Geometria 15/3/17

$$\frac{\partial f}{\partial x_i} =$$ la derivata di f con variabile x_i come se le altre fossero parametri fissati

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i} = \frac{\partial}{\partial x_j}\left(\frac{\partial f}{\partial x_i}\right).$$

Prop: "nei casi buoni" (se tutte le $\frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$

(esistono continue su Ω)

si ha $\dfrac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} = \dfrac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}$.

Esempio: $f(x,y) = xy^7 \cdot \cos\left(5x^2y - 3x^{10}y^4\right)$.

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) = y^7 \cos(5x^2y - 3x^{10}y^4) - xy^7 \cdot \sin(5x^2y - 3x^{10}y^4) \cdot (10xy - 30x^9y^4)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x,y) = 7y^6 \cos(5x^2y - 3x^{10}y^4)$$

$$- y^7 \sin(\ldots) \cdot (5x^2 - 12x^{10}y^3)$$

$$- x \cdot 7y^6 \sin(\ldots) \cdot (10xy - 30x^9y^4)$$

$$- xy^7 \cos(\ldots) \cdot (5x^2 - 3x^{10}y^4) \cdot (10xy - 30x^9y^4)$$

$$- xy^7 \cdot \sin(\ldots) \cdot (10x - 120x^9y^3)$$

$$f(x,y) = xy^7 \cdot \cos(5x^2y - 3x^{10}y^4).$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 7xy^6\cos(5x^2y - 3x^{10}y^4)$$

$$- xy^7 \sin(5x^2y - 3x^{10}y^4) \cdot (5x^2 - 12x^{10}y^3)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 7y^6\cos(\dots) - 7xy^6 \sin(\dots) \cdot (10xy - 30x^8y^4)$$

$$-y^7 \sin(\ldots)(5x^2 - 12x^{10}y^3)$$

$$-xy^7 \cos(5x^2y - 3x^{10}y^4) \cdot (10xy - 30x^9y^4)(5x^2 - 12x^{10}y^3)$$

$$-xy^7 \sin(\ldots)(10x - 120x^9y^3)$$

Def: chiamo matrice hessiana di

$f : \Omega \to \mathbb{R}$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ aperto

$$(Hf)(x) = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x)\right)_{i,j=1\ldots n}$$

La Prop dice che per f buona Hf è simmetrica.

Formula di Taylor (II ordine):

$n = 1$: $f : (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ $x \in (a,b)$

$$f(x+t) = f(x) + t \cdot f'(x) + \frac{1}{2} t^2 \cdot f''(x) + o(t^2)$$

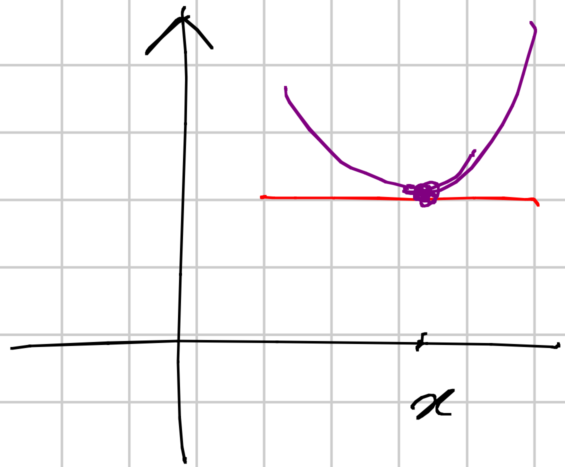
una quantità
che tende a 0
più velocemente
di t^2 per $t \to 0$

Conseguenze:

