Geometria 12/5/17

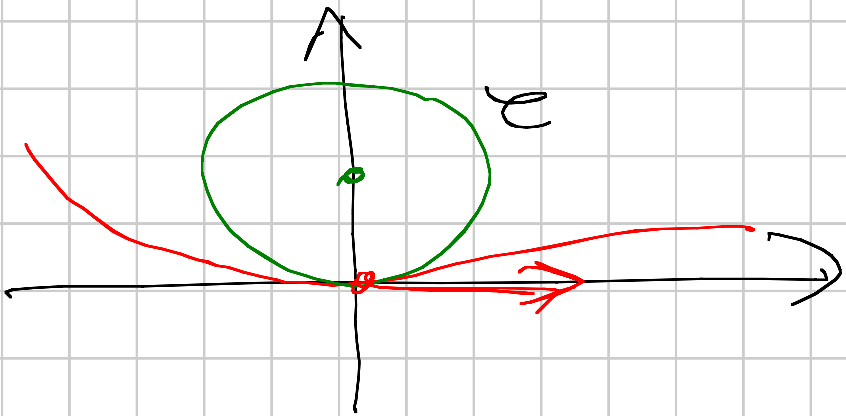
cerchio osculatore in $\alpha(t_0)$: quello con triplice contatto con α in $\alpha(t_0)$

<u>Prop</u>: se $\|\alpha'\| \equiv 1$ allora il cerchio osculatore è quello che passa per $\alpha(t_0)$ con centro $\alpha(t_0) + \dfrac{\alpha''(t_0)}{\|\alpha''(t_0)\|^2}$ $\left(\to k = \|\alpha''(t_0)\|\right)$.

Dim: posso supporre $t_0 = 0$, $\alpha(t_0) = (0,0)$,

$$\alpha = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}, \quad \alpha'(0) = \begin{pmatrix} X'(0) \\ Y'(0) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

So $\alpha''(0) \perp \alpha'(0) \Longrightarrow \alpha''(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ c \end{pmatrix}$.



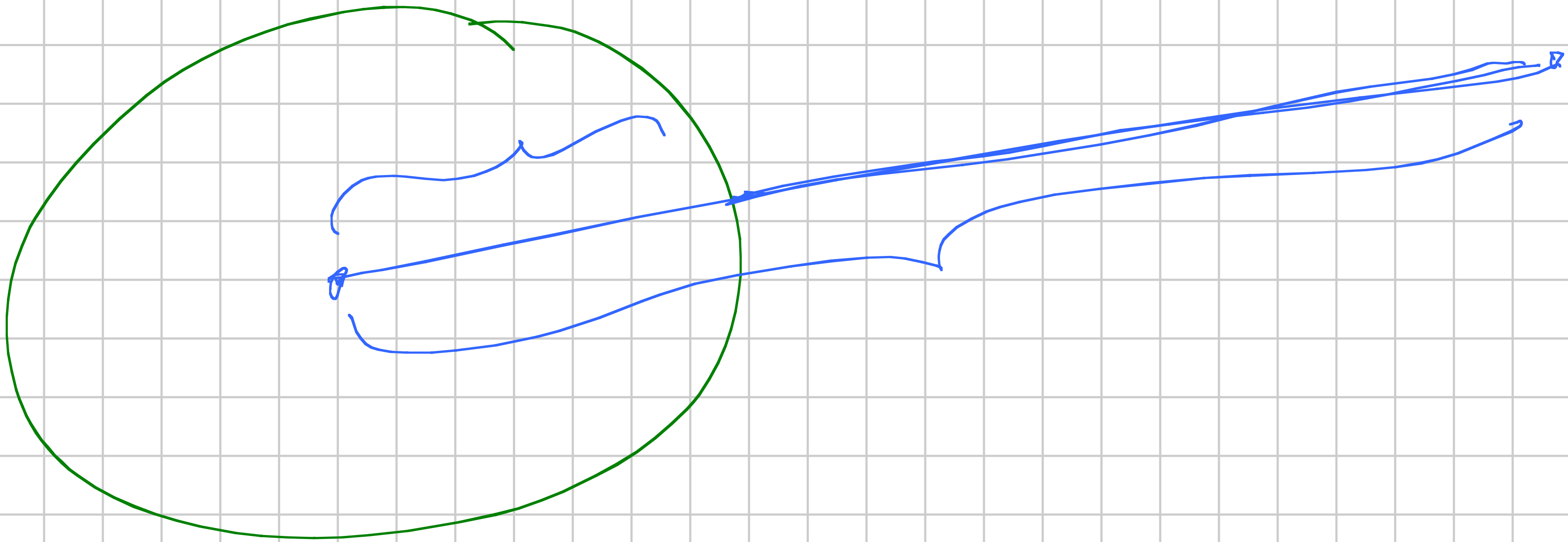
La circ. con triplice contatto deve avere tangente asse x in $(0,0)$

