortogonale.

<u>Oss:</u> A è ortogonale $\Longleftrightarrow$ le sue colonne sono una base ortonormale di $\mathbb{R}^n$

Infatti: $A = (u_1, \dots, u_n)$

A ortog $\Longleftrightarrow$ ${}^tA \cdot A = I_n$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} {}^t u_1 \\ \vdots \\ {}^t u_n \end{pmatrix} \cdot (u_1 \cdots u_n) = I_n$$

$$\Leftrightarrow \left(\langle u_i | u_j \rangle \right)_{i,j=1\ldots n} = I_n$$

$$\Leftrightarrow \quad \langle u_i | u_j \rangle = \delta_{ij} \quad \forall i,j$$

$\Longleftrightarrow$ $(u_1, \dots, u_n)$ base ortonormale.

Esempi: in $\mathbb{R}^2$ sono isometrie

- rotazioni $\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} = A$

verifico $\quad {}^tA \cdot A = \begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ -\sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

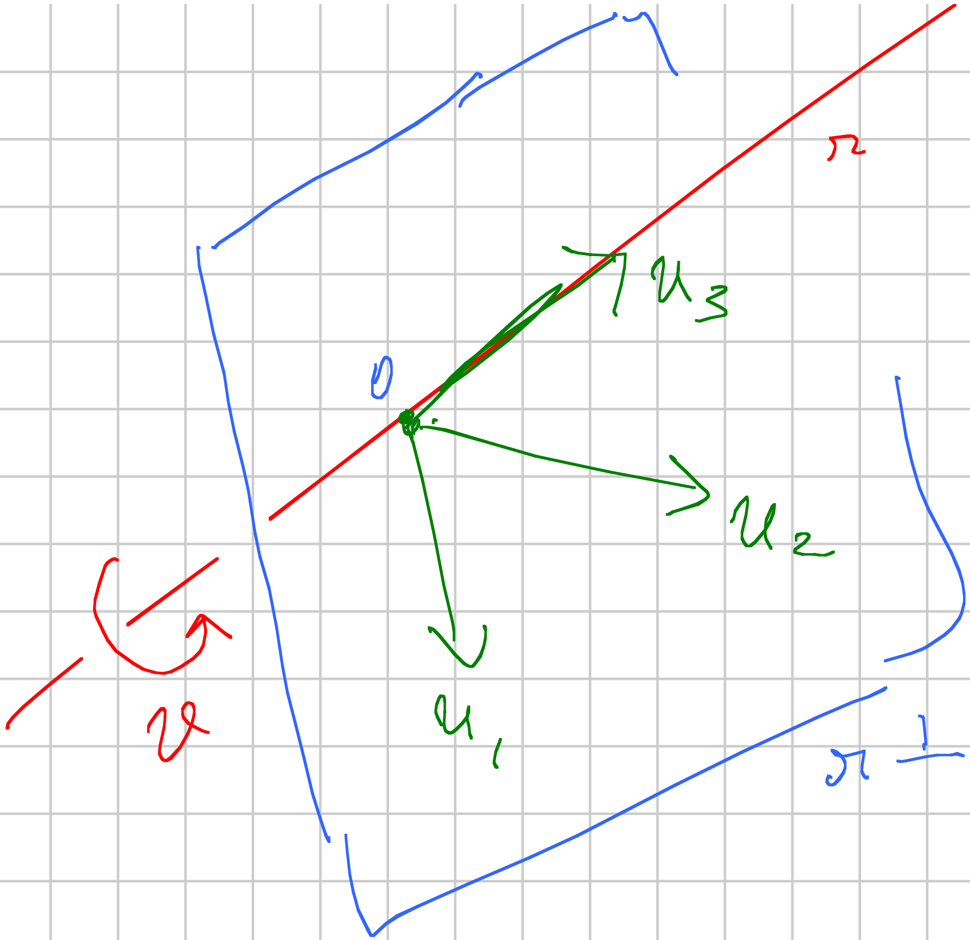
- riflessioni

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & \sin\vartheta \\ \sin\vartheta & -\cos\vartheta \end{pmatrix} = A$$

$({}^tA \cdot A = I_2$ facile$)$.