- Se f ha min. loc. in x allora
  $f'(x) = 0$, $f''(x) \geq 0$

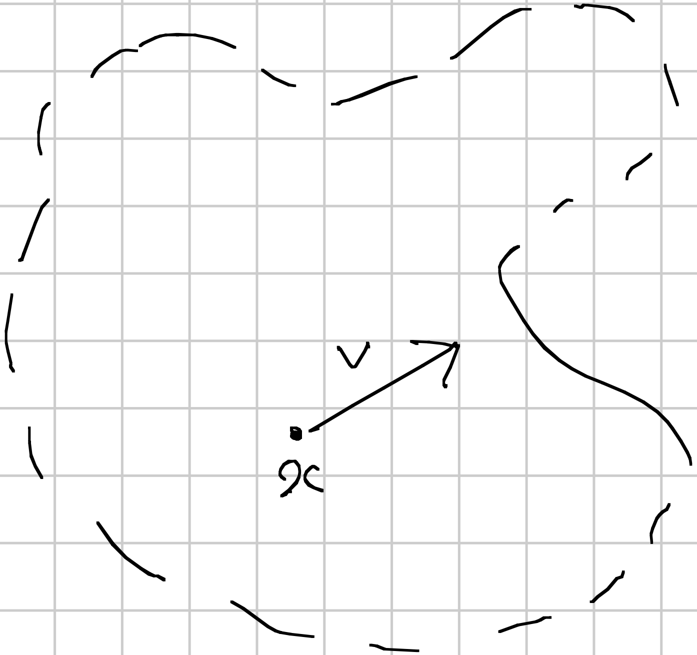
· se $f'(x) = 0$, $f''(x) > 0$ allora

f ha min. loc in x



In quelsiasi:

<u>Prop</u>: $$f(x+v) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) v_i v_j$$



$$+ o\left(\|v\|^2 \right)$$

<u>Oss</u>: posso riscrivere come:

$$f(x+v) = f(x) + \sum_{i=1}^{n} (\operatorname{grad} f)(x)_i \cdot v_i + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \big((Hf)(x) \big)_{i,j} v_i v_j + o(\|v\|^2)$$

$$= f(x) + \langle (\operatorname{grad} f)(x) | v \rangle_{\mathbb{R}^n} + \langle v | v \rangle_{(Hf)(x)} + o(\|v\|^2).$$

<u>Conseguenza</u>:

- se f ha min o max locale in x allora
  $$(\operatorname{grad} f)(x) = 0$$

Per analogo completo del caso $n=1$:

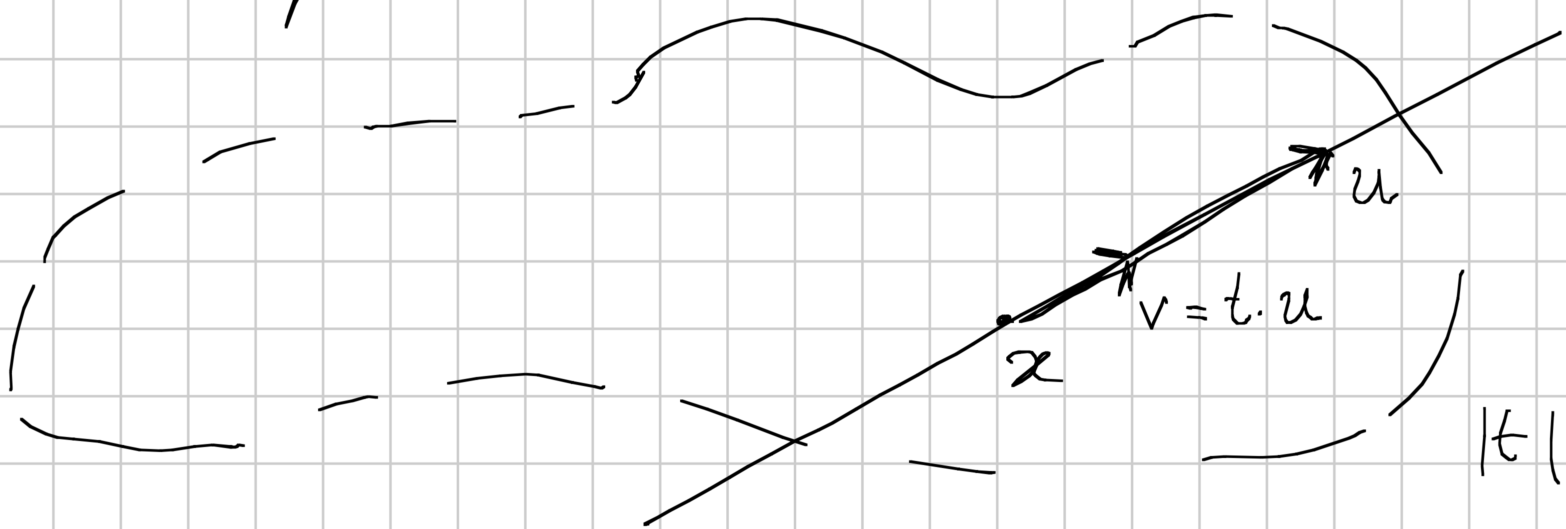
- f min loc. in x $\Longrightarrow$ $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$