$\Longrightarrow$ ha centro $\begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix}$

$(r \in \mathbb{R})$

Devo provare che $r = 1/c$ imponendo il triplice contatto.

$$d\left(\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}, \mathcal{C}\right) = \left| \left\| \alpha(t) - \begin{pmatrix} 0 \\ r \end{pmatrix} \right\| - r \right|$$



$$d(t) = \left| \sqrt{x(t)^2 + (y(t) - r)^2} - |r| \right|$$

$d(0) = 0$ condiz. su r

$$d'(t) = \frac{2XX' + 2(Y-r)Y'}{2\sqrt{}}$$

$$d'(0) = 0 \Longrightarrow \underbrace{X(0)}_{=0} X'(0) + (Y(0)-1)\underbrace{Y'(0)}_{=0} = 0$$

$$a''(0) = 0 \Rightarrow \dots \frac{XX' + 2(Y-r)Y'}{\left(\sqrt{}\right)^3} + \frac{X'^2 + XX'' + Y'^2 - rY''}{\sqrt{}}$$

$$X' = 1 \quad X = 0 \quad Y' = 0 \quad Y'' = c$$

$$\Rightarrow 1 + 0 + 0 - rc = 0$$

$$\Rightarrow r = 1/c. \qquad \blacksquare$$

Q1: come calcolare $|X|$ per α non in p.d'a.
(motivo: riparametrizzare in p.d'a
in pratica è impossibile)

Q2: per α orientata come trovare
il segno di K.

Idea: considerare $\beta = \alpha \circ \tau$

con $\tau = \sigma^{-1}$, $\sigma(t) = \int_a^t \|\alpha'(u)\| du$

e usare il calcolo di τ', τ'';

infatti capire se β'' punta a destra

o a sinistra di β'.