Esempi: in $\mathbb{R}^3$ sono isometrie

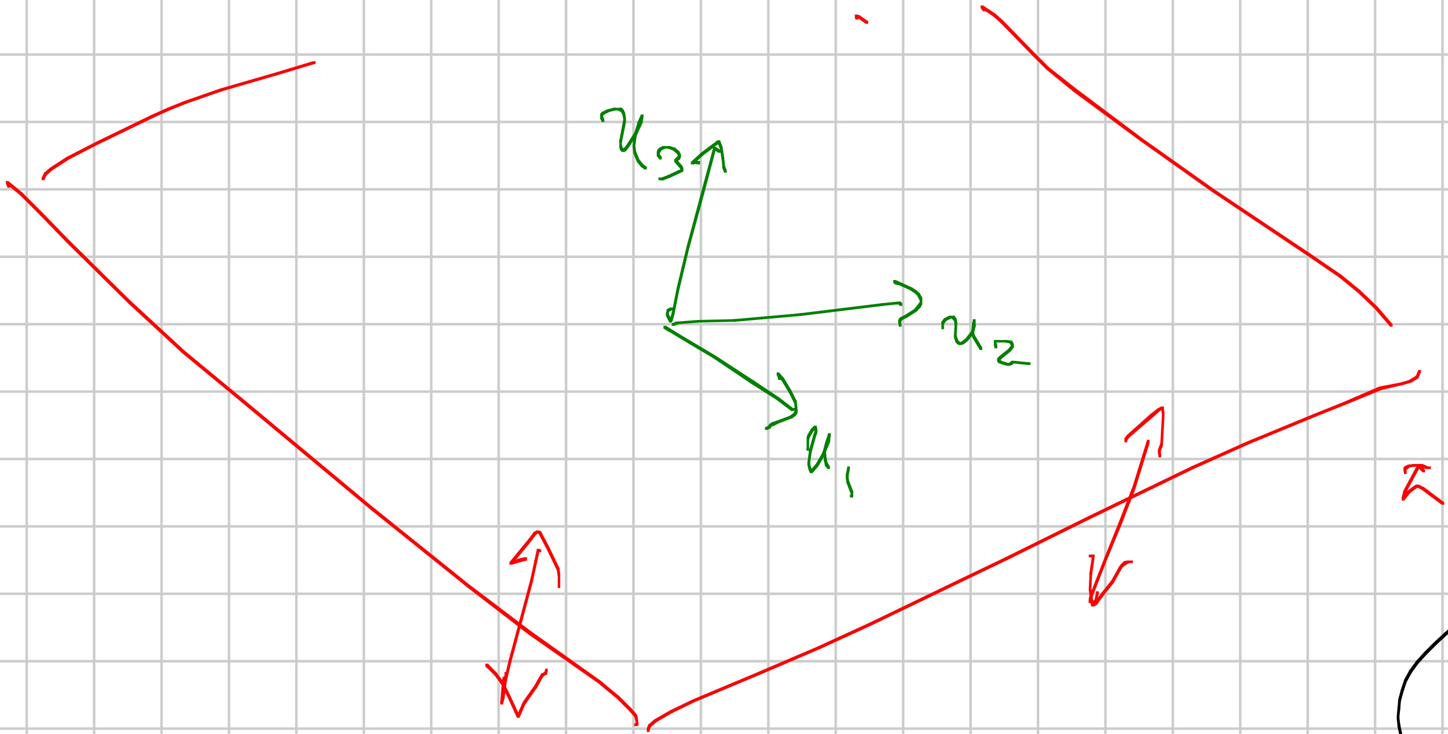
- rotazioni;



$u_1\, u_2\, u_3$ base ortonormale, e rispetto ad esse la rotazione ha matrice

$$\begin{pmatrix} \cos\vartheta & -\sin\vartheta & 0 \\ \sin\vartheta & \cos\vartheta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

- riflessioni rispetto a piani:



$u_1\ u_2\ u_3$
base ortonormale

rispetto a
cui la
rifl. ha
matrice

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Caso complesso

$$\mathbb{C}^n \longleftrightarrow \mathbb{R}^{2n}$$

$$z = x + iy \longleftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ \vdots \\ x_n \\ y_n \end{pmatrix}$$

Se considero $\|z\|^2$ come el. di $\mathbb{R}^{2n}$ viene

$$\|z\|^2 = x_1^2 + y_1^2 + \cdots + x_n^2 + y_n^2$$
$$= |z_1|^2 + \cdots + |z_n|^2$$
$$= z_1 \cdot \bar{z}_1 + \cdots + z_n \cdot \bar{z}_n = {}^t z \cdot \bar{z} = {}^t \bar{z} \cdot z$$

(In $\mathbb{R}^n$ era $\|x\|^2 = {}^t x \cdot x$).