  \+ condizione su Hf che garantisco che $\langle v | v \rangle_{(Hf)(x)} \geq 0$ $\forall v$

- $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$ + condizione su Hf che garantisce che $\langle v | v \rangle_{(Hf)(x)} > 0$ $\forall v \neq 0$

"dim" $f(x+v) = f(x) + \sum \frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot v_i + \frac{1}{2} \sum \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} v_i v_j + o(\|v\|^2)$

Lo dimostro per v che varia non in $\mathbb{R}^n$ ma lungo una fissata retta:



$\|u\| = 1$

$|t| = \|v\| \ll 1$

Poupo $g(t) = f(x + t \cdot u)$, So $(n=1)$

$$g(t) = g(0) + t \cdot g'(0) + \frac{1}{2} t^2 \cdot g''(0) + o(t^2).$$

$$g'(t) = \frac{d}{dt}\left(f\begin{pmatrix} x_1 + tu_1 \\ \vdots \\ x_n + tu_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x+tu) \cdot u_i$$

$$\left(\Rightarrow g'(0) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(a) \cdot u_i \right)$$

$$g''(t) = \sum_{j,i=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_j \partial x_i}(x+tu) \cdot u_j u_i$$

$$\left(\Rightarrow g''(0) = \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x) \cdot u_i u_j \right)$$

$$\Rightarrow f(x+v) = f(x+tu) = g(t) = g(0) + t \cdot g'(0) + \frac{1}{2} t^2 g''(0) + o(t^2)$$

$$t = \|v\|$$

$$= f(x) + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) \cdot \underset{v_i}{\underset{\shortparallel}{(tu_i)}} + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^{n} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j} \underset{v_i}{\underset{\shortparallel}{(tu_i)}} \cdot \underset{v_j}{\underset{\shortparallel}{(tu_j)}} + \underset{\shortparallel}{o(t^2)}$$

$v_i \qquad v_i \quad v_j \quad \|v\|^2$

$\boxed{}$

—— o ——

Interpretazione geometrica della proiez. ortog.:

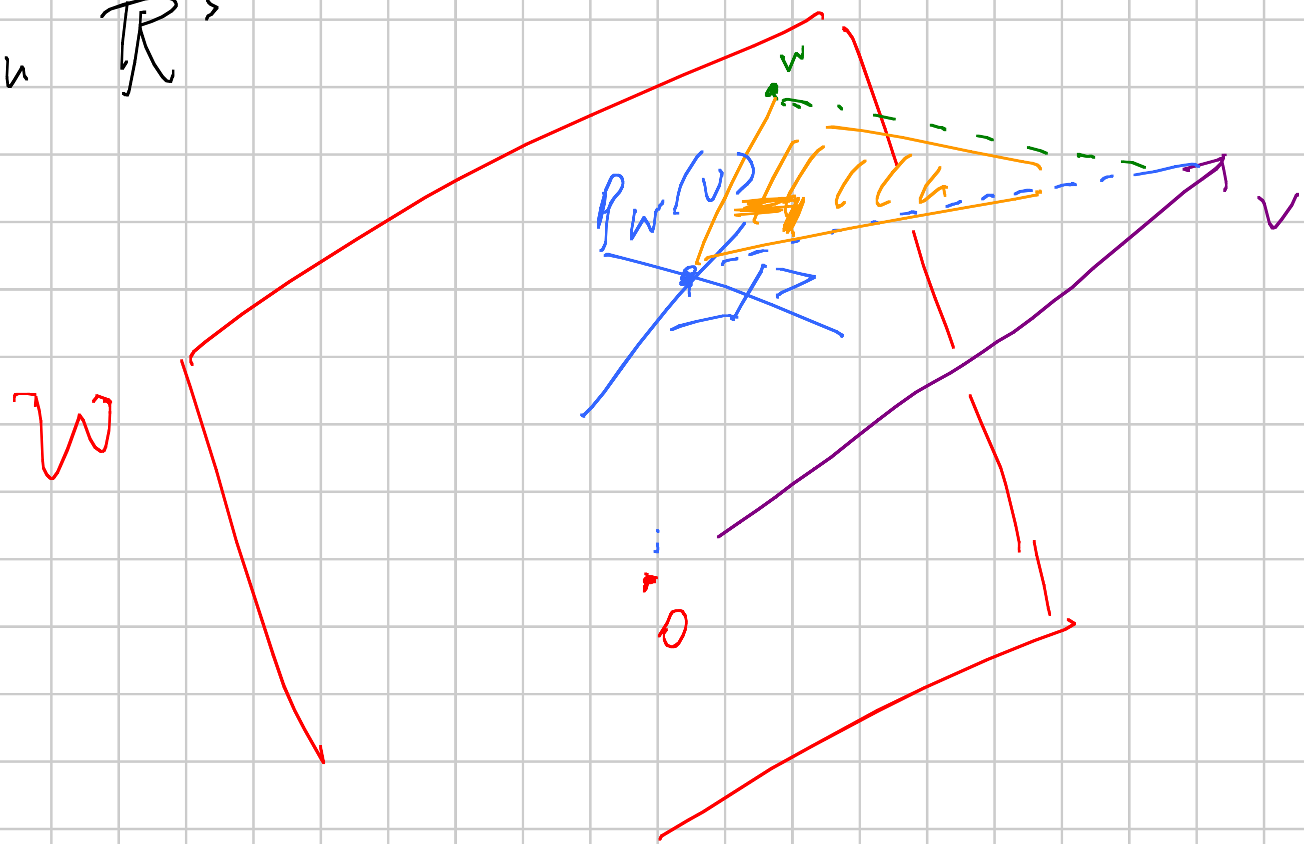
Teo: sia V con $\langle\cdot|\cdot\rangle$ di dim $< +\infty$