Teo: la curvatura con segno di una curva α orientata nel pto $\alpha(t)$ è

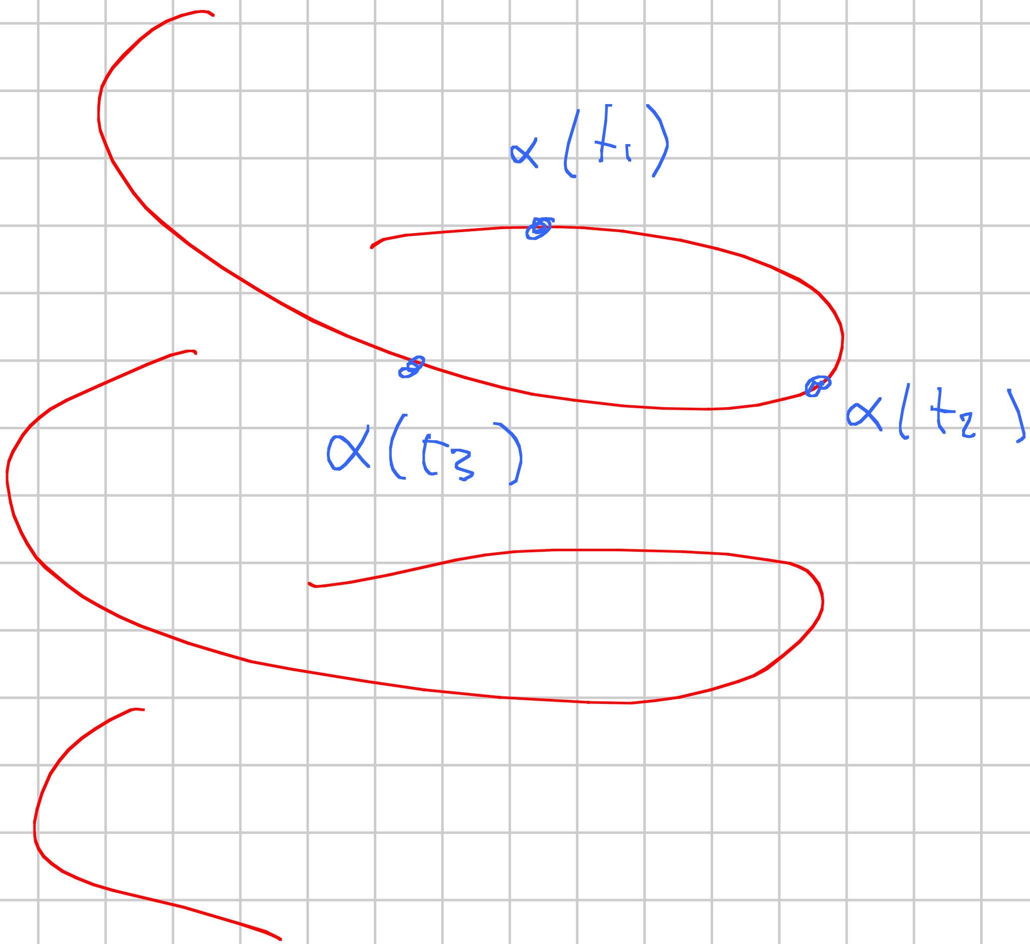
$$\kappa(t) = \frac{\det\left(\alpha'(t) \quad \alpha''(t)\right)}{\|\alpha'(t)\|^3}.$$

$$\underline{\qquad\qquad} \; c \; \underline{\qquad\qquad}$$

Curve nello spazio.