<u>Def</u>: chiamo prodotto scalare hermitiano canonico su $\mathbb{C}^n$ la funzione

$$\langle \cdot \mid \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}$$

$$\langle z \mid w \rangle = {}^t\bar{w} \cdot z = {}^t z \cdot \bar{w}$$

$$= z_1 \bar{w}_1 + \cdots + z_n \bar{w}_n .$$

Es: $\left\langle \begin{pmatrix} 2-i \\ 1+3i \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} 5+2i \\ 7+i \end{pmatrix} \right\rangle_{\mathbb{C}^2}$

$$= (5-2i)(2-i) + (7-i)(1+3i) = \cdots$$

Def: sia V sp. vett. su $\mathbb{C}$. Una
$f: V \times V \to \mathbb{C}$ si dice

- sesquilineare se è
  lineare a sinistra $f(\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2, v_3) = \lambda_1 f(v_1, v_3) + \lambda_2 f(v_2, v_3)$
  antilineare a destra $f(v_3, \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2) = \overline{\lambda_1} f(v_3, v_1) + \overline{\lambda_2} f(v_3, v_2)$
- hermitiana se $f(w, v) = \overline{f(v, w)}$

- def. pos. se $f(v,v) > 0 \quad \forall v \neq 0$
- prod. scal. hermitiano se è sesquilin., hermitiano, def. pos.

__Oss__: per $z \in \mathbb{C}$ "$z > 0$" non ha senso.

Però se $f : V \times V \to \mathbb{C}$ è hermitiana ho

$$f(v,v) = \overline{f(v,v)} \Rightarrow f(v,v) \in \mathbb{R}$$

$\Longrightarrow$ ha senso scrivere $f(v,v) > 0$.

Tutta la teoria si estende da $\mathbb{R}$ a $\mathbb{C}$ con varianti.

<u>Prop</u>: le applicazioni sesquilineari su $\mathbb{C}^n$ sono tutte e sole quelle del tipo $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ con $A \in M_{n \times n}(\mathbb{C})$ dove

$$\langle z | w \rangle_A = {}^t\overline{w} \cdot A \cdot z \,.$$

Def: data $M \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbb{C})$ pongo

$$M^* = {}^t\overline{M}.$$

Es.
$$\begin{pmatrix} 1-i & 2+i & 7+4i \\ -2i & \sqrt{3} & \pi+5i \end{pmatrix}^*$$

$$= \begin{pmatrix} 1+i & 2i \\ 2-i & \sqrt{3} \\ 7-4i & \pi-5i \end{pmatrix}$$

Oss: $\langle z | w \rangle_{\mathbb{C}^n} = w^* \cdot z$

Prop: $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$ è hermitiano $\Longleftrightarrow A^* = A$

(diremo che A è hermitiana).

Es: $\begin{pmatrix} \sqrt{3} & 5+2i \\ 5-2i & -71 \end{pmatrix} \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$

è hermitiana

Oss: l'insieme delle matrici hermitiane non è un sttsp. complesso di $M_{n\times n}(\mathbb{C})$.

Nella teoria generale bisogna stare attenti che gli argomenti non si possono scambiare (lin. a sin., antilin. a dx).

- $\| v + w \|^2 = \langle v+w | v+w \rangle$

$$= \langle v | v \rangle + \langle v | w \rangle + \underbrace{\langle w | v \rangle}_{\overline{\langle v | w \rangle}} + \langle w | w \rangle$$

$$= \|v\|^2 + 2\,\mathrm{Re}\langle v|w\rangle + \|w\|^2$$

- proiez. ortog. su W con base ortogonale $w_1, \dots, w_k$

$$P_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v|w_i\rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$$

(v a sin e non a dx perché voglio P_W sia lin).

- A autoaggiunta rispetto $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$

$\iff A^* = A$ (A hermitiana)

- A isometria rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{C}^n}$

$\iff A^* \cdot A = I_n$

$\iff$ le colonne di A sono base ortonormale

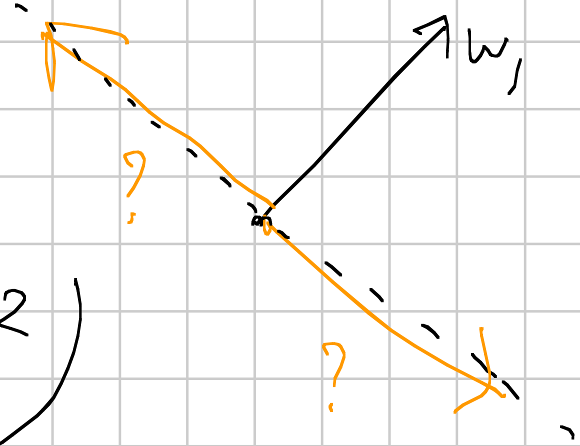
(diremo: A unitaria)