$W \subset V$ stsp. Allora:

$P_W(v)$ è il punto di W avente la

Minima distanza da v.

Es: in $\mathbb{R}^3$



<u>Dim</u>: Sia $w_1, \dots, w_k$ base ortog. di W.

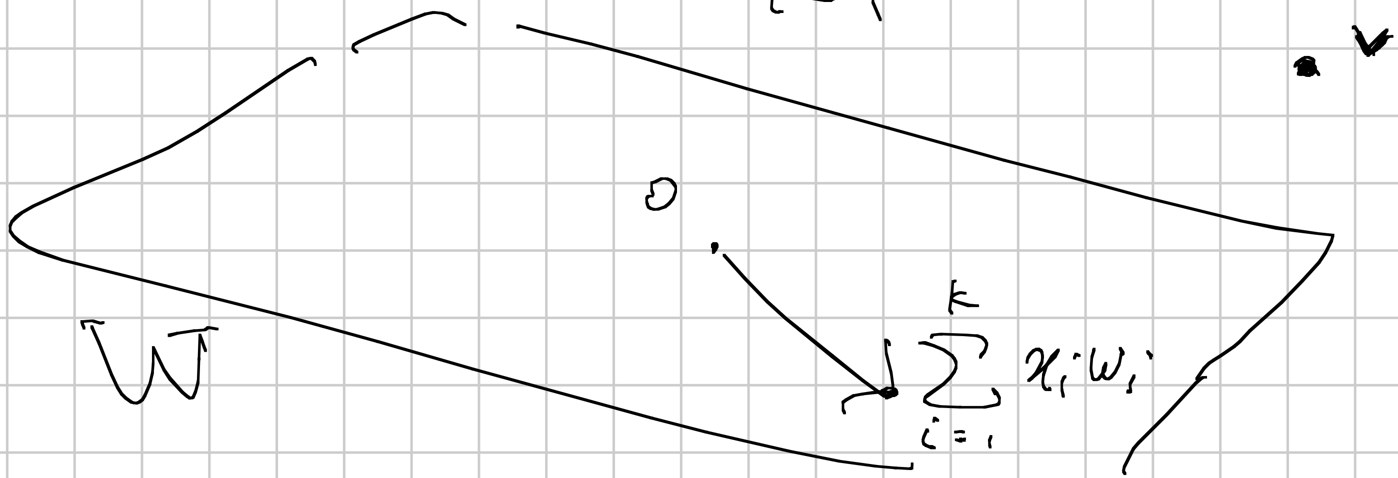
So che $p_W(v) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2} \cdot w_i$.