$$\alpha : [a,b] \to \mathbb{R}^3.$$

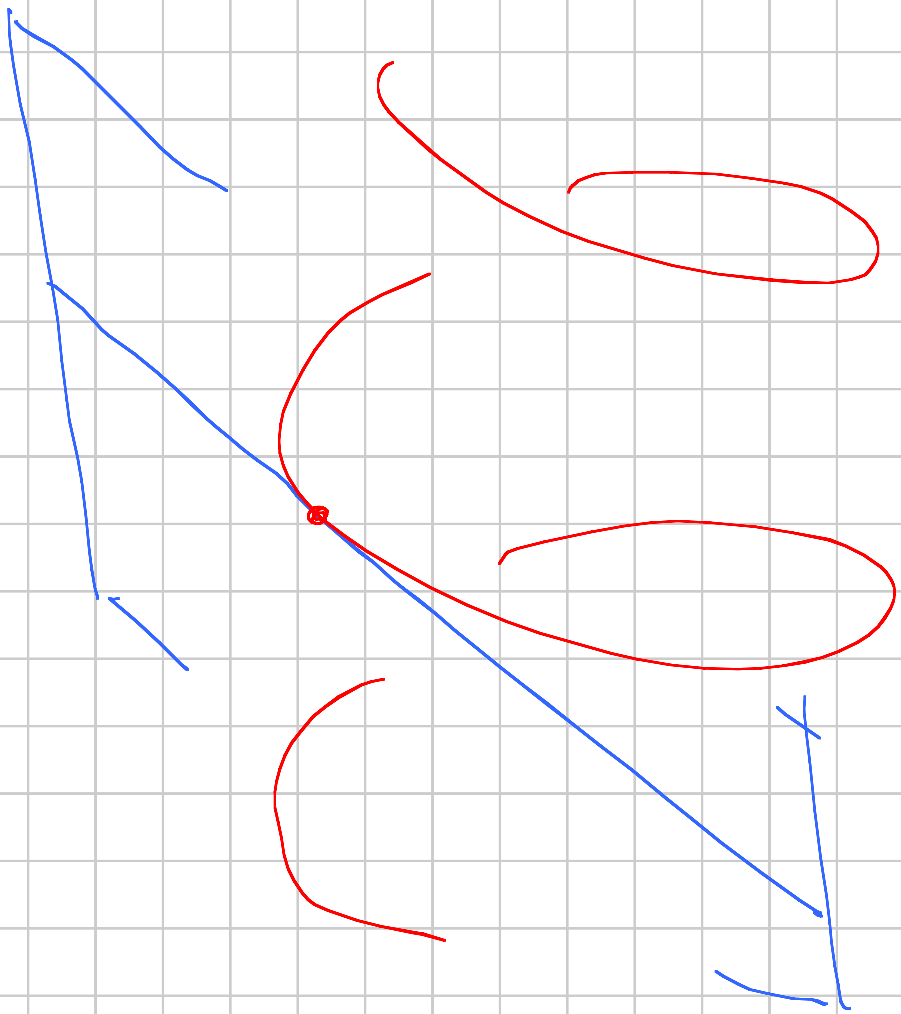
La misura della curvatura di α ha ancora senso:



Salvo eccezioni per $\alpha(t_1), \alpha(t_2), \alpha(t_3)$ passa un solo piano e una sola circonf.

Se $t_1, t_2, t_3 \longrightarrow t_0$ salvo eccezioni il piano tende a un piano con triplice contatto e la circonf. anche; li chiamo piano osculatore e circonf. osculatrice e chiamo curvatura

$$K = 1/\text{raggio circonf. osculatrice}$$



Tra i piani che contengono le tangenti (tutti contatto doppio) uno ha contatto triplo (quello su cui la curva è più vicina a piacere).

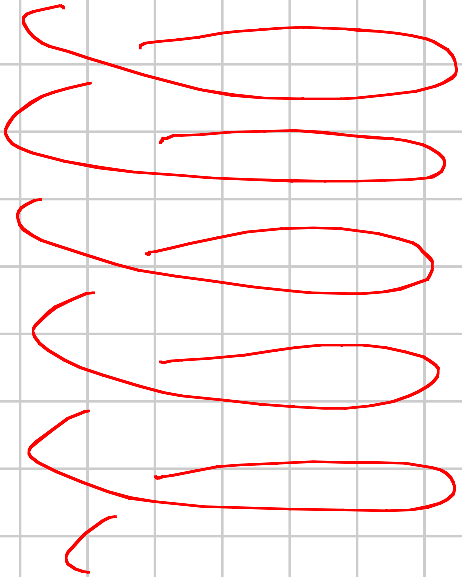
<u>Fatto</u>: per α in p.d'a. $(\|\alpha'(s)\| \equiv 1)$