—— o ——

9.2.4 Ortonormalizzazione

(a) $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^2}$ $v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -12 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ -1789 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{13}\begin{pmatrix} -5 \\ 12 \end{pmatrix}$$



w_2 è l'unico vettore unitario ortog. a w_1, dunque $\pm \frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}$

t.c. la matrice di cambio di base da (v_1, v_2) a (w_1, w_2) ha det > 0

ovvero $\det(v_1\ v_2)$, $\det(v_1\ w_2)$ sono concordi

$$\det(v_1\ v_2) = \begin{pmatrix} 5 & \sqrt{\pi} \\ -12 & -1789 \end{pmatrix} < 0$$

$$\det \begin{pmatrix} 5 & 12 \\ -12 & 5 \end{pmatrix} > 0$$

$$\Longrightarrow \quad w_2 = -\frac{1}{13}\begin{pmatrix} 12 \\ 5 \end{pmatrix}.$$

(b) $\mathbb{R}^2$ $\quad \langle \cdot | \cdot \rangle \quad \begin{pmatrix}3&4\\4&7\end{pmatrix}$ $\qquad v_1 = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad v_2 = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}{\sqrt{(1\ 0)\begin{pmatrix}3&4\\4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}}} = \frac{1}{\sqrt{3}}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$

w_2 deve essere ortog a v_1:

$$(x\ y)\begin{pmatrix}3&4\\4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = 0$$

$$(x\ \ y)\begin{pmatrix}3\\4\end{pmatrix} = 0 \qquad 3x+4y=0$$

$$\tilde{w}_2 = \begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$

$$w_2 = \pm \frac{\tilde{w}_2}{\|\tilde{w}_2\|} = \pm \frac{\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{(-4\ \ 3)\begin{pmatrix}3&4\\4&7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}}}$$

$$= \pm \frac{\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}}{\sqrt{(0\ \ 5)\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}}} = \pm \frac{1}{\sqrt{15}}\begin{pmatrix}-4\\3\end{pmatrix}$$

$$\det(v_1, v_2) = \det\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} v_1 & \begin{matrix} -4 \\ 3 \end{matrix} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} > 0$$

$$\Longrightarrow w_2 = + \frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} -4 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

(d) $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^3}$ $\quad v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\quad v_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}$ $\quad v_3 = \begin{pmatrix} \sqrt{\pi} \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{1}{\sqrt{14}} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_2 = \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \underbrace{\frac{-6+2-3}{14}}_{1/2} \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

(verifico $w_2 \perp w_1$: ✓)

$$w_2 = \frac{1}{2\sqrt{10}} \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\tilde{w}_3 = \pm \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix} = \pm \cancel{\begin{pmatrix} 7 \\ -7 \\ 7 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

(verifico $\tilde{w}_3 \perp v_1, v_2$: ✓)

$$w_3 = \pm \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & -2 & \sqrt{\pi} \\ 2 & 1 & 0 \\ -1 & 3 & 0 \end{pmatrix} > 0$$

$$\det\begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ -1 & 3 & 1 \end{pmatrix} = 3 - 2 + 6 + 1 + 4 + 9 > 0$$

$$\Rightarrow w_3 = + \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

(f) $V = C^0([0,1],\mathbb{R})$ $\langle f|g\rangle = \int_0^1 f(t)\,g(t)\,dt$

$v_1(t) = t - 2t^2$

$v_2(t) = t$

$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|}$ $\|v_1\|^2 = \langle v_1|v_1\rangle = \int_0^1 (t-2t^2)^2\,dt$