Devo far vedere che al variare di $x \in \mathbb{R}^k$ il minimo della distanza tra v e $\sum_{i=1}^{k} x_i w_i$ si ottiene per $x_i = \frac{\langle v | w_i \rangle}{\|w_i\|^2}$.

Oss: cercano il punto di min della distanza è uguale a cercano pto di minimo del suo quadrato, cioè di

$$f(x) = \left\| v - \sum_{i=1}^{k} x_i w_i \right\|^2 .$$

Oss:



per $\|x\| \to +\infty$ ho $\lim f(x) = +\infty$

$\Rightarrow$ ha almeno un minimo.

Se faccio vedere che c'è un solo pto in cui $(\text{grad} f)(x) = 0$ ho la garanzia che tale x è il pto di minimo:

$$f(x) = \left\| v - \sum_{i=1}^{k} x_i w_i \right\|^2$$

$$= \|v\|^2 + \sum_{i=1}^{k} x_i^2 \cdot \|w_i\|^2 - 2\sum_{i=1}^{k} x_i \langle v | w_i \rangle$$

$$+ 2 \sum_{i,j=1}^{k} x_i x_j \underbrace{\langle w_i | w_j \rangle}_{= 0}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial f}{\partial x_\ell}(x) = 0 + 2x_\ell \cdot \|w_\ell\|^2 - 2 \langle v | w_\ell \rangle$$

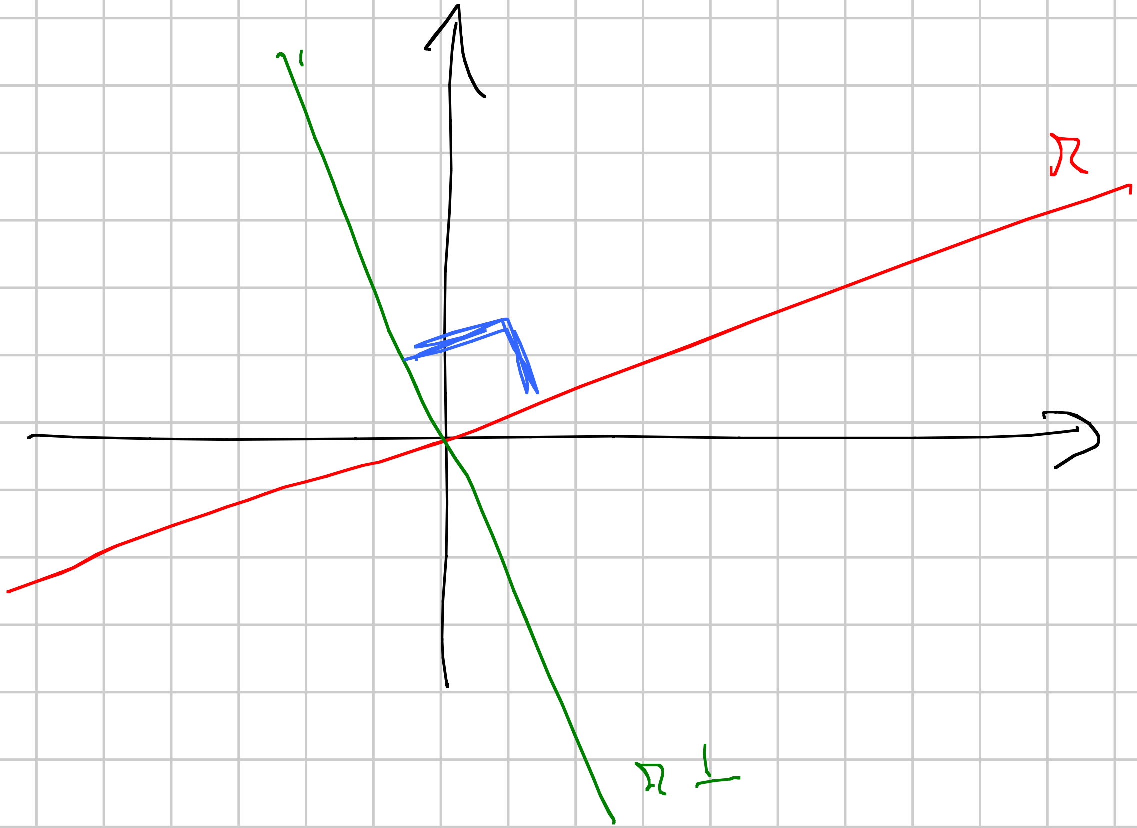
$\Rightarrow$ l'unico x nel quale $(\operatorname{grad} f)(x) = 0$ è