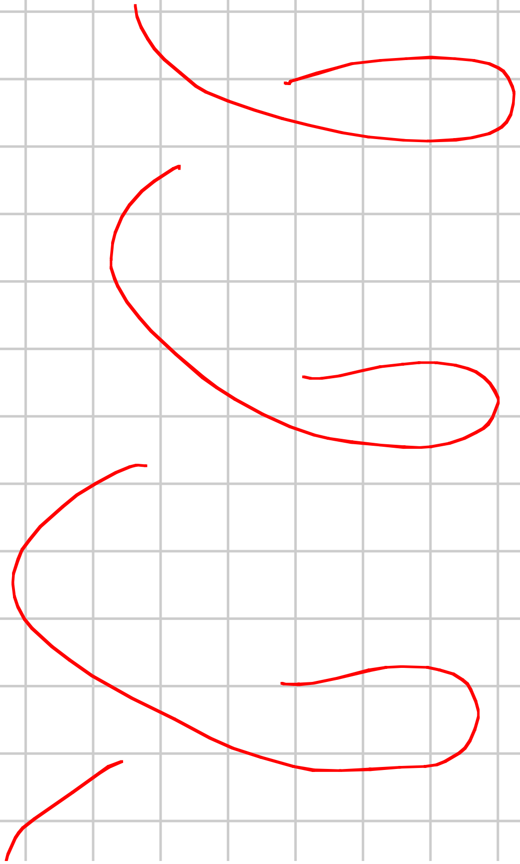
la curvatura nel punto $\alpha(s)$ è

$$\kappa(s) = \|\alpha''(s)\|$$

(senza segno).

Q: come misurare la non-planarità?

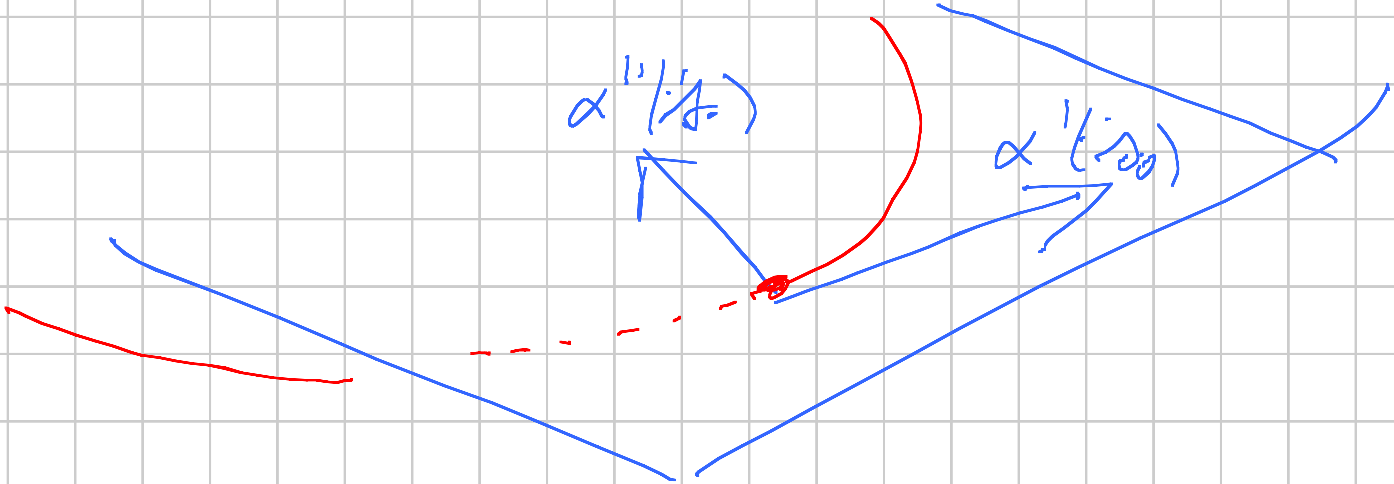




Sappiamo che esiste un piano osculatore che meglio approssima la curva; se esso non cambia la curva è planare (giace su di esso): misura di non planarità = variazione piano osculatore.

Prendiamo α in p.d'a.