$= \int_0^1 (t^2 - 4t^3 + 4t^4)\,dt = \frac{1}{3} - 1 + \frac{4}{5} = \frac{2}{15}$

$$w_1 = \sqrt{\frac{15}{2}}\,(t - 2t^2) = \frac{t - 2t^2}{\sqrt{\frac{2}{15}}}$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \langle v_2 | w_1 \rangle \cdot w_1 = v_2 - \frac{1}{\|v_1\|^2} \langle v_2 | v_1 \rangle \cdot v_1$$

$$\langle v_2 | v_1 \rangle = \int_0^1 t\,(t - 2t^2)\,dt = \int_0^1 (t^2 - 2t^3)\,dt$$

$$= \frac{1}{3} - \frac{1}{2} = -\frac{1}{6}$$

$$\tilde{w}_2 = t - \frac{\overset{5}{\cancel{15}}}{8} \cdot \left(-\frac{1}{\underset{2}{\cancel{6}}}\right)\left(t - 2t^2\right) = \frac{1}{4}\left(5t - 2t^2\right)$$

$$w_2 = \frac{5t - 2t^2}{\| 5t - 2t^2 \|}$$

$$\| 5t - 2t^2 \| = \sqrt{\int_0^1 \left(5t - 2t^2\right)^2 dt} = \ldots$$

9.3.1 Trovare base ortog di

$$\left(\mathrm{Span}\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right)^{\perp} \subset \mathbb{R}^4$$

Devo trovare due vett. ortog. ai due dati (lin. indip.) e poi ortogonalizzare.

$$\begin{cases} 3x + y - 5z + 2w = 0 \\ -2x + 4y + 3z - w = 0 \end{cases}$$

Cerco due vett. ortog. ai due dati aventi una coord. nulla (non la stessa):

$$\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} \quad \begin{pmatrix} -2 \\ 4 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} \checkmark \qquad \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix}$$

$69+1-70$ ✓ $\qquad -1-45+46$ ✓

$-46+4+42$ ✓ $\qquad -4+27-23$ ✓

$$\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 9 \\ 23 \end{pmatrix} - \frac{-1+126}{529+1+196} \begin{pmatrix} 23 \\ 1 \\ 14 \\ 0 \end{pmatrix} =$$

$$= \cancel{\frac{1}{726}} \begin{pmatrix} -125 \cdot 23 \\ -726 \quad -125 \\ \vdots \end{pmatrix}$$

verificare che sia $\perp$ $\begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 14 & 1 \\ & 0 \end{pmatrix}$

9.3.2 Trovare base ortog di Span$(v_1, \dots, v_k)$ rispetto a $\langle \cdot | \cdot \rangle_A$.

(a) $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 7 \end{pmatrix}$ $\qquad v_1 = \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \end{pmatrix}$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad \|v_1\|^2 = \begin{pmatrix}5 & -2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 3\\ 3 & 7\end{pmatrix}\begin{pmatrix}5\\ -2\end{pmatrix}$$

$$= 2\cdot 5^2 + 2\cdot 3\cdot 5\cdot(-2) + 7\cdot(-2)^2$$

(d) $$A = \begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 1 & 2 & 1\\ 0 & 1 & 3\end{pmatrix} \qquad v_1 = \begin{pmatrix}2\\ -1\\ 1\end{pmatrix}$$

$$w_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} \qquad \|v_1\|^2 = 1\cdot 2^2 + 2\cdot(-1)^2 + 3\cdot 1^2$$

$$+ 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1) + 2 \cdot 1 \cdot (-1) \cdot 1$$

(e) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 3 \end{pmatrix}$ $\qquad v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ $\qquad v_2 = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$

$w_1 = \dfrac{v_1}{\|v_1\|_A^2}$ $\qquad \|v_1\|_A = 1 + 2 \cdot 2^2 + 3 \cdot (-1)^2 + 2 \cdot 1 \cdot 1 \cdot (-1)$

$$+ 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot (-1)$$

$$= 1 + 8 + 3 - 2 - 4 = 6$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \frac{1}{6} \langle v_2 | v_1 \rangle_A \cdot v_1$$

$$\langle v_2 | v_1 \rangle_A = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 0 \end{pmatrix} = 3$$

$$\tilde{w}_2 = v_2 - \frac{1}{2} v_1 = \frac{1}{2} \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \qquad w_2 = \frac{\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}}{\left\| \begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \right\|_A}$$

9.3.4 Trouver $(Hf)(0)$:

$$f(x,y) = y\cos(x-3y^2) - 2x\sin(y+5x^2)$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -y\sin(x-3y^2) - 2\sin(y+5x^2) - 20x\cos(y+5x^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y\cos(\cdot) - 20x\cos(\ ) - 20\cos(\cdot) + 200x^2\sin(\cdot\cdot)$$

$$-20$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -\sin() + 6y^2\cos(x-3y^2)$$

$$-2\cos(\;\cdots\;) + 20x\sin(\cdots)$$

$$-2$$

$\partial f/\partial y$ $\quad$ $\partial f/\partial y^2$ $\quad$ $\partial^2 f/\partial x \partial y$ $\quad$ ...