$$x_\ell = \frac{\langle v | w_\ell \rangle}{\| w_\ell \|^2}.$$

$\blacksquare$

Oss: in $\mathbb{R}^2$ tramite $\perp$ ho

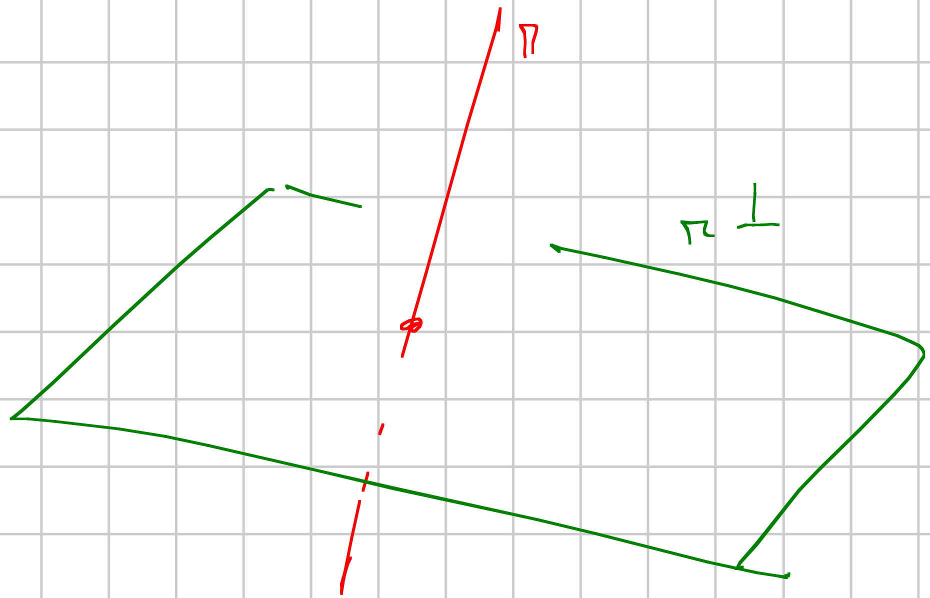
$$\{\text{rette per } O\} \longleftrightarrow \{\text{rette per } O\}$$



$$((\pi^\perp)^\perp = \pi)$$

Oss: in $\mathbb{R}^3$ via $\perp$ ho

$$\{\text{piani per } O\} \longleftrightarrow \{\text{rette per } O\}$$



Oss: «pass. cent, direzione r»: $r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : ax + by = 0 \right\}$

: $r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$

: $r = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}^{\perp}$

: $r = \left(\operatorname{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \right)^{\perp}$

: $\quad \pi^\perp = \mathrm{Span}\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}$

: $\quad$ "pres. param. pr $\pi^\perp$"

Aud op: "pres. param. di π" $\longleftrightarrow$ "per. cart. di $\pi^\perp$".

In $\mathbb{R}^3$:

"pres. cart di piano π" : $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : ax + by + cz = 0 \right\}$

: $\pi = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$

: $\pi = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}^{\perp}$

$$: \pi = \left(\operatorname{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \right)^{\perp}$$

$$: \pi^{\perp} = \operatorname{Span} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

dunque:

"pres. cart. di piano π" $\Longleftrightarrow$ "pres. param. della retta $\pi^{\perp}$"

"pres. cart. di retta r" : $r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \begin{array}{l} a_1 x + b_1 y + c_1 z = 0 \\ a_2 x + b_2 y + c_2 z = 0 \end{array} \right\}$

$$: r = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \right\rangle = \left\langle \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \middle| \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right\rangle = 0 \right\}$$

$$: r = \begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}^{\perp} \cap \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix}^{\perp}$$

$$: \pi = \left(\operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right) \right)^{\perp}$$

$$: \pi^{\perp} = \operatorname{Span}\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ b_1 \\ c_1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a_2 \\ b_2 \\ c_2 \end{pmatrix} \right).$$