<u>Fatto</u>: il piano osculatore è quello che passa per $\alpha(s_0)$ e generato da $\alpha'(s_0)$ e $\alpha''(s_0)$:



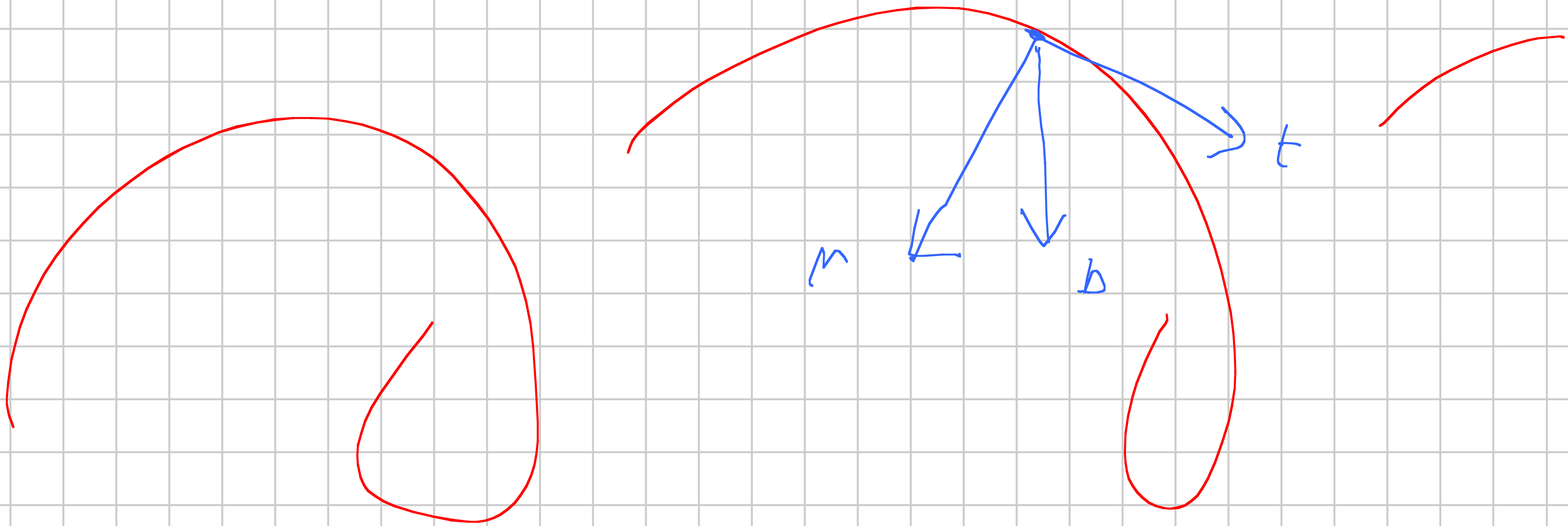
Introduco il riferimento di Frénet:

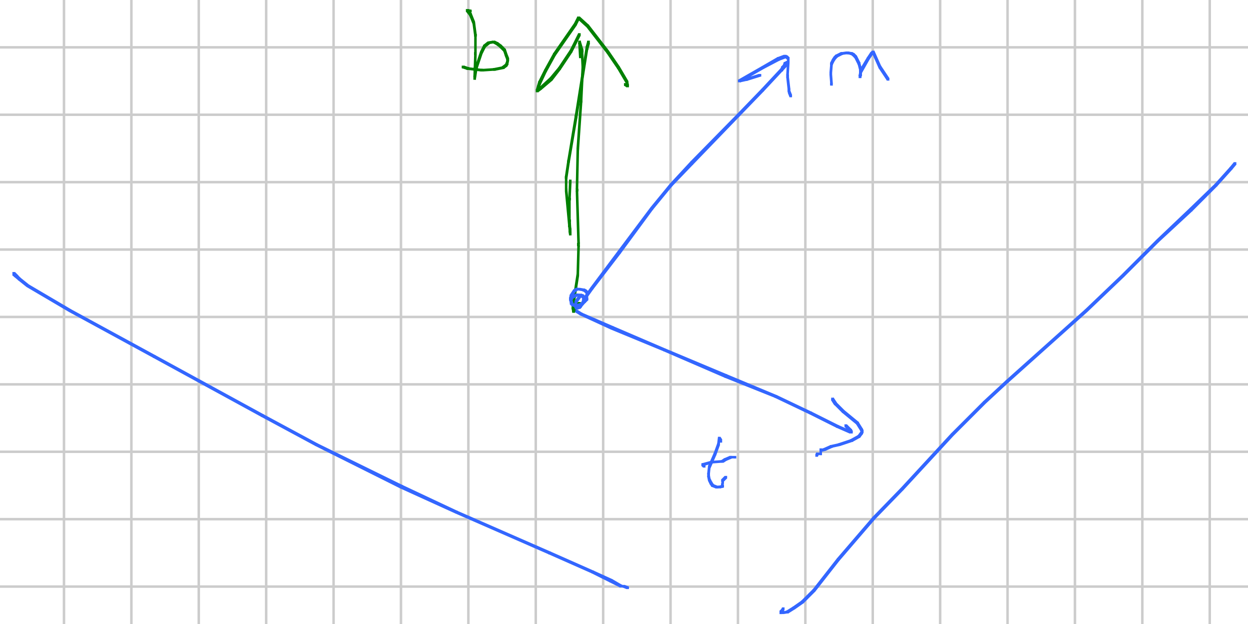
$$t(s) = \alpha'(s)$$ vettore tangente

$$n(s) = \frac{\alpha''(s)}{\|\alpha''(s)\|}$$ vettore normale

$$b(s) = t(s) \wedge n(s)$$

$(t, n, b)(s)$ base ortonormale di $\mathbb{R}^3$


t
n
b



piano osculatore $= \mathrm{Span}(t, n) = b^{\perp}$

$\Rightarrow$ variazione del piano osculatore

τ dato da b'.

<u>Teo</u>: esistono funzioni $K, \tau : [a,b] \to \mathbb{R}$ t.c.

$t' = K \cdot n$ (K = curvatura)

$b' = -\tau \cdot n$ (τ = torsione = "misura della non planarità");

inoltre $n' = -K \cdot t + \tau \cdot b$, dunque

$$(t, n, b)' = (t, n, b) \cdot \begin{pmatrix} 0 & -k & 0 \\ k & 0 & -\tau \\ 0 & \tau & 0 \end{pmatrix},$$

<u>Dim</u>: $t = \alpha'$

$t' = \alpha'' \qquad n = \dfrac{\alpha''}{\|\alpha''\|} = \dfrac{\alpha''}{k}$

$\Longrightarrow t' = k \cdot n$.

Fatto: poiché $\|b\| = 1$ ho $b' \perp b$;

inoltre $\quad b = t \wedge m$

$$\Rightarrow b' = t' \wedge m + t \wedge m'$$

$$= k \cdot \underbrace{m \wedge m}_{0} + t \wedge m' = t \wedge m'$$

$$\Rightarrow \boxed{b' \perp t}$$

$$\Rightarrow b' = -\tau \cdot n .$$

Calcolo n':

$$n = b \wedge t$$

$$\Rightarrow n' = b' \wedge t + b \wedge t'$$

$$= -\tau n \wedge t + b \wedge k \cdot n$$

$$= -k \underbrace{n \wedge b}_{t} + \tau \cdot \underbrace{t \wedge n}_{b} .$$

$\blacksquare$

Se non è in p.d'a ... $\beta = \alpha \circ \tau$ + calcoli...

<u>Teo</u>: se α è una curva qualsiasi nel punto $\alpha(t)$ ho (α $\alpha''(t) \neq 0$)

$$\kappa(t) = \frac{\| \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \|}{\| \alpha'(t) \|^3}$$

$$\tau(t) = \frac{\langle \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \mid \alpha'''(t) \rangle}{}$$

$$\| \alpha'(t) \wedge \alpha''(t) \|^2$$

Inoltre il piano osculatore è sempre generato da $\alpha'(t)$ e $\alpha''(t)$.