Dunque:

"pres. cart. di retta π" $\longleftrightarrow$ "pres. param del piano $\pi^{\perp}$"

Sapevamo:

pres. cart. di retta r $\rightsquigarrow$ pres. param. di r

pres. param. di piano π $\rightsquigarrow$ pres. cart. di π

regole dei det 2×2

NON è strano:

$$
\begin{tikzcd}
\text{pres. cart. di retta } r \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{stesse se } \pi = r^{\perp} \text{ cioè } r = \pi^{\perp}"] \arrow[d, squiggly] & & \text{pres. param. di piano } \pi \arrow[d, squiggly] \\
\text{pres. param. di } r \arrow[rr, leftrightarrow, "\text{stesse se } \pi = r^{\perp} \text{ cioè } r = \pi^{\perp}"'] & & \text{pres. cart. di } \pi
\arrow[from=1-1, to=2-1, phantom, ""]
\end{tikzcd}
$$

regole dei det 2×2

La regola dei det 2×2 non è altro che il prodotto vettoriale: dati v, w trovo $v \wedge w$ che ortogonale ad entrambi.

<u>Def</u>: in V con $\langle \cdot | \cdot \rangle$ dico che $f: V \to V$ lineare è autoaggiunta se

$$\langle f(v) | w \rangle = \langle v | f(w) \rangle \quad \forall v, w \in V.$$

Prop: per $V=\mathbb{R}^n$ con $\langle\cdot|\cdot\rangle_{\mathbb{R}^n}$ per una $A\in M_{n\times n}(\mathbb{R})$ ho:

(l'appl. lin. assoc. ad A è autoaggiunta) $\Longleftrightarrow$ A è simmetrica

Dim: $\underline{\Leftarrow}$:

$$\langle Ax | y \rangle \overset{?}{=} \langle x | Ay \rangle$$

$$\begin{array}{ccc} \langle Ax|y\rangle & & \langle x|Ay\rangle \\ \| & & \| \\ {}^t(Ax)\cdot y & & {}^tx\cdot(Ay) \\ \| & & \| \\ {}^tx\cdot{}^tA\cdot y & & {}^tx\cdot A\cdot y \end{array}$$

Sì poiché ${}^tA = A$

$\underline{\Rightarrow}$ So che $\langle Ax | y \rangle = \langle x | Ay \rangle$ $\forall x, y$.

Se lo uso con $x = e_i$, $y = e_j$ trovo

$$a_{ij} = a_{ji}. \qquad \boxed{\checkmark}$$

Q: quali sono le appl. lin $f: V \to V$ che sono proiez. ortogonali?

(Sappiamo: $f: V \to V$ è proiez. rispetto a qualche $V = W \oplus Z \iff f \circ f = f$.)

Prop: $f: V \to V$ è proiez. ortog $\iff f \circ f = f$ e f è autoaggiunto.

Coro: In $\mathbb{R}^n$ con $\langle \cdot | \cdot \rangle_{\mathbb{R}^n}$

$A \in M_{n \times n}(\mathbb{R})$ è la matrice di una proiez. ortog. $\Longleftrightarrow$ $A \cdot A = A$, ${}^tA = A$.

Dim: Prendo $W = \text{Span}\left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \right\rangle$.

Voglio trovare la matrice A di p_W e verificare $A \cdot A = {}^tA = A$.

Per trovare p_W conviene ricordare che

$$p_W(v) + p_{W^\perp}(v) = v$$

più facile perché $W^\perp$ ha dim = 1

generato da $\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 4 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} = \cancel{\begin{pmatrix} 16 \\ -14 \\ -10 \end{pmatrix}}$

$\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$

$$P_{W^\perp}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{-8x+7y+5z}{64+49+25}\begin{pmatrix} -8 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow p_W\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} - \frac{-8x+7y+5z}{138}\begin{pmatrix}-8\\7\\5\end{pmatrix}$$

$$= \underbrace{\frac{1}{138}\begin{pmatrix}74 & 56 & 40\\ 56 & 89 & -35\\ 40 & -35 & 113\end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$$

Verificare che $A \cdot A = A$.